This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

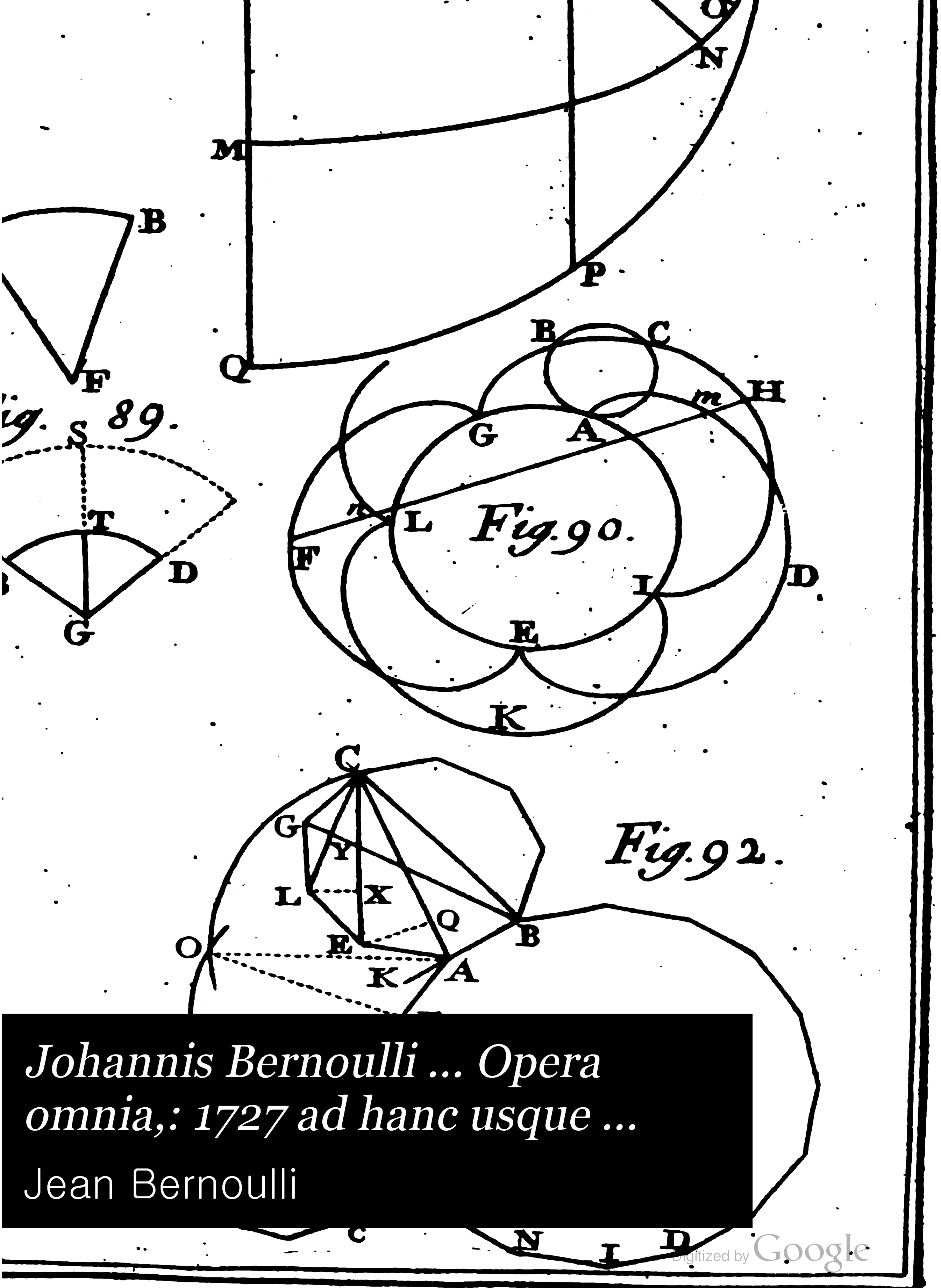


Fig. 89.

Fig. 90.

Fig. 92.

Johannis Bernoulli ... Opera omnia,: 1727 ad hanc usque ...
Jean Bernoulli
Digitized by Google

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEE
900000066596
Digitised by Google

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEE
900000066596
Digitized by Google

Digitized by Google

Math. 170

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

JOHANNIS BERNOULLI,

M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, *Socii* &c.

OPERA OMNIA,

TAM ANTEA SPARSIM EDITA,
quam hactenus inedita.

TOMUS TERTIUS,

Quo continentur ea
Quæ ab ANNO 1727 ad hanc uſque diem prodierunt.

Accedunt

LECTIONES MATHEMATICÆ DE CALCULO INTEGRALIUM,
In uſum Illuſtr. March. HOSPITALII conſcriptæ.



LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.

MDCCXLII.

Digitized by Google

Digitized by Google

N°. CXXXV.

DISCOURS
SUR LES LOIX
DE LA COMMUNICATION
DU MOUVEMENT,

Qui a mérité les Eloges de l'Académie Royale des Sciences, aux années 1724 & 1726, & qui a concouru à l'occaſion des Prix diſtribuez dans les dites années.

Par M. JEAN BERNOULLI, *Profeſſeur des Mathématiques à Baſle, & Membre des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Pruſſe.*

Imprimé
A PARIS,

MDCCXXVII.

Digitized by Google

LE LIBRAIRE AU LECTEUR.

COMME *l'Académie Royale des Sciences a parlé avantageuſement & avec éloge, de l'Ouvrage de Mr.* BERNOULLI, *dans l'Avertiſſement qu'Elle a mis à la tête de la Piece de Mr.* MAC-LAURIN, *& de celle du Pere* MAZIERE; *Mr.* BERNOULLI *n'a pas fait difficulté de conſentir que la ſienne fût publiée. Nous la publions donc aujourd'hui, & avec d'autant plus de confiance, que l'illuſtre Académie a paru elle-même ſouhaiter que cet Ouvrage vit le jour, & que les excellentes choſes qu'Elle y avoit remarquées, ne fuſſent pas perduës pour le Public. L'impreſſion a été faite d'après le Manuſcrit envoyé à cette Compagnie pour le Prix; & l'un des Juges nommez par Elle aux années* 1724 *&* 1725, *a bien voulu veiller à cette impreſſion. Nous ſommes perſuadez que le Lecteur y trouvera des Recherches nouvelles, curieuſes & inſtructives, & qu'il nous ſçaura gré de lui en avoir fait part.*

Digitized by Google

LETTRE

A

MESSIEURS DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES,

Servant de PREFACE au DISCOURS ſuivant

MESSIEURS,

L'*Auteur de ce Diſcours ſur la communication du Mouvement . a l'honneur de vous le preſenter ; il l'a compoſé à l'occaſion de la premiere des Queſtions qu'il vous a plû de propoſer aux Sçavans de l'Europe. Meſſieurs* HUGUENS, MARIOTTE, WREN, WALLIS, *& quelques autres habiles Mathematiciens, ont écrit ſolidement ſur cette matiere, & nous ont laiſſé des regles, ſuivant leſquelles les corps doivent ſe communiquer leur mouvement ; mais peu ſatisfait de tirer par une eſpece*

Digitized by Google

d'induction la regle generale des cas les plus ſimples, l'Auteur s'eſt preſcrit une méthode differente de la leur, & en même tems plus naturelle. Il remonte à la ſource, & embraſſant toute l'étenduë de ſon ſujet, c'eſt ſur les principes même de la Mechanique qu'il établit la regle generale, de laquelle il déduit enſuite, comme autant de Corollaires, les regles particulieres à chaque cas.

On n'a eu juſqu'ici qu'une idée aſſez confuſe de la force des corps en mouvement, à qui M. DE LEIBNITZ *a donné le nom de* Force vive. *L'Auteur s'eſt non-ſeulement attaché à mettre cette matiere dans ſon jour, & à faire ſentir en quoi conſiſte la difficulté élevée entre ce grand homme, & ceux d'un parti oppoſé; mais encore à prouver, par des démonſtrations directes & toutes nouvelles, une vérité que* M. DE LEIBNILZ *lui-même n'a jamais prouvée qu'indirectement; ſçavoir, que la force vive d'un corps n'eſt pas proportionelle à ſa ſimple viteſſe, comme on l'a crû communément, mais au quarré de ſa viteſſe: & il eſpere qu'après ce qu'il en dit ici, perſonne ne doutera plus de la vérité de cette propoſition. Auſſi non content de déterminer ce qui doit arriver à deux corps qui ſe choquent, ſoit directement, ſoit obliquement, l'Auteur détermine ce qui réſulte du choc d'un corps, qui en rencontre deux ou pluſieurs autres à la fois, ſelon differentes directions:* Probléme *ſi épineux que perſonne n'avoit encore entrepris de le réſoudre. Et comment en ſeroit-on venu à bout? puiſque ſa réſolution ſupoſe une connoiſſance exacte de la théorie des forces vives.*

Cette théorie ouvre un chemin facile à pluſieurs véritez importantes. Elle a fourni à l'Auteur une réſolution du Probléme *précédent, qui paroît avoir quelque choſe de ſingulier; la maniere de déterminer la perte actuelle des viteſſes dans un milieu réſiſtant; & un moyen aiſé de trouver le centre d'oſcillation dans les* Pendules *compoſées. Au reſte, c'eſt à vous,* MESSIEURS, *à juger ſi cet Ouvrage répond à l'attente de ſon Auteur. Plein d'eſtime & de conſideration pour vôtre illuſtre Corps; il le regarde comme un Tribunal ſans appel, au jugement duquel on défere d'autant plus volontiers, que toute l'Europe ſçait qu'un eſprit de diſcernement & d'équité regne dans vos ſçavantes Déciſions.*

L'Au-

Digitized by Google

L'Auteur oſeroit-il ſe flatter, MESSIEURS, *que vos ſuffrages lui ſeront favorables ? On ſe perſuade aiſement ce qui fait plaiſir ; quel que puiſſe être cependant le ſuccès de ſon entrepriſe, il fera toûjours infiniment plus de cas de l'honneur de vôtre approbation, que de la recompenſe qui y eſt attachée.*

S'il lui reſtoit encore quelque choſe à deſirer, ce ſeroit, MESSIEURS, *de pouvoir vous convaincre de la parfaite conſideration & du dévoüëment ſincere avec leſquels il a l'honneur d'être*,

MESSIEURS,

le 1. Nov. 1723.

Votre très-humble & très obéïſſant ſerviteur,

In magnis voluiſſe ſat eſt.

DISCOURS

Digitized by Google

DISCOURS
SUR
LES LOIX DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT,

Contenant la ſolution de la premiere Queſtion propoſée par Meſſieurs de l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1724.

CHAPITRE PREMIER.

De la dureté des Corps: Définition de la dureté ſelon les differentes idées qu'on peut en avoir.

1. L'ACADEMIE Royale des Sciences ayant propoſé deux Prix pour les années 1724 & 1726, qui ſeront diſtribuez à ceux qui, au jugement de cette celebre Compagnie, auront le mieux réüſſi à réſoudre deux Queſtions differentes, j'ai crû que ſon invitation s'adreſſant à toutes les Nations, il m'étoit permis d'eſſayer mes forces ſur un ſujet, où je ne courois d'autre riſque que celui d'employer

ployer en vain une partie de mon tems & de ma peine à compoſer ce Diſcours: ce que je dis ſeulement par raport à l'utilité qui pourroit m'en revenir; car quel qu'en ſoit d'ailleurs le ſuccès, j'aurai du moins la ſatisfaction d'avoir fait de nouvelles découvertes, auſquelles je n'aurois peut-être jamais penſé ſans cela.

2. Un prix de 2500 liv. eſt deſtiné à celui qui réſoudra la premiere Queſtion, conçuë en ces termes:

Quelles ſont les loix ſuivant leſquelles un corps parfaitement dur, mis en mouvement, en meut un autre de même nature, ſoit en repos, ſoit en mouvement, qu'il rencontre, ſoit dans le vuide, ſoit dans le plein.

3. Mais avant de m'engager dans la recherche de cette Queſtion, je commencerai par expliquer ce que j'entends par le mot de *dureté*. C'eſt le ſort des termes qui ſervent à exprimer le ſujet de quelque ſenſation, de ne nous donner qu'une idée vive & confuſe de l'objet qui la fait naître.

Eclairciſſons donc un mot équivoque par lui-même, & par les diverſes idées qu'on y a attachées; & après avoir défini ce que nous entendons par *dureté*, il ſera aiſé de nous former de ce mot une idée nette & préciſe.

Le Philoſophe & le Géometre ſoigneux de conſerver à leurs démonſtrations la clarté & l'évidence, doivent éviter avec ſoin toute maniere de parler ambiguë.

4. Le nom de *dureté* eſt un de ces termes qui ne ſignifient pas la même choſe, même chez les Philoſophes. Je ne m'amuſerai point ici à examiner les differentes idées qu'on y a attachées en divers tems; ce ſeroit m'écarter de mon ſujet. Je me contenterai d'indiquer, en peu de mots, l'idée que la plûpart des Philoſophes ſe ſont formés de la dureté. On croit communément qu'un corps eſt dur, lorſque ſes parties étant en repos les unes auprès des autres, leur liaiſon ne peut être interrompuë que par une force exterieure, & que cette dureté eſt d'autant plus parfaite, qu'il faut une plus grande force pour en ſéparer les parties. Selon cette idée, un corps ſeroit parfaite-

Digitized by Google

faitement dur, dans le ſens d'une perfection abſoluë, lorſque ſes parties ne pourroient être ſeparées par aucun effort fini, quelque grand qu'on le ſupoſât. Les partiſans des Atomes ont attribué une dureté de cette nature à leurs Corpuſcules Elementaires; idée qui paroît être la véritable, lorſque l'on ne conſidere les choſes que ſuperficiellement; mais qu'on s'aperçoit bien-tôt renfermer une contradiction manifeſte pour peu qu'on l'aprofondiſſe.

5. En effet, un pareil principe de dureté ne ſçauroit exiſter; c'eſt une chimere qui repugne à cette loy generale que la nature obſerve conſtamment dans toutes ſes operations; je parle de cet ordre immuable & perpetuel, établi depuis la création de l'Univers, qu'on peut apeller LOY DE CONTINUITE', en vertu de laquelle tout ce qui s'execute, s'execute par des degrez infiniment petits. Il ſemble que le bon ſens dicte, qu'aucun changement ne peut ſe faire par ſault; *Natura non operatur per ſaltum*; rien ne peut paſſer d'une extremité à l'autre, ſans paſſer par tous les degrez du milieu. Et quelle connexion concevroit-on entre deux extremitez opoſées, indépendamment de toute communication de ce qui eſt entre deux? Si la nature pouvoit paſſer d'un extrême à l'autre, par exemple, du repos au mouvement, du mouvement au repos, ou d'un mouvement en un ſens à un mouvement en ſens contraire, ſans paſſer par tous les mouvemens inſenſibles qui conduiſent de l'un à l'autre; il faudroit que le premier état fut détruit, ſans que la nature ſçût à quel nouvel état elle doit ſe déterminer; car enfin par quelle raiſon en choiſiroit-elle un par préference, & dont on ne pût demander pourquoi celui-ci plutôt que celui-là? puiſque n'y ayant aucune liaiſon néceſſaire entre ces deux états, point de paſſage du mouvement au repos, du repos au mouvement, ou d'un mouvement à un mouvement opoſé; aucune raiſon ne la détermineroit à produire une choſe plutôt que toute autre.

6. Je veux qu'on aperçoive dans la nature des effets ſi prompts, qu'on ne remarque aucun intervalle entre le commencement & la fin de leurs actions; s'enſuit-il delà qu'il n'y en ait aucun?

& tous ceux qui ſont convaincus que tous les genres de quantité ſont diviſibles à l'infini, auront-ils de là peine à diviſer la plus inſenſible durée en un nombre infini de petites parties, & à y placer tous les degrez poſſibles de viteſſe, depuis le repos juſqu'à un mouvement déterminé; par exemple, depuis le commencement d'un éclair, juſqu'à ſon entier évanoüiſſement.

7. Concluons donc que la dureté, priſe dans le ſens vulgaire, eſt abſolument impoſſible, & ne peut ſubſiſter avec la loy de continuité. Un peu de réflexion mettra cette vérité dans ſon jour. Supoſons que deux corps durs en ce ſens, & parfaitement égaux, ſe rencontrent directement avec des viteſſes égales, je dis qu'ils doivent, de toute neceſſité, ou s'arrêter tout court en ſe choquant, ou rebrouſſer chemin après s'être choquez: il impliqueroit que des corps durs ſe penetraſſent; mais ces corps ne ſçauroient s'arrêter tout court, ſans paſſer ſubitement du mouvement au repos, de l'être au non être, ce qui repugne à la loy de continuité; ni réflechir dans le ſecond cas, qu'ils ne changent tout d'un coup leurs viteſſes affirmatives en une viteſſe négative, ſans avoir parcouru auparavant toutes les diminutions ſucceſſives de la premiere viteſſe, juſqu'à ſa deſtruction totale, & de là, remonter par de pareilles augmentations, à une viteſſe en ſens contraire; ce qui eſt également opoſé à cette loy.

8. Et certes ces raiſons ſont telles, qu'il ne me paroît pas poſſible que la dureté, priſe dans le ſens que nous venons de refuter, puiſſe quadrer avec les loix fondamentales de la nature: auſſi rejettai-je les prétendus atômes parfaitement ſolides, que quelques Philoſophes ont admis: ce ſont des corpuſcules imaginaires, qui n'ont de réalité que dans l'opinion de leurs partiſans.

9. Mais après avoir détruit la fauſſe idée qu'on ſe forme ordinairement de la dureté, il eſt juſte de lui en ſubſtituer une nouvelle, propre à expliquer d'une maniere intelligible, les phénome-

Digitized by Google

nomenes que nous connoiſſons, & ſur-tout les loix de la communication du mouvement.

Pour cela, je conçois d'abord la matiere, entant que matiere, comme étant parfaitement fluide de ſa nature; enſorte qu'aucune de ſes particules, quelques petites qu'on les ſupoſe, n'ont aucune cohéſion néceſſaire entr'elles; mais telles cependant que ces mêmes parties ont pû s'amaſſer en de petites molecules élementaires, dont ſe ſont formez les corps ſenſibles de differentes qualitez, les uns liquides, les autres mous, & d'autres plus ou moins durs, ſelon les differens concours, les differentes figures, & les divers mouvemens de ces molécules élementaires, & des particules qui paſſant par leurs interſtices les tiennent, ou ſeparez comme dans les fluides, ou qui les comprimant plus ou moins fortement, forment des corps que le vulgaire, qui n'en juge que par les ſens, nomme *durs*, à proportion de la réſiſtance que les parties de ces corps opoſent à la force qui tend à les ſeparer.

10. Et qu'on ne me demande point une raiſon phyſique de la compreſſion de ces molécules élementaires, & de celle des corps durs & ſenſibles qu'ils compoſent. Mon but n'a point été de m'engager dans cette recherche; j'explique ſimplement ici ce que j'entens par le mot de *dureté*, & j'en donne une idée propre à rendre raiſon des proprietez connuës de la communication du mouvement, & à découvrir celles qui ne ſont point encore connuës, & que l'experience pourra verifier; & c'eſt auſſi tout ce que l'Academie exige de moi dans cette occaſion.

11. Cette compreſſion d'une matiere étrangére, qui environne les corps ſenſibles & leurs molécules élementaires, peut être ſi grande par la ſtructure particuliere de quelques-uns de ces corps, qu'il faut employer un degré de force très-violent, non-ſeulement pour en ſeparer entierement les parties, mais pour leur faire ſimplement changer de figure; tels ſont, par exemple, la plûpart des métaux, qui quoique très-difficiles à être diviſez, cedent pourtant au marteau, & s'aplatiſſent. Ces

ſortes de corps ſont durs, mais d'une dureté imparfaite; en ce qu'après avoir perdu leur premiere figure, ils ne reprennent pas celle qu'ils avoient avant d'avoir ſubi la force qui l'a changée.

12. Il eſt d'autres corps dont les particules ſont ſi adhérentes les unes aux autres, ſoit que cela vienne d'une compreſſion étrangére, ou de quelqu'autre cauſe, qu'outre la difficulté qu'on trouve à les briſer, ils recouvrent ſur le champ leur premiere ſituation, ſi quelque force extérieure les contraint de ſe plier, dès que la force qui les contraignoit ceſſe d'agir ſur eux. Ces corps comparez à ceux de la premiere ſorte, ont plus de dureté qu'eux.

13. Je n'entre point à preſent dans la cauſe phyſique de cette derniére eſpece de dureté; il me ſuffit de ſçavoir qu'il y a des corps capables de reſſort, ou doüez d'une vertu élaſtique. Je ne nie pourtant pas que cet effet ne puiſſe provenir de l'effort d'une matiere ſubtile, qui agiſſant ſur les pores rétrécis des corps élaſtiques, preſſe les parois de ces pores, & s'éforce de les remettre dans leur premier état.

14. Figurons-nous, par exemple, un ballon rempli d'un air condenſé. A ne conſiderer cet air qu'en lui-même, c'eſt ſans doute une matiere fluide; cependant dès qu'il eſt renfermé dans un ballon, il fait avec ce ballon un corps dur; parce qu'étant comprimé par une force exterieure, & ne pouvant échaper par aucun endroit, il réſiſte à cette force, & rend au ballon ſa premiere figure, dès que la force qui le comprimoit ceſſe d'agir. Augmentons à préſent la denſité de l'air renfermé dans ce ballon, juſqu'à un degré immenſe de réſiſtance, en ſorte qu'il faille une force extrême pour comprimer ce ballon: je ne vois pas, à en juger par les ſens, en quoi un pareil ballon differeroit des corps qu'on apelle durs.

15. Concevons enfin un nombre infini de petits ballons pleins d'un air extrêmement condenſé, renfermé ſous une envelope commune, & ſupoſons que chaque portion de cet amas, quelque petite qu'elle puiſſe être, eſt elle-même renfermée ſous ſa

propre envelope, nous aurons une idée de ce que j'apelle dureté dans les corps. Les petits ballons répondront aux molécules élementaires; & les envelopes, tant celles qui renferment une portion de cet amas, que la maſſe même, tiendront lieu, dans cet exemple, d'un fluide ambiant, qui par ſon activité preſſeroit & comprimeroit en tout ſens la maſſe entiere, & chacune de ſes plus petites particules. Donnons à preſent un degré immenſe d'élaſticité à l'air contenu dans ces petits ballons, & nous verrons que leur maſſe entiere, ni aucune portion de cette maſſe, ne pourra plus être comprimée ſenſiblement, par une force nouvelle finie, quelque grande qu'on la ſupoſe. Je dis ſenſiblement; car la réſiſtance élaſtique de l'air n'eſt jamais abſolument invincible, quand même elle ſeroit infinie. On retomberoit autrement dans le cas d'une dureté imaginaire; toute force qui agit ſur un reſſort, quelque fortement tendu qu'il ſoit, le bande davantage, & l'oblige de plier encore un peu, quand même la difference en ſeroit tout-à-fait imperceptible, & cette difference devient infiniment petite, lorſqu'un éffort fini agit ſur un reſſort d'une force infinie.

16. Un corps ſera donc dur, conformément à l'idée que nous venons de donner de la dureté, lorſque ſes parties ſenſibles changeant difficilement de ſituation, un reſſort très-prompt & très élaſtique rend leur premiere ſituation dans un tems inſenſible au parties de ce corps, qui ont été tant ſoit peu pliées par le choc d'un autre corps; cette élaſticité eſt parfaite, lorſque toutes les parties pliées reprennent leur premier état: elle eſt imparfaite, lorſque quelques-unes de ces parties n'y retournent plus. On peut donner le nom de roideur à l'élaſticité parfaite; cette roideur peut être finie, ou infinie, & elle eſt d'autant plus grande, qu'il faut un effort plus conſiderable pour comprimer ce corps à un degré donné; la roideur eſt infinie dans un corps, ou ce corps eſt infiniment roide, lorſqu'il faut une preſſion infinie pour comprimer ce corps à un degré fini, ou une preſſion finie pour le comprimer à un degré infiniment petit.

 17. Quoi-

17. Quoiqu'à proprement parler, il n'y ait point de corps dans la nature qui ſoient infiniment roides, il y en a pourtant un grand nombre, qui le ſont à un point, qu'une preſſion immenſe les comprime à peine ſenſiblement. Ainſi, par exemple, une boule d'acier ſuporte un poids de mille livres, ſans changer ſenſiblement de figure. Il eſt vrai, que ces mêmes corps cedent facilement lorſqu'on les réduit en plaques minces; & l'experience montre que rien n'eſt plus aiſé à plier qu'une lame d'acier. Mais auſſi on doit attribuer cette grande facilité à l'action du levier; chaque point d'un corps étendu en long tenant lieu d'hypomochlion, enſorte que le moment de la force appliquée aux extrêmitez de ce corps, eſt comme infini, par rapport à la réſiſtance des parties très proches de ce point.

18. J'entendrai donc toûjours, dans la ſuite de ce Diſcours, par corps durs, des corps roides; & quoiqu'il n'y ait point de corps parfaitement durs, puiſque leur dureté devroit conſiſter dans une roideur actuellement infinie; je ne laiſſerai pas de conſiderer comme tels ceux qui ont une roideur extrême, & d'autant plus que les corps parfaitement élaſtiques obſervent les mêmes loix dans la communication du mouvement, que ſi leur élaſticité étoit ou pouvoit être actuellement infinie; car ces loix dépendent uniquement de l'élaſticité parfaite, en vertu de laquelle les corps ſe redreſſent parfaitement, après un choc ſouffert; indépendamment de la promptitude avec laquelle ſe fait ce redreſſement, ou cette reſtitution à leur premier état.

19. Je ſupoſerai même d'abord des corps durs, dans le ſens vulgaire des Philoſophes, quelque répugnance qu'il y ait entre ce ſyſtême & la loi de continuité; auſquels au deffaut d'une élaſticité naturelle j'appliquerai par dehors des reſſorts artificiels, & cela ſeulement pour rendre plus intelligibles les démonſtrations des effets qui réſultent du choc des corps naturellement élaſtiques.

CHA-

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Comment le Mouvement ſe détruit & ſe reproduit par la force du reſſort. Egalité de l'action & de la réaction. Solution de quelques Problêmes.

HIPOTHESE.

1. *Tout corps mû dans le vuide continuera toûjours à ſe mouvoir avec la même viteſſe, & dans la même ligne droite qu'il a commencé à parcourir, à moins qu'il ne rencontre un obſtacle qui l'empêche ou le détourne.*

Cette propoſition eſt un de ces Axiomes reconnus de tout le monde, & qui par cela même n'ont aucun beſoin de preuve.

PROPOSITION.

2. *Un corps dur, pris dans l'une ou l'autre ſignification, rencontrant directement, avec une viteſſe déterminée, un reſſort d'une élaſticité parfaite, dont un bout eſt appuyé contre un plan inébranlable, ou contre un point fixe, ſera repouſſé ſelon la même direction & avec la même viteſſe.*

Cette propoſition eſt claire & ſa vérité ſaute aux yeux, pour peu d'attention qu'on faſſe à la nature de l'action & de la réaction, qui ſont toûjours égales entre elles; car dans le premier inſtant que le corps atteint le reſſort débandé, ce reſſort eſt contraint de ſe reſſerrer, & par là il acquiert un peu de force, au moyen de laquelle le reſſort reſiſte un peu au corps, & lui ôte par conſequent un peu de ſa viteſſe. Dans le ſecond inſtant, le corps comprimant encore un peu le reſſort, celui-ci reçoit un nouveau petit degré de force, & fait encore perdre au corps quelque peu de ſa viteſſe; & cela continuë ainſi par tous les degrez infiniment petits, juſqu'à ce que la viteſſe du corps étant éteinte, il ait communiqué toute ſa force au reſſort, par

par un nombre infini de diminutions élementaires ou infiniment petites. Mais dès que le corps eſt parvenu au repos; le reſſort commence à ſe débander, & à lui rendre ſucceſſivement, dans un ordre renverſé de temps, ces mêmes élemens de viteſſe qu'il lui avoit ôté; enſorte que la perte du dernier élement de viteſſe, ſera réparée dans le premier inſtant, celle du pénultiéme dans le ſecond inſtant, celle de l'antepénultieme dans le troiſieme, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que le reſſort étant entierement débandé, le corps aura regagné ſa premiere viteſſe, mais en un ſens contraire. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE I.

3. Je ne crois pas que cette Propoſition puiſſe ſe prouver autrement; c'eſt en quoi conſiſte l'égalité de l'action & de la réaction. Toute action ſe fait ſucceſſivement & par élémens, quelque petite que paroiſſe la durée de l'action entiere. Ainſi le choc de deux corps qui paroît commencer & finir dans le même inſtant, ne laiſſe pas d'être d'une durée, qui, à parler proprement, & en des termes de Géométrie, a ſes élemens, je veux dire un nombre infini de parties infiniment petites.

SCHOLIE II.

4. Rien n'oblige de ſupoſer un reſſort tout-à-fait lâche ou débandé avant le choc, on peut au contraire le ſupoſer déja bandé par un degré de force déterminé, & retenu par quelque arrêt, pourvû que la ſituation de cet arrêt ſoit telle, qu'elle laiſſe au reſſort la liberté d'être plus fortement bandé, & de retourner à ſon premier état ſans ſortir du degré de tenſion dans lequel cet arrêt le retient: ceci étant une fois admis, je ne vois pas pourquoi la démonſtration précedente ne pourroit pas s'apliquer également au cas ſuivant.

TAB. XLI. *Fig.* 1. 5. *ABMN*, eſt un cilindre creux fermé en *AB*, & ouvert en *MN*, dont la partie *ABDE* eſt remplie d'un air condenſé, qui faiſant effort pour ſe dilater, en eſt empêché par le dia-

diaphragme mobile *DE*, lequel preſſé par l'effort de l'air enfermé, ne peut ni ceder, ni ſe mouvoir vers l'ouverture *MN*, à cauſe de l'obſtacle *CC*, quoiqu'il puiſſe être repouſſé vers le fond *BA*: Supoſons à preſent une boule *G*, qui ſe mouvant dans la cavité du cilindre tende vers le diaphragme *DE*, avec une viteſſe donnée *GE*, je dis que la viteſſe de cette boule commencera à diminuer par degrez, dès qu'elle aura choqué le diaphragme *DE*, pendant que la denſité de l'air enfermé augmentera à proportion du mouvement de ce diaphragme vers *AB*, juſqu'à ce que ce diaphragme étant enfin parvenu à une certaine ſituation *de*, la viteſſe de la boule ſoit entierement anéantie. Mais il eſt évident que la boule *G* ſe trouvant dans un état de repos, l'air condenſé dans l'eſpace *ABde* reprendra le deſſus, & repouſſera le diaphragme & la boule vers *MN*, avec une acceleration tout-à-fait égale à la * retardation que cette boule a ſouffert, en s'enfonçant de *DE* en *de*, & que le diaphragme *de*, étant d'ailleurs retenu en *DE*, par l'obſtacle *CC*; la boule *G* doit le quitter en *DE*, & rebrouſſer chemin contre *MN*, avec ſa premiere viteſſe *EG*.

6. La maniere de déterminer par le calcul, la loi de la retardation de la boule *G*, lorſqu'elle commence à pénétrer dans l'eſpace *ABDE*, ou de ſon acceleration, lorſqu'ayant atteint le plan *de*, elle commence à rebrouſſer chemin, renferme deux cas, qu'il eſt à propos d'examiner à part: dans le premier, où l'on ſupoſe l'air extrêmement condenſé, ſon élaſticité peut être ſi grande, ou la viteſſe de la boule *G* ſi petite, que l'eſpace *De* qu'elle parcourt, n'eſt pas comparable, ou n'a aucune raiſon ſenſible à l'eſpace total *DA*: dans le ſecond cas, l'air *AD* n'eſt pas aſſez comprimé fortement, ou la boule *G* a une viteſſe trop grande, pour que l'eſpace *De* n'ait pas un raport ſenſible à la totalité de l'eſpace *DA*.

7. Dans le premier cas, la retardation & l'acceleration ſeront uniformes par rapport aux tems, ainſi qu'elle ſe remarque

 dans

* J'entends par retardation, l'effet que produit le retardement, conſideré comme cauſe.

Digitized by Google

dans les corps peſants, qui montent ou qui deſcendent perpendiculairement par l'action de leur peſanteur; car de même que la peſanteur, étant une fois conſtante & invariable, ajoute ou ôte au mobile un petit degré de viteſſe dans chaque inſtant; ainſi la réſiſtance de l'air enfermé dans l'eſpace *ABDE*, que la boule *G* doit vaincre en penetrant juſqu'en *de*, eſt invariable pendant tout le tems que cette boule parcourt l'eſpace *De*; car la partie *Ed* du cilindre *EB* ayant, par la ſuppoſition, une raiſon infiniment petite au cilindre entier *EB*, il eſt viſible que l'élaſticité de l'air réduit dans l'eſpace *eB*, ne peut pas être ſenſiblement plus grande qu'elle étoit avant ſa réduction, pendant qu'elle occupoit encore l'eſpace *EB*: concluons donc que la force de l'élaſticité réſiſte uniformement dans ce cas, & repouſſe la boule *G*, de même que la peſanteur reſiſte aux corps peſans, & les repouſſe quand il montent.

8. Dans le ſecond cas, la retardation de la boule *G* en s'approchant du fonds *AB*, ou ſon acceleration en s'en éloignant, n'eſt plus uniforme; parce que l'air étant plus compreſſé à meſure que la boule pouſſe le diaphragme vers le fond *AB*, il eſt évident que cet air acquiert plus de force pour retarder ou accelerer le mouvement de la boule quand il eſt plus condenſé que quand il l'eſt moins: on ne peut donc déterminer la loi de cette retardation, ou de cette acceleration, qu'on ne ſupoſe auparavant, ou qu'on ne connoiſſe la proportion qui regne entre les accroiſſemens de l'élaſticité de l'air & ſes denſitez. Des expériences ſouvent réïterées ont prouvé que l'élaſticité de l'air, lorſqu'on fait abſtraction de ſes autres qualitez, eſt ſenſiblement proportionnelle à ſa denſité, & que par conſéquent la force avec laquelle il reſiſte, quand la boule eſt en *DE*, eſt à la force dont il réſiſte, lorſque cette boule eſt en *de*, comme la denſité que l'air a lorſqu'il occupe l'eſpace *AD*, eſt à ſa denſité, lorſqu'il occupe l'eſpace *Ad*; ou, ce qui revient au même, ces efforts ſont en raiſon reciproque du cilindre *Ad* au cilindre *AD*, ou comme *Ae* eſt à *AE*: Prenant donc $AE = a$, & la variable $AF = x$, ce qui reſte de viteſſe

teſſe à la boule *G*, ou ce qu'elle en a acquis lorſqu'elle eſt parvenuë en *F*, ſoit en allant vers le fonds, ſoit en revenant, $= v$; la force ou la réſiſtance de l'air ſera $= 1 : x$, & par conſéquent, conformément à ce que j'enſeignerai au Chapitre 13, où on verra une méthode generale de déterminer les viteſſes des corps mûs contre des forces qui réſiſtent, l'élément de la viteſſe dv, ſera $= dx : xv$. Donc $v dv = dx : x$; donc $\frac{1}{2} vv = lx$, j'entends par lx le logarithme de x, & dans le cas où x devient $= a$, on aura $\frac{1}{2} vv = la$. Ainſi le quarré de la viteſſe au point *F* eſt au quarré de la viteſſe au point *E*, comme le logarithme de *AF* eſt au logarithme de *AE*, les viteſſes elles-mêmes ſont donc en raiſon ſous-doublée des logarithmes des intervalles qui ſont entre la boule *G* & le fond *AB*. Il faut remarquer que le point *e* étant le terme juſqu'où la boule peut avancer, & où ſa viteſſe ſe réduit à rien, la ligne *Ae* doit être priſe pour l'unité, afin que ſon logarithme ſoit $= 0$.

9. On n'a fait aucune attention, dans le calcul précédent, à la force de l'air exterieur, qui agit ſur le diaphragme *DE*; mais ſupoſons cette force, on déterminera les viteſſes par la même méthode. Il n'y aura pour cela qu'à retrancher de la force de l'air condenſé, celle avec laquelle l'air exterieur comprime la boule ou le diaphragme vers le fond *AB*, & conſiderer le reſte comme la force qui retarde ou accelere la viteſſe de la boule. En voici le calcul: Soit l'élaſticité de l'air contenu dans le cilindre *ABDE*, dont la longueur eſt *AE*, égale à l'élaſticité de l'air extérieur; le diaphragme *DE* ſera également preſſé par l'air du dehors & par celui du dedans; mais puiſque j'ai exprimé la force de l'air condenſé dans le cilindre dont la longueur eſt *AF*, par $1 : x$; la force de l'air contenu dans l'eſpace *ABDE*, égale à la force de l'air extérieur qui preſſe la boule vers *AB*, ſera $= 1 : a$, parce que ces deux forces ſont en raiſon réciproque de *AF* à *AE*: la force, qui retarde ou qui accelere, ſera donc exprimée par $1 : x - 1 : a = (a - x) : ax$ dont on tirera, par la méthode

précedente, $(a - x)\, dx : axv = dv$, ou $vdv = (a - x)\, dx : ax - dx : x - dx : a$, & par conſéquent $\frac{1}{2} vv = lx - x : a$; d'où je conclus que le quarré de la viteſſe dans chaque point F, eſt comme le logarithme de AF diminué d'une partie toûjours ſemblable de AF, & que le point e, dans lequel lx devient $= x : a$, eſt le terme où finit la viteſſe de la boule, & où recommence ſon mouvement en ſens contraire vers MN.

10. On auroit ici occaſion, ſi le ſujet le permettoit, de faire des réflexions ſur la juſte longueur qu'on doit donner aux pieces d'Artillerie, & aux canons de Mouſquets, afin qu'ils portent le boulet ou la balle le plus loin qu'il eſt poſſible; je me contenterai d'indiquer ce qu'il y a de plus facile à concevoir.

On prouve par expérience que la poudre à canon renferme dans ſes pores un air extrêmement comprimé, & dont la denſité, & par conſequent auſſi l'élaſticité, eſt plus de cent fois plus grande que la denſité & l'élaſticité de l'air commun; le feu, étant mis à la poudre, ouvre de toutes parts les petites cellules qui retenoient cet air, lequel ſortant rapidement s'unit en une maſſe, & ſe dilate avec une impétuoſité augmentée encore conſiderablement par la chaleur, qui, comme on le ſçait, contribuë beaucoup à l'effort que l'air fait pour ſe dilater: c'eſt de cette dilatation auſſi ſubite que violente, que dépendent ces prodigieux effets qu'on remarque dans la poudre enflammée. Appliquons ceci à un canon chargé; dès que la poudre a pris feu, l'air ſe dilate bruſquement, & le boulet qu'il pouſſe commence à ſe mouvoir avec une acceleration extrêmement précipitée, & qui ne finiroit même jamais, quelque longue que fut la piece, ſi l'air extérieur ne s'opoſoit au mouvement du boulet. Une piece ne ſçauroit donc être trop longue, ſi on n'avoit égard qu'à la dilatation de l'air intérieur, qui cherchant continuellement à s'étendre de plus en plus, accelereroit ſans ceſſe le mouvement du boulet. Mais comme l'air extérieur oppoſe auſſi de ſon côté une force égale & uniforme

forme au mouvement du boulet, qu'il s'efforce de repouſſer vers le fonds de la piece; il eſt viſible que contrebalançant une partie de la force de l'air intérieur, il la rend inutile; de ſorte que l'acceleration du boulet n'eſt cauſée que par l'excès de la force intérieure par deſſus celle de l'air extérieur: cette acceleration ceſſe même, & dégenere en un mouvement retardé, dès que l'air intérieur eſt parvenu à un degré de conſiſtance égal à celui de l'air extérieur. C'eſt dans ce moment que la viteſſe du boulet eſt la plus grande; & c'eſt auſſi juſques-là que la longueur de la piece devroit s'étendre, pour que le boulet ait au ſortir de l'ame la plus grande viteſſe poſſible.

11. Ce que nous venons de dire ſe confirme par l'équation précedente de la détermination de la viteſſe $(a-x)\,dx : axv = dv$; car par la methode *de maximis*, on doit ſupoſer la differentielle de la viteſſe $dv = zero$, & l'on aura $(a-x)\,dx : axv = 0$. ce qui donne $x = a$, & par conſéquent $1 : x = 1 : a$; d'où il paroît que l'élaſticité de l'air intérieur deſigné par $1 : x$ doit être égale à $1 : a$, qui deſigne l'élaſticité de l'air extérieur ou naturel. Supoſé donc que l'air contenu dans une charge de poudre au moment qu'il en ſort, & qu'il remplit l'eſpace que cette poudre occupoit auparavant, eſt cent fois plus denſe que l'air naturel; il s'enſuit que le canon devroit être pour le moins cent fois plus grand que cet eſpace-là, ſi on n'avoit égard à pluſieurs circonſtances particulieres, auſquelles on n'a point fait d'attention dans ce raiſonnement. Telles ſont, par exemple, le frottement du boulet; une partie de la poudre que la violence du coup porte hors du canon avant quelle ait pris feu; l'air même dilaté qui ſe diſſipe inutilement par la lumiere, & en s'échapant par l'évent entre l'ame de la piece, & l'épaiſſeur du boulet, &c. toutes raiſons qui diminuant conſidérablement l'effort de la poudre, empêchent qu'on ne donne aux canons la longueur exceſſive que leur aſſigne le calcul. Je n'entre point ici dans pluſieurs autres conſiderations, qui ne permettent pas de faire les pieces auſſi longues qu'elles

le devroient être, ſi on n'enviſageoit que la force avec laquelle la poudre] agit ſur le boulet.

12. Diſons un mot de l'arquebuſe à vent; il eſt aiſé de voir, par ce que je viens d'expliquer, que la longueur de ſon canon ſera la plus avantageuſe, meſurée depuis l'endroit où repoſe la balle juſqu'à ſon embouchure, ſi toute ſa capacité eſt à celle de l'eſpace dans lequel eſt renfermé l'air condenſé, comme le nombre de fois moins un que cet air eſt plus denſe que l'air naturel eſt à l'unité. Supoſant donc que la denſité de cet air renfermé ſoit dix fois plus grande que la denſité de l'air dans ſon état naturel, la plus grande compreſſion à laquelle l'art ait encore pû parvenir; le canon devra avoir neuf fois plus de capacité que l'eſpace qui contient l'air reſſerré par la pompe, afin que l'air condenſé ſe trouve, après ſa dilatation, de même denſité que l'air exterieur, & qu'ainſi la balle ait acquis ſa plus grande viteſſe.

13. L'extrême longueur qu'on donne ordinairement aux Sarbacannes, eſt une preuve de ce que nous venons d'avancer: perſonne n'ignore que ce ſont de longs tuyaux de bois, dont on ſe ſert à chaſſer, par la force du ſouffle, de petites balles de terre. La détermination de leur longueur dépend de la quantité d'air que celui qui s'en ſert peut ſouffler à la fois dans la Sarbacanne; ce qu'on peut déterminer avec aſſez de préciſion, de la maniere ſuivante: Prenez une veſſie aplatie & humectée, au bout de laquelle vous adapterez un petit tuyau, de même ouverture que la Sarbacanne; faites entrer dans cette veſſie, d'un coup de ſouffle violent, tout l'air que vous pourrez; & ſerrant enſuite le col de la veſſie, ramaſſez cet air au fond de la veſſie, ſans vous efforcer de le comprimer: ſoit enfin réduit le volume de cet air, égal en denſité à l'air extérieur, en un cilindre d'une baſe égale à l'orifice de la Sarbacanne; la longueur de ce cilindre déterminera celle de la Sarbacanne. Il faut toujours ſe ſouvenir que je ne fais ici aucune attention au frottement de la balle, ni aux autres inconveniens qui peuvent diminuer l'effet de l'air quand il ſe dilate.

CHAPI-

Digitized by Google

CHAPITRE III.

Ce que c'eſt que la viteſſe virtuelle. Principe de l'équilibre appliqué à la production du mouvement par l'entremiſe d'un reſſort entre deux corps en repos.

DEFINITION I.

1. J'Appelle *viteſſes virtuelles*, celles que deux ou pluſieurs forces miſes en équilibre acquierent, quand on leur imprime un petit mouvement; ou ſi ces forces ſont déja en mouvement. La *viteſſe virtuelle* eſt l'élement de viteſſe, que chaque corps gagne ou perd, d'une viteſſe déja acquiſe, dans un tems infiniment petit, ſuivant ſa direction.

DEFINITION II.

La *force vive* eſt celle qui réſide dans un corps, lorſqu'il eſt dans un mouvement uniforme; & la *force morte*, celle que reçoit un corps ſans mouvement, lorſqu'il eſt ſollicité & preſſé de ſe mouvoir, ou à ſe mouvoir plus ou moins vite, lorſque ce corps eſt déja en mouvement.

HYPOTHESE I.

2. *Deux agens ſont en équilibre, ou ont des momens égaux, lorſque leurs forces abſoluës ſont en raiſon reciproque de leurs viteſſes virtuelles; ſoit que les forces qui agiſſent l'une ſur l'autre ſoient en mouvement, ou en repos.*

C'eſt un principe ordinaire de Statique & Méchanique; que je ne m'arrêterai pas à démontrer: j'aime mieux l'employer à faire voir la maniere dont le mouvement ſe produit par la force d'une preſſion qui agit ſans interruption, & ſans autre oppoſition que celle qui vient de l'inertie du mobile.

3. Suppo-

Digitized by Google

TAB.XLI. *Fig.* 2. 3. Supoſons deux corps en repos *A* & *B*, entre leſquels eſt un reſſort bandé *C*, qui commençant à ſe débander, faſſe un effort égal de part & d'autre, pour éloigner l'un de l'autre les corps *A* & *B*; il eſt viſible que chacun de ces corps opoſera au mouvement du reſſort, par ſon inertie, une reſiſtance proportionnelle à ſa maſſe. Il faut donc, en vertu de l'hypotheſe priſe de la Méchanique, que les deux efforts opoſez du reſſort, étant égaux, la force de l'inertie qui eſt en *A*, ſoit à la force de l'inertie qui eſt en *B*, ou que la maſſe *A* ſoit à la maſſe *B*, en raiſon reciproque de ce que la viteſſe virtuelle du corps *B* eſt à la viteſſe virtuelle du corps *A*; & comme la choſe continuë toujours, pendant que le reſſort en ſe dilatant accelere la viteſſe de ces corps, il eſt clair que leurs accelerations ſont continuellement en raiſon reciproque des maſſes *A* & *B*, ce qui forme une raiſon conſtante; & par conſequent les viteſſes acquiſes de part & d'autre, dans le même tems, leſquelles ne ſont autre choſe que les ſommes des viteſſes virtuelles, produites ſucceſſivement par l'effort du reſſort, ſont auſſi dans la même raiſon; je veux dire que la viteſſe de *B* eſt à la viteſſe de *A* comme *A* à *B*; d'où il ſuit, que le reſſort *C* étant entierement debandé, ou retenu par quelque obſtacle qui l'empêche de ſe débander tout-à-fait, les deux corps *A* & *B* continueront à ſe mouvoir avec les dernieres viteſſes acquiſes par l'impreſſion ſucceſſive du reſſort.

COROLLAIRE I.

4. On voit que le commun centre de gravité *C* des deux corps *A* & *B*, reſte continuellement en repos; ſoit pendant que le reſſort eſt en action, ſoit après l'entiére ſeparation de ces corps d'avec le reſſort. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à diviſer en *C* la longueur du reſſort avant ſa détente, en ſorte que $AC: BC = B: A$; il eſt manifeſte, par ce qu'on a dit, que les corps *A* & *B* étant parvenus en un certain tems en *a* & *b*, après la détente du reſſort, on aura $Cb: Ca = A: B$; donc

Digitized by Google

donc le même point C ſera encore le centre commun de gravité des corps A & B, tranſportez en a & b.

COROLLAIRE II.

5. Soit, après l'entiere ſeparation des corps d'avec le reſſort, la viteſſe uniforme du mobile $A = a$, & la viteſſe du mobile $B = b$, on aura $A : B = b : a$, & par conſequent $aA = bB$; d'où il s'enſuit, que la quantité du mouvement, qui n'eſt autre choſe que le produit de la maſſe par la viteſſe, eſt égale de part & d'autre.

COROLLAIRE III.

6. Comme les parties du reſſort compriſes entre C & B, en ſe débandant, ſont employées uniquement à mouvoir le corps B; de même que toutes les parties du reſſort, compriſes entre C & A ſont auſſi uniquement employées à mouvoir le corps A; il faut que la force vive du corps B, qui eſt l'effet total de la partie CB du reſſort, ſoit à la force vive du corps A, qui eſt auſſi l'effet total de l'autre partie CA du reſſort, comme la longueur CB eſt à la longueur CA, ou (§. 3) comme la viteſſe du corps B eſt à la viteſſe du corps A; ainſi quoique les deux quantitez de mouvement de ces deux corps ſoient égales (§. 5), il ne s'enſuit nullement que les quantitez de leurs forces vives ſont auſſi égales; elles ſont au contraire entr'elles comme les produits de leurs maſſes par les quarrez de leurs viteſſes; ce que je prouve ainſi: Soit f la force vive du corps A, & F la force vive du corps B; on aura $f : F = a : b =$ (*Corol. preced.*) $a \times aA : b \times bB = aaA : bbB$, & partant en raiſon compoſée de A à B, & de aa à bb; mais cette vérité ſera demontrée plus au long dans la ſuite, où nous aurons occaſion d'examiner cette matiere à fond.

7. Supoſons a preſent que les deux corps parvenus en a & b, retournent, avec leurs viteſſes acquiſes, vers le reſſort deban-

dé ; il eſt aiſé de voir (*Chap.* 2, §. 2) qu'ils auront préciſement autant de force qu'il leur en faut pour bander le reſſort, & le remettre dans ſon premier état de compreſſion, pendant que le centre de gravité *C* demeurera immobile comme auparavant ; & que ſi le reſſort vient à ſe débander de nouveau, il repouſſera les corps *A* & *B*, de la même maniere qu'il l'a fait la premiere fois. D'où il paroît, que le reſſort employe préciſement autant de tems à ſe débander, qu'il lui en faut pour être rebandé par le choc des corps après leur retour. Car puiſque le centre *C* demeure immobile, il tient lieu d'un plan inébranlable, ou d'un point fixe, contre lequel s'apuyeroit d'un côté le reſſort *CA*, & de l'autre le reſſort *CB* ; ainſi qu'il en doit arriver aux corps *A* & *B*, par ráport à la viteſſe avec laquelle ils choquent les reſſorts, comme on l'a montré dans l'article allegué.

8. Il s'enſuit encore, que la viteſſe relative ou reſpective, avec laquelle les corps s'aprochent mutuellement avant que d'atteindre le reſſort, eſt égale à la viteſſe reſpective, avec laquelle ils s'éloignent l'un de l'autre après avoir quitté le reſſort.

9. Et puiſqu'il eſt arbitraire de donner tant ou ſi peu d'étenduë au reſſort *AB* qu'on le juge à propos ; on peut la ſupoſer ſi petite, que les corps *A* & *B* ſoient cenſez ſe toucher au point *C*, lorſque par leurs concours ils auront bandé le reſſort. Et s'il eſt indifferent de préferer une ſorte de reſſorts à toute autre ; il n'eſt pas moins permis de s'en paſſer tout-à-fait, & de ſubſtituer deux corps parfaitement élaſtiques aux corps *A* & *B*, qu'on avoit dépoüillez de leur élaſticité naturelle : par là on concevra aiſément, que l'effet, qui reſultera du choc de ces deux corps, doit être le même qu'auparavant ; puiſque les reſſorts propres de ces corps, qui, au tems du concours, ſe confondent en un reſſort commun, ſupléent au défaut d'un reſſort exterieur, d'où on conclura la vérité du Theorême ſuivant.

THEO-

THEOREME.

10. *Si deux corps parfaitement élaſtiques, d'une roideur finie ou infinie, ſe rencontrent directement, en ſe mouvant l'un contre l'autre, avec des viteſſes reciproquement proportionelles à leurs maſſes: Je dis 1°. qu'après le choc, chacun d'eux ſe mouvra en ſens contraire, avec ſa premiere viteſſe, & par conſequent auſſi avec ſa premiere quantité de mouvement. 2°. Que leur viteſſe reſpective ſera égale avant & après le choc. 3°. Et qu'enfin leur centre commun de gravité demeurera auſſi immobile après le choc, qu'il l'étoit avant que ces corps ſe choquaſſent.*

11. Les regles de la communication du mouvement ſont renfermées, comme tout autant de Corollaires, dans le Theoréme que nous venons d'établir d'une maniere nouvelle. Je prouverai ce que j'avance: qu'on me permette auparavant de propoſer l'hypotheſe ſuivante, que perſonne ne conteſte.

HIPOTHESE II.

12. *Si deux ou pluſieurs corps, qui ſe meuvent ſur un plan ou dans une eſpace quelconque, viennent à ſe rencontrer & à ſe heurter les uns contre les autres, de telle maniere qu'on voudra; les mouvemens qui réſulteront de leur choc, ſeront les mêmes entre eux, ſoit que le plan, ou l'eſpace dans lequel ſont ces corps, ſoit en repos, ſoit qu'il ſe meuve lui-même d'un mouvement uniforme, & ſuivant une même direction.*

Car la force du choc, ou de l'action des corps les uns ſur les autres, dépend uniquement de leurs viteſſes reſpectives; or il eſt viſible que les viteſſes reſpectives des corps ne changent pas, avant le choc, ſoit que le plan ou l'eſpace qui les contient ſoit ſans mouvement, ſoit qu'il ſe meuve uniformement ſuivant une direction donnée; les viteſſes reſpectives ſeront donc encor les mêmes après le choc.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

13. Il s'enſuit delà, que ſi ce plan ou cet eſpace étant en repos, de même que le commun centre de gravité des corps qui s'y meuvent, il ſurvient enſuite à ce-plan, ou à cet eſpace, un mouvement uniforme dans une direction donnée, le centre de gravité de ces corps ſe mouvra ſuivant la même direction, & avec la même viteſſe que le plan.

CHAPITRE IV.

Recherche de la Regle generale de la détermination du Mouvement.

PROBLEME.

1. S*Oient* A & B, *deux corps parfaitement roides, qui ſe meuvent du même côté ſur une ligne droite; que le corps* B *precede avec la viteſſe* b, *& que le corps* A *le ſuive avec une viteſſe* a, *plus grande que celle de* B, *enſorte qu'il le ratrape en quelque endroit de la ligne donnée. On demande quelles ſeront les viteſſes de ces deux corps après le choc ?*

2. Pour réſoudre ce Problème general, ſous lequel ſont compris tous les cas particuliers, il n'y a qu'à ſupoſer que le mouvement de ces deux corps ſe fait ſur un plan, lequel a lui-même un mouvement uniforme vers le côté opoſé, dont la viteſſe eſt égale à celle qu'a le commun centre de gravité des corps *A* & *B*. De cette maniere, ce centre n'aura point de viteſſe par raport aux objets qui ſont en repos hors de ce plan, & les corps *A* & *B* ſeront par ce même raport dans le cas du Theorème general (*Chap.* 3, §. 10); je veux dire que leurs maſſes ſeront en raiſon réciproque de leurs viteſſes. Chacun d'eux ſera donc repouſſé après le choc avec la même viteſſe qu'il avoit avant le choc: Voici une maniere aiſée de réſoudre ce Problème par le calcul.

3. Les

Digitized by Google

3. Les viteſſes a & b, vers le même côté ſur le plan, étant multipliées par les maſſes A & B, la ſomme des produits, diviſée par la ſomme des maſſes, donne, par le principe de la Méchanique, la viteſſe du centre commun de gravité ſur ce même plan. Cette viteſſe ſera donc $= (aA + bB) : (A + B)$. Supoſons à preſent que le plan ſe meuve en arriere avec cette viteſſe; il eſt clair que, par rapport aux objets en repos hors du plan, la viteſſe du corps A ſera $= a - (aA + bB) : (A + B) = (aB - bB) : (A + B)$ en avant, & la viteſſe du corps B ſera $= (aA + bB) : (A + B) - b = (aA - bA) : (A + B)$ en arriere, mais $\frac{aB - bB}{A + B} : \frac{aA - bA}{A + B} = B : A$. D'où il paroit que les viteſſes, avec leſquelles les corps ſe rencontrent directement en allant l'un contre l'autre, ſont en raiſon reciproque de leurs maſſes. Ils ſe ſépareront donc après le choc, par le Theorème (*Chap.* 3, §. 10), chacun avec ſa premiere viteſſe; ainſi le corps A, retournera en arriere avec la viteſſe $(aB - bB) : (A + B)$, & le corps B ira en avant, avec la viteſſe $(aA - bA) : (A + B)$. Remettons à preſent le plan dans ſon premier repos, ou, ce qui revient à la même choſe, rendons à chacun la commune viteſſe $(aA + bB) : (A + B)$ en avant, qu'on leur avoit ôtée par la ſupoſition, en imprimant la même viteſſe en arriere au plan; & alors le corps A aura après le choc une viteſſe $(aA + bB) : (A + B)$ en avant, plus une viteſſe $(aB - bB) : (A + B)$ en arriere; mais dans le langage des Algebriſtes, une viteſſe poſitive en arriere, eſt une viteſſe negative en avant. Donc la viteſſe en avant du corps A après le choc, ſera $(aA + bB) : (A + B) - (aB - bB) : (A + B) = (aA - aB + 2bB) : (A + B)$, & la viteſſe en avant du corps B, ſera $(aA + bB) : (A + B) + (aA - bA) : (A + B) = (2aA - bA + bB) : (A + B)$. *C. Q. F. T.*

SCHOLIE.

4. On doit remarquer trois cas differens qui peuvent arriver au corps *A* après le choc, car $(aA - aB + 2bB):(A + B)$ eſt affirmatif, negatif, ou égal à zero, ſelon que $aA + 2bB$ eſt ou $>$, ou $<$, ou $=$ à aB. Dans le premier cas, le corps *A* continuëra ſon chemin, dans le ſecond cas il reculera, & dans le troiſiéme il s'arrêtera.

5. Cette regle eſt generale, pour tous les corps qui vont du même ſens avant de ſe choquer; mais il eſt aiſé d'en tirer une autre, qui ſerve pour tous les corps qui ſe meuvent en ſens contraire avant leur choc. On n'a pour cela qu'à ſupoſer que *b*, ou la viteſſe en avant du corps *B* eſt negative; car pour peu que l'on ait l'eſprit algebrique, on conçoit aiſement, que ſe mouvoir negativement en avant, c'eſt ſe mouvoir poſitivement en arriere. Si l'on change donc, dans la formule precedente, les ſignes qui ſont devant la lettre *b*, il en reſultera une expreſſion pour les viteſſes qu'auront, après leur choc, les corps *A* & *B* qui ſe rencontrent directement avec des viteſſes opoſées *a* & *b*, on aura donc la viteſſe du corps $A = (aA - aB - 2bB):(A + B)$ & la viteſſe du corps $B = (2aA + bA - bB):(A + B)$, à les prendre toutes deux en avant, c'eſt-à-dire, ſelon la direction qu'avoit le corps *A* avant le choc: mais ſi l'une ou l'autre de ces formules, ou toutes les deux, ſont négatives, c'eſt une marque que l'une d'elles, ou toutes les deux, expriment une direction contraire à celle qu'avoit le corps *A* avant le choc.

COROLLAIRE I.

6. On a conclu du Theorème (*Chap.* 3, §. 10) & du Corol. (§. 13) que la viteſſe reſpective des deux corps *A* & *B* demeure la même avant & après leur choc, ſoit qu'ils ſe meuvent en un même ſens, ſoit qu'ils ſe meuvent en ſens contraire: nos deux formules generales confirment cette vérité; car

1°.

1°. ſi avant le choc leur mouvement tend du même côté, leur viteſſe reſpective eſt $a - b$, mais après qu'ils ſe ſont choquez, la viteſſe du corps B, comme la plus grande en avant, eſt $= (2aA - bA + bB) : (A + B)$, & la viteſſe du corps A, comme la plus petite en avant, eſt $= (aA - aB + 2bB) : (A + B)$; retranchant donc cette formule de la premiere, il reſtera auſſi $(aA + aB - bA - bB) : (A + B) = a - b$.

2°. Si, avant le choc, les corps A & B ont des viteſſes oppoſées, on aura $a + b$ pour leur viteſſe reſpective; or la difference de la formule $(aA - aB - 2bB) : (A + B)$ à la formule $(2aA + bA - bB) : (A + B)$, leſquelles expriment les viteſſes en avant des corps A & B, après leur choc, donne auſſi $(aA + aB + bA + bB) : (A + B) = a + b$.

COROLLAIRE II.

7. Le mouvement du centre commun de gravité des corps A & B, ne change par le choc, ni de direction, ni de viteſſe: On l'a fait voir, en ſupoſant un mouvement dans le plan ſur lequel ces deux corps ſe meuvent, & c'eſt auſſi ce que nos formules montrent clairement; car dans le cas où A & B ſe meuvent tous deux en avant, nous avons démontré (§. 3) que la viteſſe de leur commun centre de gravité eſt $= (aA + bB) : (A + B)$; or en multipliant les viteſſes après le choc par les maſſes, & en diviſant la ſomme des produits par la ſomme des maſſes, il vient $(aAA + aAB + bAB + bBB) : (AA + 2AB + BB) = (aA + bB) : (A + B)$; & dans le cas où A & B ſe meuvent en ſens contraire, leur commun centre de gravité, aura pour viteſſe $(aA - bB) : (A + B)$; mais les viteſſes après la réflexion, leſquelles ſont $(aA - aB - 2bB) : (A + B)$ & $(2aA + bA - bB) : (A + B)$, toutes deux en avant, étant multipliées par les maſſes, & enſuite la ſomme des produits, diviſée par la ſomme des maſſes, on aura $(aAA + aAB - bAB - bBB) : (AA + 2AB + BB) = (aA - bB) : (A + B)$.

DEFI-

DEFINITION.

8. J'apelle *quantité de direction*, le produit de la viteſſe du commun centre de gravité, par la ſomme des maſſes.

THEOREME.

9. *La quantité de direction demeure toujours la même, tant après qu'avant l'impulſion* :

Cette quantité étant toujours $\frac{aA \pm bB}{A+B} \times (A+B) = (aA \pm bB)$; le ſigne ſuperieur eſt affirmatif, deſignant le mouvement des corps en même ſens; & le ſigne inferieur eſt negatif, deſignant le mouvement en ſens contraire.

D'où il paroit que la quantité de mouvement ne ſe conſerve pas toujours, comme on ſe l'imagine communement. Et en effet, cette quantité ne ſe conſerve qu'en deux cas, 1°. lorſque les corps ſe meuvent du même côté, avant, & aprés leur choc; 2°. lorſque la quantité de la direction eſt nulle, ou que le commun centre de gravité eſt ſans mouvement; parce qu'alors les corps réflechiſſent chacun avec ſa premiere viteſſe.

10. Notre methode nous ayant conduit immediatement à la Régle generale; ce ſeroit perdre ſon tems que de l'appliquer à tous les cas particuliers, que les Auteurs ont été obligez de réſoudre pour y pouvoir parvenir, & d'autant plus que le moindre Géometre eſt en état de le faire : il n'y a qu'à ſubſtituer, dans nos formules generales, les valeurs ſelon les conditions du cas qu'on s'eſt propoſé; je me contenterai d'en donner quelques exemples.

11. Les deux corps A & B étant ſupoſez égaux, la viteſſe du premier $= a$, & celle du ſecond $= b$; on demande ce qui doit arriver après l'impulſion. Subſtituez par tout A à B, & vous verrez que la premiere formule $(aA - aB + 2bB) : (A+B)$ devient $= (aA - aA + 2bA) : (A+A) = 2bA : 2A = b$, & $(2aA - bA + bB) : (A+B) = (2aA - bA$

+

$+bA):(A+A) = 2aA:2A = a$. On trouvera de même que dans la ſeconde formule il vient $(aA - aB - 2bK):(A+B) = (aA - aA - 2bA):(A+A) = -2bA:2A = -b$; & $(2aA + bA - bB):(A+B) = (2aA + bA - bA):(A+A) = 2aA:2A = a$; en ſorte qu'il ſe fera toujours un échange de viteſſe, ſoit que les corps ſe meuvent en un même ſens, ou en ſens contraire; je veux dire qu'après la percuſſion, le corps *A* prendra la viteſſe du corps *B*, & le corps *B* celle du corps *A*, conformement aux regles que les Auteurs en ont donnez.

12. Les deux corps *A* & *B* ayant entr'eux une raiſon quelconque, & *B* étant ſupoſé en repos, on demande combien de viteſſe chacun de ces deux corps aura après l'impulſion? On trouve en prenant dans les formules $b = 0$, que la viteſſe du corps *A* ſera $= (aA - aB):(A+B)$ & celle du corps *B*, $= 2aA:(A+B)$.

13. Si ſupoſant *B* en repos, & *A* en mouvement avec une viteſſe donnée *c*, on ſupoſe enſuite *A* en repos, & *B* en mouvement, avec une viteſſe égale; & qu'on ſouhaite de connoître la raiſon de la viteſſe communiquée à *B*, dans la premiere ſupoſition, à la viteſſe communiquée à *A*, dans la ſeconde ſupoſition; on déterminera comme dans l'article précédent, la viteſſe de $B = 2cA:(A+B)$, & celle de $A = 2cB:(A+B)$; mais il eſt clair que $\frac{2cA}{A+B} : \frac{2cB}{A+B} = A:B$; donc ces viteſſes ſont en raiſon des maſſes, ce que M. HUGUENS a auſſi démontré, dans ſon Traité *De motu corporum ex percuſſione*, *Prop.* 10.

14. On remarquera ici en paſſant, que quelque grand que ſoit le corps en mouvement, & quelque petit que ſoit le corps en repos, la viteſſe, que celui-ci acquerrera par le choc, ſera toujours moindre que le double de la viteſſe avec laquelle il eſt frapé par le grand. Car il eſt viſible que $2cA:(A+B) < 2c$. Cependant ſi *A*, étoit infiniment, ou incomparablement plus grand que *B*, alors $2cA:(A+B)$ paſſeroit pour égal

à $2cA:(A+o)=2cA:A=2c$, c'eſt-à-dire, que la viteſſe que recevroit le corps *B* ſeroit actuellement double de celle que le corps *A* avoit avant le choc; ainſi $2c$ eſt le terme dont on aproche de plus en plus en augmentant à l'infini le corps *A*, ou en diminuant à l'infini le corps *B*.

15. Toutes les autres propoſitions, que M. HUGUENS a démontrées à ſa maniere dans le Traité dont nous venons de parler, ſe vérifient aiſément par nos formules generales. J'en excepte une faute, où il eſt tombé à la page derniere, lorſqu'il dit: *Si corpora centum ex ordine dentur in proportione dupla, incipiatque motus a maximo, invenitur ſubducta calculo ad præceptum regulæ Propoſitione nona tradita, ſed in compendium redacta, celeritas minimi ad celeritatem qua movebatur maximum proxime ea qua* 14760000000 *ad* 1. Car je trouve par le moyen des logarithmes, qui eſt aparemment le *Compendium* dont a parlé M. HUGUENS, qu'il falloit dire *proxime ea qua* 2338500000000 *ad* 1. De ſorte que la véritable viteſſe de ce corps eſt plus de 150 fois plus grande que celle que cet Auteur lui aſſigne.

16. Le cas où deux corps ſe rencontrent obliquement n'exige point de regle particuliere; il ſuffit pour cela d'admettre la compoſition de mouvement, que perſonne ne fait difficulté de recevoir à préſent. Si l'on ſouhaite donc de ſçavoir ce qui reſulte du choc de deux corps, qui concourent ſelon deux directions differentes, ou qui ſe frapent non centralement; on n'a qu'à décompoſer le mouvement de chacun de ces corps en deux autres mouvemens, dont l'un ait pour direction la tangente commune, tirée par le point où ces corps, conſiderez comme ſphériques, ſe rencontrent, & l'autre une direction perpendiculaire à la premiere: les perpendiculaires repréſenteront un concours direct compris dans la regle generale, pendant que les parallèles continuëront après le choc ſans aucun changement. On formera donc, autour de ces directions laterales, deux nouveaux parallèlogrammes; leurs diagonales donneront les déterminations, & les viteſſes des corps après le choc.

CHA-

Digitized by Google

CHAPITRE V.

De la force vive des corps qui ſont en mouvement.

1. JE me propoſe d'examiner dans ce Chapitre ce que la matiere du mouvement a de plus important; je parle de cette force des corps que M. DE LEIBNITS appelloit *vive*, pour la diſtinguer d'une autre force, à qui il avoit donné le nom de *force morte*; j'ai déja eu occaſion de définir au commencement de cet ouvrage (*Chap. III*) ce que j'entends par force vive, & par force morte, & de déterminer en paſſant la véritable meſure de la force vive; mon but eſt à préſent d'expliquer à fonds la nature & les proprietez de cette force, & je l'entreprends d'autant plus volontiers qu'un grand nombre de Philoſophes, très-éclairez d'ailleurs, confondent encore ces deux forces; & n'ont pû être tirez de leur erreur.

2. Nous avons vû, au Chapitre III, que la force morte conſiſtoit dans un ſimple effort, & cet effort eſt tel qu'il peut ſubſiſter, quoiqu'un obſtacle étranger l'empêche à tout moment de produire un mouvement local dans les corps ſur leſquels cet efforts ſe déploïe. Telle eſt par exemple la force de la peſanteur. Un corps peſant, ſoutenu par une table horizontale, fait un effort continuel pour deſcendre; & il deſcendroit effectivement, ſi la table ne lui opoſoit un obſtacle qui le retient; ainſi la peſanteur produit une force morte dans les corps, dont l'effet n'eſt que momentané. Chaque inſtant, la peſanteur imprime aux corps, ſur qui elle agit, un degré de viteſſe infiniment petit, lequel eſt auſſi-tôt abſorbé par la réſiſtance de l'obſtacle. Ces petits degrez de viteſſe périſſent en naiſſant, & renaiſſent en périſſant; & c'eſt dans cette réciprocation conſtante, dans ce retour de production & de deſtruction, en quoi conſiſte l'effort de la peſanteur, quand elle eſt retenuë par un obſtacle invincible, à qui nous avons donné le nom de for-

Digitized by Google

ce morte. Quant à l'obſtacle, il reçoit de cette preſſion, lorſqu'il réſiſte à l'effort de la peſanteur, une force toujours égale, & réciproque à celle avec laquelle cette même peſanteur agit ſur lui. La force morte a cela de particulier, qu'elle ne produit aucun effet qui dure plus long-tems qu'elle: dès que cette force ceſſe, tout ceſſe avec elle; & ſon effet ne ſurvit jamais à ſon action. Si le corps peſant, ſoutenu par la table, perdoit tout-à-coup ſa peſanteur, la table ceſſeroit dans le même inſtant d'être preſſée.

3. Il n'en eſt pas de même de la force vive; ſa nature eſt toute differente, elle ne peut ni naître, ni périr en un inſtant, comme la force morte; il faut plus ou moins de tems pour produire une force vive dans un corps qui n'en avoit pas; il faut auſſi du tems pour la détruire dans un corps qui en a. La force vive ſe produit ſucceſſivement dans un corps, lorſque ce que corps étant en repos, une preſſion quelconque appliquée à ce corps, lui imprime peu-à-peu, & par degrez, un mouvement local. On ſupoſe qu'aucun obſtacle ne l'empêche de ſe mouvoir. Ce mouvement s'acquiert par des degrez infiniment petits, & monte à une viteſſe finie & déterminée, qui demeure uniforme, dès que la cauſe qui a mis ce corps en mouvement ceſſe d'agir ſur lui: ainſi la force vive, produite dans un corps, en un tems fini, par une preſſion qu'aucun obſtacle n'a retenuë, eſt quelque choſe de réel; elle eſt équivalente à cette partie de la cauſe, qui s'eſt conſumée en la produiſant; puiſque toute cauſe éfficiente doit être égale à ſon effet pleinement exécuté.

4. Le corps qui reçoit cette force, n'étant retenu par aucun obſtacle, n'opoſe de réſiſtance à cette force que celle qui dépend de ſon inertie, toujours proportionnelle à ſa maſſe; deſorte que les petits degrez de mouvement, que la preſſion imprime ſucceſſivement à ce corps, s'y conſervent, & s'accumulent juſqu'à produire enfin un mouvement local. On pouroit comparer la force vive, effectuée par une preſſion continuelle qu'aucun obſtacle n'empêche, à une ſurface décrite par le mouvement

vement d'une ligne, ou à un ſolide décrit par le mouvement d'une ſurface; il n'y a donc pas plus de comparaiſon à faire entre la ſimple preſſion ou la force morte, & la force vive, qu'entre une ligne & une ſurface, qu'entre une ſurface & une ſolide: ce ſont des quantitez héterogénes, qui n'admettent point de comparaiſon.

5. Quelle que ſoit la cauſe d'une preſſion, qui par la durée de ſon action produit enfin du mouvement, ſi elle eſt d'une quantité déterminée, telle qu'un reſſort bandé, par exemple, qui par ſa détente employe ſa force à produire une viteſſe actuelle dans un corps qui n'en avoit point auparavant; je dis, & la choſe eſt évidente, qu'à meſure que ce corps reçoit de nouveaux degrez de force, la cauſe qui les produit en doit perdre tout autant, juſqu'à ce que toute la force du reſſort ſoit épuiſée & transferée au corps, dans lequel elle eſt comme ramaſſée par l'accumulation de tous les petits degrez qui y ont été produits ſucceſſivement. C'eſt cette force, entant qu'elle eſt dans le corps mis en mouvement par l'épuiſement de la preſſion du reſſort, qu'on doit apeller proprement *la force vive*; en vertu de laquelle le corps ſe tranſporte d'un lieu à un autre, avec une certaine viteſſe, plus ou moins grande ſelon l'énergie du reſſort.

6. On voit encore ici la grande difference qu'il y a entre la force vive, & la force morte. La ſeule preſſion, ou la force morte que reçoit un obſtacle immobile, par l'effort d'un reſſort qui cherche à ſe débander, ne diminuë en rien la force du reſſort, bien loin de l'épuiſer. L'air, par exemple, condenſé dans un recipient, fait un effort continuel pour ſe dilater, ſans jamais rien perdre de ſa force; parce que les parois du recipient, ne pouvant ceder, ne font que ſoutenir ſa preſſion, ſans affoiblir l'élaſticité de l'air: mais la force du reſſort ſe conſume, en donnant du mouvement à un corps, c'eſt-à-dire, en produiſant une force vive; la production du moindre degré de cette force demande la perte ou la deſtruction d'un degré égal de la force du reſſort: l'un eſt la cauſe, & l'au-

Digitized by Google

l'autre l'effet immediat qui en réſulte : or la cauſe ne ſçauroit perir, en tout ou en partie, qu'elle ne ſe retrouve dans l'effet à la production duquel elle a été employée.

7. Je conclus de là, que la force vive d'un corps, qui a été produite par le débandement de quelque reſſort, eſt capable de le rebander préciſement au même degré de force que ce reſſort avoit : & ſi on ſupoſe que cette force vive eſt employée toute entiere à bander deux, trois, ou pluſieurs réſſorts égaux entr'eux, mais plus foibles que le précédent ; je dis que ce premier reſſort peut produire un effet deux fois, trois fois ou pluſieurs fois plus grand qu'un de ces reſſorts foibles. L'égalité, qui regne entre l'effet & ſa cauſe efficiente, prouve ce que nous venons d'avancer.

8. C'eſt dans cette égalité, que conſiſte la conſervation des forces des corps qui ſont en mouvement ; puiſqu'il eſt viſible que la plus petite partie d'une cauſe poſitive ne ſçauroit ſe perdre, qu'elle ne reproduiſe ailleurs un effet, par lequel cette perte ſoit réparée.

9. Comme on a été long-tems dans la perſuaſion, que la quantité du mouvement, ou le produit de la maſſe d'un corps par ſa viteſſe, étoit la meſure de la force de ce corps ; on a crû fauſſement qu'il étoit néceſſaire qu'il y eut toujours une égale quantité de mouvement dans l'Univers.

10. L'origine de cette erreur, ainſi que je l'ai déja inſinué, vient de ce qu'on a confondu la nature des forces mortes, avec celle des forces vives : car voyant que le principe fondamental de la Statique exige que, dans l'équilibre des puiſſances, les momens ſoient en raiſon compoſée des forces abſolues, & de leurs viteſſes virtuelles ; on a étendu mal à propos ce principe plus loin qu'il ne falloit, en l'appliquant auſſi aux forces des corps qui ont des viteſſes actuelles.

11. Ce n'eſt que depuis trente ou quarante ans, que quelques perſonnes ſe ſont aperçûes que ces deux forces ſont d'une nature tout-à-fait differente, n'y ayant pas plus de raport entr'elles, qu'entre une ligne & une ſurface, ou qu'entre une ſurface

Digitized by Google

ſurface & un ſolide. M. DE LEIBNITZ eſt le premier, qui a remarqué que cette force n'étoit point égale au produit de la maſſe par la viteſſe, mais que ſa meſure étoit le produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe.

12. La nouveauté de ce ſentiment lui attira des adverſaires. M. DE LEIBNITZ le prouva par le parfait accord qu'il y avoit entre ſon ſentiment & la regle de GALILE'E, pour l'acceleration de la chûte des corps peſans; regle generalement aprouvée, & au moyen de laquelle M. DE LEIBNITZ fit voir qu'un poids avec deux degrez de viteſſe, peut monter quatre fois plus haut, qu'avec un degré de viteſſe; neuf fois plus haut, s'il a trois degrez de viteſſe; ſeize fois plus haut, s'il en a quatre; enfin il montra que les hauteurs, auſquelles les corps peſans ſont capables de s'élever, ſont toujours protionnelles aux quarrez de leurs viteſſes. Il prétendoit que la hauteur, à laquelle un poids peut monter, peut être priſe pour la meſure de la force de ce poids; il concluoit que la force vive d'un corps étoit proportionnelle à ſa maſſe multipliée par le quarré de ſa viteſſe.

13. Mais les adverſaires de M. DE LEIBNITZ, ne lui paſſerent pas ſon hypotheſe touchant les hauteurs qu'il prétendoit être la meſure des forces. Ils formerent des inſtances, & ſoûtinrent, entr'autres choſes, qu'on ne devoit point négliger le tems que le poids employe à parcourir la hauteur à laquelle il monte. Qu'un poids, par exemple, qui avec une viteſſe double s'éleve à une hauteur quadruple, ne doit être cenſé avoir qu'une force double, parce qu'il employe un tems double à monter: ces Meſſieurs crurent être fondez à ſoutenir que dans l'eſtimation des forces, il falloit avoir égard, non-ſeulement aux hauteurs, mais auſſi aux tems; perſuadez que la force des corps étoit en raiſon compoſée de la raiſon directe de la hauteur, & de la raiſon inverſe du tems: ils ne reflechiſſoient pas que la conſideration du tems n'étoit d'aucune conſéquence dans le ſujet de leur diſpute, puiſqu'il étoit facile de faire monter le corps peſant à differentes hauteurs en des

tems

Digitized by Google

tems égaux ; on n'a pour cela qu'à ſe ſervir d'une cycloïde renverſée, dont on ſçait que tous les arcs, à commencer depuis le point le plus bas, ſont *Iſochrones*, ou parcourus en des tems égaux.

14. M. DE LEIBNITZ répondit à ces objections ; mais il ne gagna rien ſur des eſprits prévenus en faveur du ſentiment commun & erroné, que la force des corps en mouvement étoit égale à la quantité de leur mouvement, c'eſt-à-dire, en raiſon des produits de leurs maſſes, par leurs ſimples viteſſes. Ce fut en vain, qu'il fit voir à ſes adverſaires, que ſi l'opinion qu'ils ſoutenoient avoit lieu ; on pourroit exécuter un mouvement perpétuel purement méchanique ; ce qui, ſelon M. DE LEIBNITZ, étoit abſolument impoſſible ; ces adverſaires aimerent mieux admettre la poſſibilité d'un mouvement perpétuel artificiel, que d'abandonner une opinion reçue depuis longtems, pour en embraſſer une nouvelle, qu'ils regardoient comme une eſpèce d'héréſie en matiere de Phyſique.

15. Peu de tems avant la mort de M. DE LEIBNITZ, ſon ſentiment fut entierement rejetté en Angleterre, & traité même avec mépris. On s'atacha dans un Recueil de Lettres de M. CLARCKE & de M. DE LEIBNITZ, imprimées deux fois de ſuite avec des notes ; on s'atacha, dis-je, à tourner en ridicule le ſentiment de ce grand homme ſur l'eſtime de la force vive ; non ſans une ſurpriſe extrême de la part de ceux qui reconnoiſſent la vérité de ce ſentiment.

16. Il eſt vrai que le nombre en eſt encore fort petit dans le reſte de l'Europe : j'ai peut-être été le premier, depuis environ vingt-huit ans : ce n'eſt pas que les preuves de M. DE LEIBNITZ m'ayent paruës aſſez fortes pour me déterminer à embraſſer ſon ſentiment ; car j'avouë qu'étant indirectes, & nullement tirées du fond de la matiere dont il s'agiſſoit, elles ne purent me convaincre : mais elles me donnerent occaſion d'y penſer ; & ce n'eſt qu'après une longue & ſérieuſe méditation, que je trouvai enfin le moyen de me convaincre moi-même, par des démonſtrations directes, & au-deſſus de toute exception.

Digitized by Google

tion. M. DE LEIBNITZ, à qui je les communiquai, m'en ſçut bon gré; auſſi ſervirent-elles à lui attirer des ſectateurs, & à ramener à ſon ſentiment quelques-uns de ceux qui auparavant ſe trouvoient engagez dans une longue diſpute avec lui, n'ayant pas été pleinement convaincus par ſes raiſonnemens.

17. A mon égard, j'embraſſe avec plaiſir l'occaſion de faire part de mes découvertes aux illuſtres Membres de l'Academie Royale des Sciences, & me fais un honneur de ſoumettre mes lumieres à leur jugement: ce ſont des Juges également éclairez & penetrans, incapables de partialitez & de prévention, & dont l'équité ſeule regle les déciſions; je me flatte qu'il voudront bien prendre la peine d'examiner avec ſoin ce que j'ai l'honneur de leur propoſer ſur la veritable maniere d'eſtimer la quantité de la force des corps en mouvement. Cette queſtion eſt épineuſe, & elle demande une attention d'autant plus ſuivie, que des Philoſophes même, & des Mathematiciens d'un grand nom, s'y ſont mépris. Si ce diſcours a le bonheur de plaire à mes Juges, j'y ajoûterai pluſieurs remarques utiles, que la brieveté du tems ne m'a pas permis de communiquer ici; la matiere eſt abondante & riche; elle meriteroit qu'on en fit un Traité complet. Voici en attendant ce que ce ſujet renferme de plus eſſentiel.

CHAPITRE VI.

En quoi conſiſte la meſure des forces vives. Maniere de les comparer enſemble.

1. JE continuerai à me ſervir de reſſorts, comme du moyen le plus commode pour expliquer mes penſées ſur la production & la force du mouvement. Supoſons, pour fixer l'imagination, un reſſort d'une figure déterminée *ACB*, dont les deux branches égales *CA* & *CB*, forment un angle *ACB*: il eſt clair, que lorſque ce reſſort eſt bandé, les branches *CA* & TAB. XLI. Fig. 3.

 CB

CB font un effort continuel pour s'écarter l'une de l'autre, ou pour élargir l'ouverture *ACB*; en ſorte que ſi l'une des forces qui retiennent ce reſſort dans un état de contrainte, ou qui compriment la jambe *CA* vers *B*, & la jambe *CB* vers *A*, venoit à manquer ſubitement, les jambes de ce reſſort s'ouvriroient d'elles-mêmes ſur le champ, juſqu'à ce que ce reſſort eut entierement perdu la force de ſe dilater davantage. Fixons cet état à 90 degrez, le reſſort *ACB* ſera donc entierement dilaté, lorſque d'un angle de 30 degrez, que formoient ſes jambes dans un état de contrainte, il ſera parvenu à un angle droit *acb*. Je ne ſçai ſi je dois avertir, que faiſant abſtraction de la matiere du reſſort, de ſa peſanteur, & de tout autre qualité, je ne conſidere ici que la figure déterminée de ce reſſort, & ſa parfaite élaſticité, en vertu de laquelle il ſe dilateroit avec une promptitude infinie, ſi aucun obſtacle étranger ne s'opoſoit à ſa dilatation.

TAB. XLI. *Fig.* 4. 2. Imaginons deux de ces reſſorts, égaux en tout, & également bandez, par exemple, à un angle de 30 degrez: que le reſſort *DEF*, s'apuie en *D* contre un plan immobile *mn*, & du côté *F* contre une réſiſtance active *P*, qui aye préciſément autant de force qu'il lui en faut pour empêcher que ce reſſort ne ſe dilate, mais que le reſſort *LMN* ſoit arrêté de part & d'autre par les réſiſtances actives *R* & *S*, leſquelles ayent auſſi les forces neceſſaires pour empêcher que ce reſſort ne ſe dilate. Je ſupoſe de plus, & la choſe me paroît aſſez évidente pour n'avoir pas beſoin de démonſtration, que la réſiſtance *P* eſt autant preſſée par l'effort du reſſort *DEF*, que chacune des deux autres réſiſtances *R* & *S* l'eſt par l'effort du reſſort *LMN*; car la réſiſtance paſſive du plan immobile *mn* reflüe ſur *P* avec autant de force, que la réſiſtance active *R* reflüe ſur celle qui lui eſt opoſée en *S*, & réciproquement. C'eſt une conſequence neceſſaire de l'égalité parfaite qu'il y a toujours entre l'action & la réaction.

TAB. XLI. *Fig.* 5. 3. De là il s'enſuit, que s'il y a une ſuite de pluſieurs reſſorts égaux, & également bandez *ACB*, *BED*, *DGF*, *FIH*,

ran-

rangez en ordre l'un à côté de l'autre, dont le premier *ACB* ſoit appuyé contre un plan immobile *mn*, le ſecond *BED* contre le premier *ACB*, le troiſiéme contre le ſecond, & ainſi juſqu'au dernier; la puiſſance *L*, qui leur réſiſte & les empêche de ſe débander, eſt égale à la puiſſance *P*, qui reſiſte à un ſeul de ces reſſorts auſſi bandé que chacun des autres, & appuyé en *A* contre le plan inébranlable *mn*: car, par l'article precedent, le premier reſſort *ACB* ne preſſe le ſecond reſſort *BED*, & n'en eſt réciproquement preſſé, que de la même maniere qu'il le ſeroit, ſi ôtant le premier reſſort, on ſubſtituoit à ſa place un plan immobile contre lequel le ſecond reſſort appuyeroit en *B*. Par la même raiſon, le ſecond reſſort, conſideré ici comme le premier, preſſera le troiſiéme reſſort *DGF*, & en ſera réciproquement preſſé, comme ſi celui-ci étoit effectivement à la place du ſecond reſſort, & ainſi de tous les autres, juſqu'au dernier reſſort *FIH*. Il eſt donc manifeſte, que le dernier reſſort *FIH* agit contre la réſiſtance *L*, de la même maniere que s'il étoit immediatement appuyé contre le point fixe *F*, ou ce qui revient à la même choſe, la puiſſance *L*, qui réſiſte à un nombre de reſſorts égaux & également tendus, rangez en ligne droite, dont le premier eſt arrêté par un plan immobile *mn*, ou retenu contre un point fixe *A*, eſt égale à la puiſſance *P*, qui réſiſte à un ſeul de ces reſſorts tendu de même, & apuyé contre un point fixe *A*. C. *Q. F. D.*

COROLLAIRE.

4. S'il y a pluſieurs rangs compoſez d'un nombre different de reſſorts égaux & également bandez, & que chacun de ces rangs ſoit apuyé d'une part contre un point fixe, & que de l'autre il ſoit retenu par une puiſſance qui l'empêche de ſe débander; il eſt clair que ces puiſſances ſeront égales entr'elles; chacune d'elles étant égale à la puiſſance qui peut retenir bandé un ſeul de ces reſſorts.

5. Concevons à preſent deux rangs de reſſorts égaux & éga-

Tab. XLI. *Fig.* 6. ſement bandez, compoſez l'un de douze reſſorts, & l'autre de trois; dont une des extremitez ſoit apuyée contre les points fixes *A* & *B*, & l'autre arrêté par les boules *L* & *P*, que des puiſſances *R* & *S* empêchent de ſe mouvoir; il eſt viſible, par le Corollaire précedent, que les deux boules *L* & *P*, ſeront également preſſées par l'effort que ſont les reſſorts pour ſe débander; & que par conſequent les forces mortes de ces boules, qui ne ſont autre choſe que ces preſſions mêmes, ſeront auſſi égales.

6. Voyons maintenant ce que ces preſſions, miſes en œuvres, peuvent produire de force vive. Pour cet effet, imaginons-nous que les puiſſances *R* & *S*, ſe retirent ſubitement: il eſt conſtant que les boules *L* & *P* n'opoſant à l'effort des reſſorts que la réſiſtance qui provient de leurs inerties, ces boules ſeront obligées de céder, & que dans le mouvement acceleré, que leur imprimeront les reſſorts, la boule *L* acquerera plus de viteſſe par les efforts continuez de douze reſſorts, que la boule *P* égale à la boule *L* n'en peut acquerir par les efforts continuez de trois reſſorts; car ſupoſé que le point *E* fut fixement arrêté, les trois derniers reſſorts 10, 11, 12 produiront ſeuls autant d'acceleration dans la boule *L*, que les trois reſſorts 1, 2, 3 dans la boule *P*; mais il eſt viſible que le point *E* n'étant pas fixe, les trois derniers reſſorts 10, 11, 12 ne ſçauroient ſe relâcher en ſuivant la boule *L*, que les neuf premiers ne ſe relâchent auſſi, & ne pouſſent, chemin faiſant, le point *E*; d'où il s'enſuit que les trois reſſorts qui les précedent cauſeront à la boule *L* une acceleration plus grande, que les trois reſſorts 1, 2, 3 ne la peuvent cauſer à la boule *P*.

7. Il n'eſt donc pas moins clair que la boule *L* aura acquis une plus grande viteſſe que la boule *P*, ſoit que tous les reſſorts qui compoſent ces deux rangs ſe ſoient entierement débandez, ſoit que retenus par un obſtacle qui les arrête ils ne ſe ſoient débandez qu'en partie, & d'une maniere uniforme, en s'ouvrant, par exemple, de telle ſorte, que d'un angle de

30

30 degrez que ces reſſorts formoient auparavant, ils parviennent à en former un de 60 degrez.

8. Ceci étant une fois admis, peut-on douter que de deux corps égaux, celui qui a le plus de viteſſe, n'ait auſſi le plus de force? Cependant nous venons de voir que les preſſions, ou forces mortes, que les boules *L* & *P* en repos reçoivent des reſſorts, avant que ces reſſorts ſe dilatent, ſont égales; & que ces mêmes boules, miſes en mouvement par les mêmes reſſorts, ont des viteſſes inégales; d'où l'on pourroit déja inferer, qu'il faut que ces forces ſoient d'une nature differente, & que par conſequent on a eu tort de les confondre, & de ſoûtenir, que puiſque le moment ou l'énergie des forces mortes eſt en raiſon des produits des maſſes par leurs viteſſes virtuelles, les forces vives doivent auſſi être proportionnelles aux produits des maſſes par leurs viteſſes actuelles.

9. Il ne ſuffit pas d'avoir prouvé, que la force vive de la boule *L* doit être plus grande que celle de la boule *P*; un peu d'attention ſera voir, que la boule *L* a préciſément quatre fois autant de force vive que la boule *P*, en quelque raiſon que ſoient leurs maſſes. Car dès que les puiſſances réſiſtantes *R* & *S* ſont ôtées, les preſſions des reſſorts, qui étoient contrebalancées par ces puiſſances, ſe tournent ſur le champ vers les boules *L* & *P*, & celles-ci commencent à ceder; ainſi chaque reſſort ſe débandant, chacun faiſant uſage de ſa force, & rien ne périſſant inutilement; il faut de toute néceſſité que la force de chacun de ces reſſorts ſoit employée à produire ſon effet: & à quel effet ſeroit-elle employée, ſinon à mouvoir les boules? Le mouvement de chaque boule ſera donc tel, que ſa force vive ſera préciſement égale à l'effet complet & total de ce que tous les reſſorts pris enſemble y auront contribué: or chacun de ces reſſorts ſe dilatant également, par exemple, de 30 à 60 degrez, chacun d'eux contribuë également à produire cette force: donc les forces vives, produites dans les boules *L* & *P*, ſeront comme le

Digitized by Google

nombre des reſſorts qui ont contribué à leur production ; ſçavoir comme 12 à 3, ou comme 4 à 1. *C. Q. F. D.*

CHAPITRE VII.

Où l'on démontre que les forces vives des corps, ſont en raiſon compoſée de leurs maſſes, & des quarrez de leurs viteſſes.

1. QUant aux viteſſes acquiſes des boules, que je ſupoſe preſentement égales en maſſes ; je dis que ces viteſſes ne ſont point entr'elles comme le nombre des reſſorts qui les ont produites, mais comme les racines quarrées de ces nombres, ſçavoir, dans cet exemple, comme $\sqrt{12}$ à $\sqrt{3}$, comme $\sqrt{4}$ à $\sqrt{1}$, ou enfin comme 2 à 1. En voici la démonſtration.

TAB. XLI. Fig. 7. Je ſupoſe deux lignes droites quelconques données *AC*, *BD*, que je prends pour deux rangs de petits reſſorts égaux & également bandez : je ſupoſe de plus, que deux boules égales commencent à ſe mouvoir des points *C* & *D*, vers *F* & *I*, lorſque les reſſorts commencent à ſe dilater : Soient *CML*, *DNK* deux lignes courbes, dont les appliquées *GM*, *HN* expriment les viteſſes acquiſes aux point *G* & *H*: Je nomme $BD = a$, l'abſciſſe $DH = x$, ſa differentielle *HP*, ou $NT, = dx$, l'apliquée $HN = v$, ſa differentielle $TO = dv$: Je prends enſuite les abſciſſes *CG*, *CE* de la courbe *CLM*, telles qu'elles ſoient aux abſciſſes de la courbe *DNK*, comme *AC* eſt à *BD*, ou, ce qui eſt la même choſe, je fais $BD : AC = DH : CG = DP : CE$: Supoſant donc $AC = na$, on aura $CG = nx$, $GE = ndx$; ſoit enfin l'apliquée $GM = z$. Tout ceci ſupoſé, je raiſonne ainſi.

2. Les boules étant parvenuës aux points *G* & *H*, chaque reſſort, tant de ceux qui étoient reſſerrez dans l'intervalle *AC*, que de ceux qui l'étoient dans l'intervalle *BD*, ſera dilaté éga-

également, parce que $AC : CG = BD : DH$; chacun de ces reſſorts aura donc perdu, de part & d'autre, une partie égale de ſon élaſticité, & il leur en reſtera par conſéquent à chacun également. Donc (*Ch.* 6, §. 3 & 4) les preſſions & les forces mortes, que les boules en reçoivent, ſont auſſi égales entr'elles: je nomme cette preſſion p. Or l'accroiſſement élementaire de la viteſſe en H, je veux dire la differentielle TO, ou dv, eſt, par la loi connuë de l'acceleration, en raiſon compoſée de la force motrice, ou de la preſſion p, & du petit tems que le mobile met à parcourir la differentielle HP, ou dx, lequel tems s'exprime par $HP : HN = dx : v$; On aura donc $dv = pdx : v$, & partant $vdv = pdx$, ce qui donne par l'intégration $\frac{1}{2} vv = \int pdx$. Par la même raiſon on a $dz = p \times GE : GM = p \times ndx : z$, par conſéquent $zdz = npdx$; & en intégrant $\frac{1}{2} zz = n\int pdx$, d'où il ſuit que $vv : zz = \int pdx : n\int pdx : = 1 : n = a : na = BD : AC$. Or BD eſt à AC, comme la force vive acquiſe en H eſt à la force vive acquiſe en G (*Chap.* 6, §. 9). Donc ces deux forces ſont entr'elles comme vv à zz; ainſi les forces vives des corps égaux en maſſes ſont comme les quarrez de leurs viteſſes, & les viteſſes elles-mêmes ſont en raiſon ſous-doublée, ou comme les racines quarrées des forces vives. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

3. Si les corps ſont inégaux en maſſes, il eſt clair que leurs forces vives ſont comme les produits des maſſes par les quarrez des viteſſes.

COROLLAIRE II.

4. Si on ſupoſe les droites AC, BD infiniment longues, par raport aux eſpaces parcourus CG, DH; la preſſion p ſera égale & uniforme dans toute l'étenduë du chemin que le mobile

-bile a à parcourir : en effet, les reſſorts *AC* & *BD* s'étant dilatez juſqu'en *G* & *H*, & les dilatations *CG*, *DH* étant infiniment peu conſiderables, par raport à l'étenduë *AC* & *BD*, que ces reſſorts occupoient auparavant ; il eſt évident, que chaque reſſort ne perd par ſa dilatation, qu'une partie infiniment petite de ſon effort ; & que par conſequent les preſſions p, que les boules reçoivent par ces efforts, ſeront égales & uniformes dans tous les points des lignes *CG* & *DH*.

Corollaire III.

5. Dans cette ſupoſition où p devient conſtante, $\int p\,dx$ ſera px, & partant $\frac{1}{2}vv = px$, & $\frac{1}{2}zz = npx$; d'où il paroit que les courbes des viteſſes *CML*, *DNK* ſeront des paraboles d'un même parametre, exprimé par $2p$; car le parametre en *C* eſt $MG^2 : CG = 2npx : nx = 2p$, & le parametre en *D* eſt $NH^2 : DH = 2px : x = 2p$.

Corollaire IV.

6. Ainſi l'acceleration des boules ſuit, dans ce cas, la même loi que celle des corps peſans qui tombent, puiſque les quarrez des viteſſes acquiſes ſont auſſi comme les hauteurs parcouruës par les corps peſans en tombant ; & comme la peſanteur eſt conſtante de quelque hauteur qu'un corps tombe, de même la preſſion des boules eſt uniforme dans toute la longueur de leur chemin.

Corollaire V.

7. On peut donc conſiderer la chûte & l'acceleration d'un poids, comme étant cauſée par l'effort d'une matiere élaſtique, qui étenduë verticalement à l'infini, preſſeroit les corps de haut en bas, & les feroit deſcendre ſelon la loy connuë de l'acceleration. Il ſera donc auſſi permis d'apliquer aux forces vives de deux poids égaux, qui tombent de deux hauteurs differentes,

tes; ce qui a été prouvé des forces vives à l'égard de deux boules; ſçavoir qu'elles ſont en raiſon de AC à BD, ou en raiſon des eſpaces parcourus, puiſque $AC : BD = CG : DH$; ce qui fait voir que les hauteurs differentes qu'un même poids, ou que deux poids égaux, parcourent en tombant, ſont proportionnelles à leurs forces vives acquiſes.

8. Cette démonſtration juſtifie la maniere dont M. DE LEIBNITZ meſuroit les forces vives des corps, par les hauteurs auſquelles ces corps peuvent monter en vertu de leurs viteſſes. On dira, peut-être, que la cauſe de la peſanteur ne conſiſte pas dans la preſſion, que les corps qu'on nomme peſans reçoivent de l'effort d'une matiere élaſtique étenduë à l'infini. Mais cette objection ſeroit inutile; je ne prétens pas expliquer ici la véritable cauſe de la peſanteur. Je ſupoſe un principe, & j'examine enſuite quel ſeroit l'effet de ma ſupoſition, ſi elle avoit lieu dans la nature, & ſi je montre que la loi de l'accélération, ſelon cette hypothéſe, ne differe pas de celle que la nature obſerve dans la chûte des corps graves; je ne vois pas pourquoi il ne me ſeroit pas permis d'attribuer à celle-ci tout ce qui ſe déduit legitimement de l'autre. Les Phyſiciens décompoſent ſouvent le mouvement uniforme en deux mouvemens collateraux, pour rendre raiſon d'un phénomène; quoique ce mouvement n'ait pas été composé originairement de ces deux mouvemens collateraux; & comme le même mouvement peut être décomposé en deux mouvemens collateraux d'une infinité de manieres différentes, puiſqu'il peut y avoir une infinité de parallèlogrammes autour d'une même diagonale; ils choiſiſſent, entre toutes ces manieres, celle qui les accommode le plus, ſans qu'on ſe ſoit aviſé de le leur reprocher. Tout le monde eſt en droit de faire des ſupoſitions, & d'en tirer des concluſions; de même qu'on n'a jamais défendu aux Géometres de ſupoſer, ou de tirer dans les figures des lignes qui n'y ſont pas, pourvû qu'elles ſervent à démontrer quelques Theorèmes, ou à réſoudre quelques Problèmes; il en eſt de même de nôtre ſujet; quelle que ſoit la véritable cauſe de la peſanteur, il me

 ſuffit

ſuffit d'indiquer une maniere de produire, par l'action des reſſorts, une accélération tout-à-fait ſemblable à celle que produit la peſanteur, & que je faſſe voir, comme je l'ai fait, que les eſpaces parcourus *CG* & *DH* ſont entr'eux comme les forces acquiſes des corps égaux aux points *G* & *H*, pour en pouvoir conclure, que les forces vives de deux poids égaux ſont comme les hauteurs d'où tombent ces poids, ou auſquelles ils peuvent monter, & par conſequent comme les quarrez des viteſſes.

9. On m'objectera, peut-être, que pour enviſager la deſcente de deux poids de deux hauteurs differentes, ſur le pied de deux eſpaces differens *CG*, *DH*, parcourus par l'action des reſſorts, je ſuis obligé de ſupoſer deux rangs inégaux de reſſorts *AC* & *BD*, quoique chacun de ces rangs ſoit d'une étendue infinie; que cependant la cauſe de la peſanteur eſt la même, pour toutes les hauteurs que les graves peuvent parcourir en tombant. A cela je répons, que je conſidere ſimplement ici l'effet que l'action de deux rangs de reſſorts *AC* & *BD* peut produire, comme étant entierement identique avec celui que fait la peſanteur; ſans prétendre par là que la cauſe de la peſanteur conſiſte effectivement dans une action de reſſorts, ou dans la preſſion d'une matiere élaſtique, qui par la continuation de ſon effort faſſe deſcendre les corps peſans.

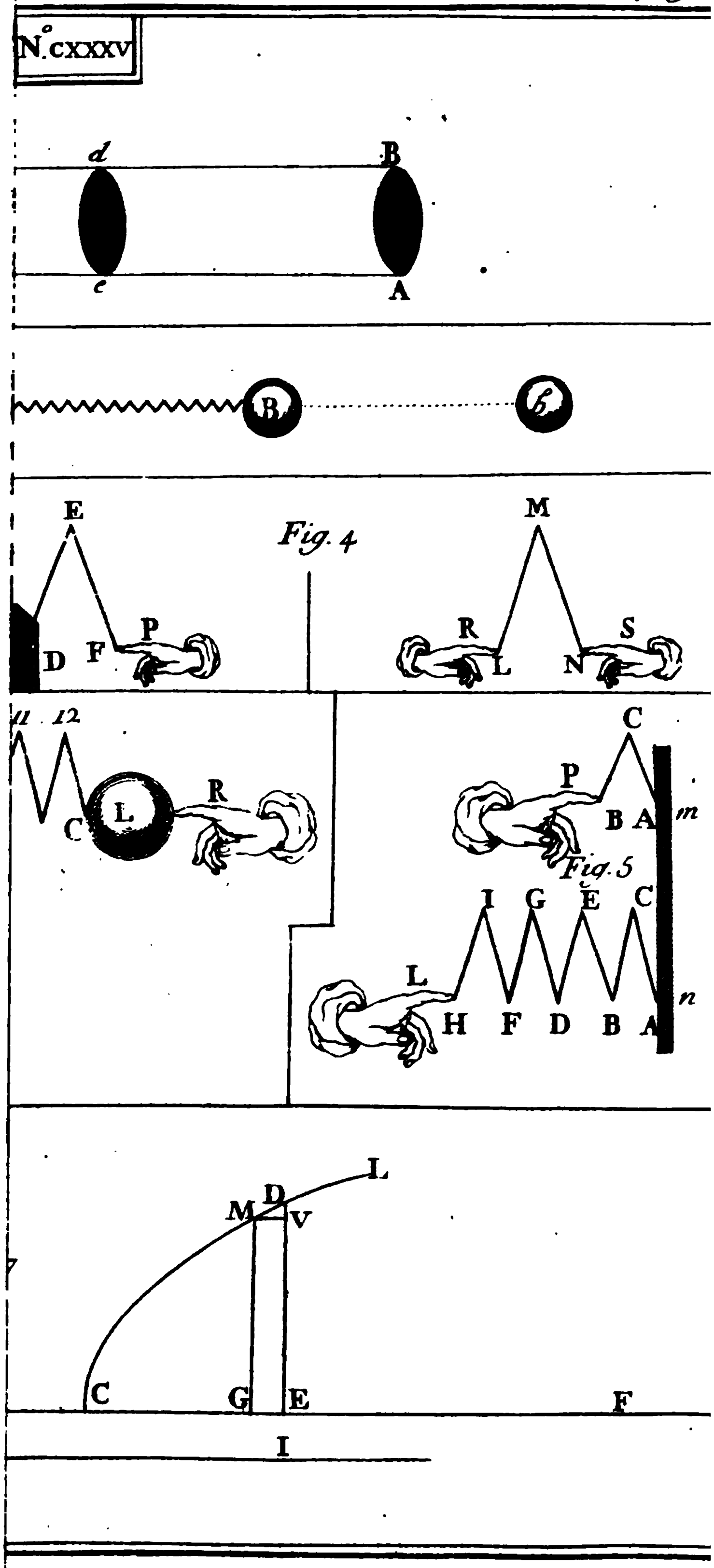
CHAPITRE VIII.

Où l'on confirme la meſure des forces vives, établies dans le Chapitre précedent, par des experiences & de nouvelles démonſtrations.

1. JE ne crois pas que perſonne puiſſe revoquer en doute, après tout ce que nous venons d'expliquer, la vérité de la regle établie pour l'eſtime de la force vive des corps; ainſi nous regarderons comme une choſe démontrée, que cette force

eſt

Digitized by Google


N°. CXXXV
d
B
e
A
B
b
E
Fig. 4
M
P
D
F
R
S
L
N
11
12
C
L
R
C
P
B
A
m
Fig. 5
I
G
E
C
L
H
F
D
B
A
n
L
M
D
V
C
G
E
F
I

Digitized by Google

eſt proportionnelle à la maſſe, ou à la quantité de matiere, multipliée par le quarré de la viteſſe, & non par la ſimple viteſſe.

2. Il s'eſt fait, depuis peu d'années, diverſes experiences qui confirment merveilleuſement cette regle. On a laiſſé tomber pour cet effet, de differentes hauteurs, ſur une matiere molle, telle que du ſuif, ou de la terre-glaiſe, dont la ſurface étoit unie & de niveau, pluſieurs boules égales en grandeur, & inégales en poids; après quoi on a obſervé avec toute l'exactitude neceſſaire, combien ces boules avoient penetré dans la matiere molle. Cette experience rëiterée un grand nombre de fois, on a remarqué que les enfonçûres étoient toujours égales, lorſque les boules tomboient de hauteurs reciproquement proportionnelles à leurs poids.

3. On a conclu de l'égalité de ces enfonçûres, que les boules avoient des forces égales, dans le moment qu'elles commençoient à s'enfoncer. Mais la viteſſe de chaque boule, au moment de l'enfoncement, étant en raiſon ſous-doublée de ſa hauteur, ou ſa hauteur en raiſon doublée de ſa viteſſe; il s'enſuit, que les forces vives de deux corps differens ſont égales, lorſque leurs maſſes, ou quantités de matiere, ont une raiſon reciproque aux quarrez de leurs viteſſes; conformément à la loy generale, qui veut *que la force vive d'un corps ſoit toujours proportionnelle au produit de la maſſe par le quarré de ſa viteſſe.* C'eſt ce que nous avons prouvé par des démonſtrations *a priori*, & que l'experience confirme à preſent.

4. J'ai encore d'autres preuves à alleguer pour le ſoutien de cette vérité, mais ſi ſimples & ſi faciles, qu'il eſt ſurprenant que perſonne ne s'en ſoit aperçu avant moi: celles, que je vais indiquer, ſont tirées du choc oblique des corps. Soient deux boules *A* & *C* parfaitement élaſtiques & égales entr'elles; TAB. XLII. *Fig.* 8. que *C* ſoit en repos, & que *A* vienne la fraper obliquement, ſuivant la direction & avec la viteſſe exprimée par *AB*, que je ſupoſe faire un angle demi droit avec la tangente commune qui paſſe par le point de rencontre des deux boules. Pour

déterminer ce qui leur arrivera après le choc, je décompoſe le mouvement par *AB*, en deux autres, dont les directions ſont *AF* & *FB*, l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à la commune tangente : en conſequence de la régle donnée ci-deſſus pour le concours direct des corps, la boule *A*, étant parvenuë en *B*, perdra tout ſon mouvement ſelon la direction *FB*, pendant qu'elle conſervera ſon mouvement par *AF*: cette boule doit donc continuer à ſe mouvoir ſelon la direction *BE* parallèle à *AF*, avec une viteſſe *BE* = *AF*, tandis que la boule *C* recevra, dans la direction *FB* prolongée, une viteſſe *CD* = *FD* = *AF*. Voilà donc la force de la boule *A* partagée après le choc en deux également; car puiſque ces boules ſont égales & ont des viteſſes égales, il s'enſuit que chacune a la moitié de la force que la ſeule *A* avoit avant le choc; d'où il eſt évident que la force de la boule *A* avant le choc, eſt à la force de la boule *C* ſon égale après le choc, comme 2 eſt à 1, ou comme AB^2 à BF^2; c'eſt-à-dire, comme le quarré de la viteſſe de la boule *A* avant le choc, eſt au quarré de la viteſſe de la boule *C* après le choc.

5. Paſſons à une autre preuve, & au lieu de diſtribuer également la force d'une boule entre deux boules égales, démontrons la même vérité par la réunion de deux forces égales en une : concevons pour cet effet deux boules égales *D* & *E*, leſquelles ſe meuvent avec des viteſſes égales *DC*, *EB*, ſur des directions perpendiculaires l'une à l'autre, en ſorte que la boule *D* parvenuë en *C*, rencontre directement la boule *E* parvenuë en *B*: il eſt viſible que la premiere boule s'arrêtera tout court en *C*, & que l'autre boule ſe mouvra le long de la direction *BA*, faiſant avec *BD* prolongée un angle demi droit *ABF*, & que ſon mouvement par *BA*, ſera compoſé de *FA* = *EB*, & de *BF* = *DC*. Voici donc un cas, où la boule *E*, ou *B*, poſſede toute ſeule, après le choc, les deux forces que les deux boules avoient avant le choc. Mais ces deux forces étoient égales, tant à cauſe de l'égalité des boules, que de celles de leurs viteſſes. Donc la force de la boule *B* après le

le choc, eſt à la force de la boule *D* avant le choc, comme 2 eſt à 1, ou comme BA^2 eſt à $BF^2 = DC^2$; c'eſt-à-dire, comme le quarré de la viteſſe de la boule *B* après le choc, au quarré de la viteſſe de la boule *D* avant le choc.

6. Peut-être ſoutiendra-t-on que tout ce qu'on peut conclure de ces deux démonſtrations, c'eſt que les forces vives de deux corps égaux, ſont entr'elles comme 2 eſt à 1, lorſque leurs viteſſes ſont comme $\sqrt{2}$ à 1. J'en tombe d'accord; mais au moins ne ſçauroit-on nier qu'elles ne démontrent invinciblement la fauſſeté du ſentiment commun, qui veut que la force d'un corps en mouvement ſoit proportionelle à la quantité de ſon mouvement, ou au produit de ſa maſſe par ſa ſimple viteſſe.

CHAPITRE IX.

Démonſtration generale & géométrique du Théorême de la quantité des forces vives proportionnelles aux produits des maſſes par les quarrez des viteſſes.

1. MAis, ſans inſiſter davantage ſur la validité des démonſtrations précédentes, je me propoſe d'en donner ici une generale, ſi fort au-deſſus de toute exception, que je la crois ſeule capable de convaincre les partiſans les plus obſtinez de l'opinion vulgaire; elle eſt auſſi fondée ſur la décompoſition du mouvement. Je prouverai donc d'une maniere géométrique, que quand un corps a préciſément autant de viteſſe qu'il lui en faut pour plier un reſſort, contre lequel il heurte perpendiculairement, ce même corps pourra plier avec une viteſſe double de la premiere, je ne dis pas deux, mais quatre reſſorts pareils au premier; & qu'avec une viteſſe triple, il ne ſera pas ſimplement en état de plier trois reſſorts comme les précédents, mais neuf; & ainſi de ſuite.

2. Pour ſe convaincre de cette vérité; figurons-nous que le

TAB.XLII. Fig. 9. corps C frape obliquement un reſſort placé en L, avec la viteſſe CL; ſoit l'angle de l'obliquité CLP de 30 degrez, afin que la perpendiculaire CP devienne égale à $\frac{1}{2}$ CL; ſoit la viteſſe $CL = 2$, & ſoit enfin la réſiſtance du reſſort L, telle que pour le plier il faille préciſement un degré de viteſſe dans le corps C, lorſque ce corps le heurte perpendiculairement. On ſupoſe que le corps C ſe meut ſur un plan horiſontal. Ceci connu, je dis qu'après que le corps C aura choqué obliquement le reſſort L, avec une viteſſe CL de deux degrez, viteſſe qui en vertu de la compoſition du mouvement eſt compoſée de $CP = 1$, & de $PL = \sqrt{3}$; ce corps perdra entiérement le mouvement perpendiculaire par CP, & ne retiendra que le mouvement par PL; ainſi le corps C, après avoir conſumé ſon mouvement par CP à plier le premier reſſort L, continuëra à ſe mouvoir dans la direction PLM avec une viteſſe $LM = PL = \sqrt{3}$. Concevons au point M, un ſecond reſſort ſemblable au premier, & l'angle de l'obliquité LMQ, tel que la perpendiculaire LQ ſoit $= 1$: il eſt clair que le mouvement par LM, étant compoſé de deux collateraux par LQ & QM, le mouvement par LQ ſera entierement conſumé à plier le reſſort M, pendant que le mouvement par QM continuëra ſelon la direction QMN, avec une viteſſe $MN = QM = \sqrt{2}$. Imaginons au point N un troiſiéme reſſort égal à chacun des précédens, que le corps C rencontre ſous un angle demi droit MNR, afin que MR perpendiculaire à la ligne de ſituation du reſſort devienne égale à 1: il eſt manifeſte que le mouvement par MN compoſé des mouvemens par MR & par RN, conſumera le premier de ces mouvemens par MR à plier le reſſort N, & par conſequent ſon autre mouvement par NR continuëra avec une viteſſe $NO = RN = 1$. Le corps C conſerve donc encore un degré de viteſſe ſuivant la direction RNO, après avoir plié les trois reſſorts L, M, N; & c'eſt avec ce degré de viteſſe, que le corps C pliera le quatriéme reſſort O, contre lequel je ſupoſe qu'il heurte perpendiculairement.

Il

Digitized by Google

Il paroit de tout ceci, que le corps *C* a la force de plier, avec deux degrez de viteſſe, quatre reſſorts, dont chacun demande, pour être plié, un degré de viteſſe dans le corps *C*. Mais ces quatre reſſorts pliez ſont l'effet total de la force du corps *C*, mû avec deux degrez de viteſſe; puiſque toute cette viteſſe du corps *C* ſe conſume à plier ces quatre reſſorts l'un après l'autre: & un ſeul reſſort plié eſt l'effet total de la force du même corps *C*, mû avec un degré de viteſſe; puiſque la réſiſtance de chaque reſſort eſt telle, qu'elle détruit préciſement un degré de viteſſe dans le corps *C*. Puis donc que les effets totaux ſont entr'eux comme les forces qui ont produit ces effets; il faut que *la force vive* du corps *C*, mû avec deux degrez de viteſſe, ſoit quatre fois plus grande que *la force vive* du même corps, mû avec un degré de viteſſe.

3. On démontrera de la même maniere, qu'une viteſſe triple, quadruple, quintuple, &c. fait avoir au corps *C* une force neuf fois, ſeize fois, vingt-cinq fois, &c. plus grande; parce que, dans ce cas, il ſera capable de plier, avant de s'arrêter, 9, 16, 25, &c. reſſorts égaux. Il n'y a pour cela qu'à donner à *CL*, une obliquité convenable ſur le premier reſſort, & telle que *CP* ſoit à *CL*, comme 1 eſt à 3, 4, 5, &c. & diriger les autres obliquitez ſuivant l'exigence du cas. Je tire de tout ceci cette concluſion generale, *que la force vive d'un corps eſt proportionnelle au quarré de ſa viteſſe, & non à ſa ſimple viteſſe.*

CHAPITRE X.

Des trois loix qui s'obſervent conſtamment dans le choc direct de deux corps. Que l'une de ces loix priſe à diſcretion, a toujours une connexion neceſſaire avec les deux autres.

1. JOignons à ce que nous venons de dire quelques réflexions ſur cette triple loi, que les corps durs, que j'ai nom-

Digitized by Google

nommez parfaitement roides, obſervent inviolablement quand ils ſe choquent. La premiere de ces loix a été démontrée au Chapitre 4, §. 5; elle conſiſte dans la conſervation de la viteſſe reſpective avant & après le choc: On trouve cette viteſſe reſpective en prenant la difference des viteſſes abſoluës, lorſque les corps vont d'un même côté, & leur ſomme, lorſqu'ils ſe meuvent en ſens contraire. La ſeconde loi, démontrée au même Chapitre, §. 8, établit la conſervation de la quantité de direction toujours égale au produit de la ſomme des maſſes par la viteſſe du commun centre de gravité. La troiſiéme conſiſte enfin dans la conſervation de la quantité des forces vives. Ce ſeroit obſcurcir cette loi que d'entreprendre de la démontrer, En effet tout le monde regarde comme un Axiome inconteſtable, que toute cauſe efficiente ne ſçauroit périr, ni en tout ni en partie, qu'elle ne produiſe un effet égal à ſa perte. L'idée que nous avons de la force vive, entant quelle exiſte dans un corps qui ſe meut, eſt quelque choſe d'abſolu, d'indépendant, & de ſi poſitif, qu'elle reſteroit dans ce corps, quand même le reſte de l'Univers ſeroit anéanti. Il eſt donc clair, que la force vive d'un corps, diminuant ou augmentant à la rencontre d'un autre corps, la force vive de cet autre corps doit en échange augmenter ou diminuer de la même quantité; l'augmentation de l'une étant l'effet immediat de la diminution de l'autre; ce qui emporte neceſſairement la conſervation de la quantité totale des forces vives: auſſi cette quantité eſt-elle abſolument inalterable par le choc des corps.

2. Mais autant que cette loi eſt évidente & certaine, par la ſeule idée qu'on doit avoir de la force vive; autant incertaine a été juſqu'ici la maniere de meſurer cette force: un préjugé general ayant fait croire qu'elle étoit proportionnelle au produit de la maſſe par la viteſſe; c'eſt de ce préjugé qu'eſt venuë la fauſſe opinion de la conſervation de la quantité du mouvement, dont on ne s'eſt deſabuſé, que depuis que des perſonnes éclairées ont démontré que la quantité du mouvement peut

Digitized by Google

peut être augmentée & diminuée par le choc des corps, ſans démontrer pourtant en quoi conſiſte la véritable maniere de meſurer les forces vives. M. DE LEIBNITZ découvrit le premier qu'elles étoient en raiſon des produits des maſſes par les quarrez des viteſſes; mais, comme nous l'avons déja dit, peu de gens acquieſcérent à ſes raiſonnemens. Je crois avoir établi cette vérité d'une maniere ſi évidente, que deſormais elle ſera à l'abri de toute conteſtation.

3. Quelques réflexions, ſur la nature de cette triple loi, nous feront encore remarquer, que des trois conſervations qui ſe font, 1°. de la viteſſe reſpective, 2°. de la quantité de direction, 3°. de la ſomme des produits des maſſes par les quarrez des viteſſes; deux étant accordées, la troiſième l'eſt auſſi d'une néceſſité géométrique; ce que je démontre ainſi. Soient A & B deux corps, leurs viteſſes avant le choc a & b, & leurs viteſſes après le choc x & y; ſupoſons d'abord qu'avant & après le choc, ces corps ſe meuvent du même côté. La premiere conſervation donnera $a - b = y - x$; la ſeconde $Aa + Bb = Ax + By$: j'en déduis la troiſiéme de cette maniere: Par la tranſpoſition des termes, il vient $a + x = y + b$, & $Aa - Ax = By - Bb$; qu'on multiplie les membres de ces deux équations, ſçavoir $Aa - Ax$, par $a + x$, & $By - Bb$, par $y + b$, les produits donneront une nouvelle équation $Aaa - Axx = Byy - Bbb$, laquelle, par la tranſpoſition des termes, ſe changera en $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, formule qui exprime parfaitement ce qu'on cherche; je veux dire la conſervation de la ſomme des produits des maſſes par les quarrez des viteſſes. On voit aiſément, que ſi on rend a ou b, de-même que x ou y, negatif, pour marquer le mouvement en ſens contraire des corps A & B, tant avant qu'après le choc; cette ſuppoſition ne changera rien dans les ſignes des termes de l'équation trouvée $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, parce que les dimenſions de ces lettres ſont en nombre pair dans tous les termes de cette équation.

4. Il paroit, par ce calcul, que la conſervation de la ſomme des produits des maſſes par les quarrez des viteſſes, a une connexion néceſſaire avec les deux autres conſervations; & toute perſonne un peu Géométre auroit pû l'en tirer comme un ſimple Corollaire, ſans en penetrer l'utilité; ç'auroit été entre ſes mains une verité ſterile & purement géométrique. Et c'eſt ce qui eſt effectivement arrivé à M. HUGUENS, quoique grand Mathématicien, & génie du premier ordre. Il a formé de cette propoſition un Theorème, qu'il a enſuite démontré (*) à ſa maniere; mais ſans trouver dans ce Théorème la conſervation de la quantité des forces vives qui y eſt cachée. M. HUGUENS ignoroit ſans doute, que la force d'un corps en mouvement eſt proportionnelle au produit de ſa maſſe par le quarré de ſa viteſſe, ou il refuſoit d'admettre cette propoſition. Faute de recourir à la nature & à ſes premiers principes, les Theorèmes les plus importans dégenerent en de ſimples ſpéculations.

5. Mais à preſent que cette vérité eſt miſe dans ſon jour & hors de toute atteinte, on a lieu d'admirer la parfaite conformité qui regne entre les loix de la Nature, & celles de la Géométrie; conformité qu'elle obſerve ſi conſtamment & dans toutes les circonſtances, qu'il ſemble que la Nature aît conſulté la Géòmétrie, en établiſſant les loix du Mouvement. Car s'il eut été poſſible que les forces des corps, qui ſont en mouvement, n'euſſent pas été en raiſon des produits des maſſes par les quarrez des viteſſes, & que la Nature les eut faites en une autre raiſon; elle ſe ſeroit démentie, l'ordre de la Géométrie auroit été violé. La quantité des forces vives, ſource unique de la continuation du mouvement dans l'Univers, ne ſe ſeroit pas conſervée: plus d'égalité par conſequent entre les cauſes efficientes & leurs effets; en un mot, toute la Nature ſeroit tombée dans le deſordre.

(*) Voyez la longue Démonſtration qu'il en a donnée dans ſon Traité *De motu corporum ex percuſſ. Prop. XI.*

CHAP.

CHAPITRE XI.

Du choc de trois corps durs, ſelon differentes directions.

1. LOrſque trois corps durs ſe choquent à la fois, ſelon differentes directions, il eſt difficile de déterminer leurs viteſſes après le choc, parce que la conſervation de la viteſſe reſpective n'a pas lieu ici, comme il eſt aiſé de le voir, pour peu d'attention qu'on y faſſe. Mais on en peut venir à bout par le moyen de la véritable eſtime des forces vives, & de la conſervation de la quantité de direction, leſquelles ont lieu en toutes ſortes de choc, quel que ſoit le nombre des corps qui ſe rencontrent.

2. Soient *A* & *B* deux boules, que je ſupoſe en repos, & dont les maſſes ſont égales; ſoit une troiſiéme boule *C*, d'une maſſe quelconque, qui ſe meuve contre les deux premieres, ſuivant la direction *CD* perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux boules *A* & *B*; enſorte que celles-ci ſoient frapées tout à la fois par la boule *C* parvenuë en *D*. On demande quelle ſera la direction & la viteſſe de chacune de ces boules après leur choc? TAB. XLII. *Fig.* 10.

SOLUTION.

3. La direction de ces boules après leur choc ne ſouffre aucune difficulté; car ſi du centre de la boule *D*, on tire les droites *DF*, *DG*, par les points d'attouchement, ou par les centres des deux autres boules, il eſt viſible que ces lignes ſeront les directions des boules frapées, & que la boule *C* reculera, s'arrêtera, ou s'avancera dans la ligne de ſa direction *CD*, ſelon que les boules qu'elle aura frapées auront plus ou moins de maſſe: l'expreſſion de leurs viteſſes eſt un peu plus difficile; je la détermine par le calcul ſuivant.

4. Soient exprimez la viteſſe de la boule *C*, par $CD = a$;

la viteſſe de la même boule après le choc, par $DE = x$; & la viteſſe des boules A & B, par AF & $BG = y$; ſoit la maſſe de la boule A, ou de la boule B, $= n$, & la maſſe de la boule $C = m$: la quantité de la direction avant le choc ſera $= ma$, & la quantité de direction après le choc ſera $= mx + \frac{2q}{p} ny$; je ſupoſe que H eſt le point du milieu de la droite qui joint les centres des deux boules A & B parvenuës en F & G, & qu'ainſi ce point eſt le centre commun de gravité des deux boules F & G, & je nomme p à q, la raiſon de DF à DH: J'aurai donc, en vertu de la conſervation de la quantité de direction, cette égalité $ma = mx + \frac{2q}{p} ny$. Or la quantité de la force vive avant le choc eſt $= maa$, & la quantité des forces après le choc eſt $= mxx + 2nyy$; Donc $maa = mxx + 2nyy$: on trouve la valeur des inconnuës x & y, par la comparaiſon de ces deux équations; le calcul donne $x = (ppma - 2qqna) : (ppm + 2qqn)$, & $y = 2pqma : (ppm + 2qqn)$.

COROLLAIRE I.

5. Si $ppm = 2qqn$, ou, ce qui revient à la même choſe, ſi $pp : qq = 2n : m$, c'eſt-à-dire, ſi la ſomme des deux boules A & B eſt à la boule C, comme le quarré du ſinus total eſt au quarré du ſinus de l'angle DFH complément de l'angle FDH; on aura $x = 0$; auquel cas la boule C s'arrêtera tout court après le choc en D; la viteſſe de chaque boule A & B, ou $y\,[2pqma : (ppm + 2qqn)]$ ſera $= qa : p$, & AF, ou BG, deviendra quatriéme proportionnelle du ſinus total, du ſinus de l'angle DFH, & de CD qui exprime la viteſſe de la boule C.

COROLLAIRE II.

6. Il s'enſuit encore que ſi les trois boules C, A, B, ſont éga-

Digitized by Google

égales, & que *FDG* ſoit un angle droit, ou *FDH* un demi angle droit, la boule *C* s'arrêtera en *D*, & chacune des deux autres ſe mouvra avec une viteſſe qui ſera à celle de la boule *C* avant le choc, comme le côté d'un quarré eſt à ſa diagonale, ou comme 1 à $\sqrt{2}$; car dans ce cas on aura $pp : qq = 2 : 1 = 2n : m$, & $y\,[qa : p] = 1a : \sqrt{2} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

7. Si ppm eſt plus petit que $2qqn$; la valeur de x, ou *DE*, ſera negative, & par conſequent la boule *C* rebrouſſera après qu'elle aura frapé les boules *A* & *B*; & ſi la boule *C* étoit infiniment petite par raport aux autres, elle rebrouſſeroit avec la même viteſſe qu'elle avoit avant le choc, & les deux boules *A* & *B* reſteroient immobiles, car on auroit $x = -2qqna : 2qqn = -a$, & $y = 2pqoa : 2qqn = 0$.

COROLLAIRE IV.

8. Et ſi au contraire les boules *A* & *B* étoient infiniment petites par raport à la boule *C*; celle-ci continuëroit à ſe mouvoir après le choc, ſans aucune perte ſenſible de ſa viteſſe; & les boules *A* & *B* acquereroient chacune une viteſſe double de celle qu'elles auroient euës dans le cas du premier Corollaire; car x deviendroit $= ppma : ppm = a$, & $y = 2pqma : ppm = 2qa : p$. D'où on voit qu'en diminuant à l'infini les boules *A* & *B*, on augmentera leurs viteſſes, mais ſans parvenir jamais au double de la quatriéme proportionnelle du ſinus total, du ſinus de l'angle *DFH*, & de la viteſſe de la boule *C*.

COROLLAIRE V.

9. Si l'angle *FDG* eſt infiniment aigu, je veux dire, ſi $p = q$, les directions *AF*, *BG* tomberont ſur *DH*, & les boules *A* & *B* pourront être regardées comme réunies en un

ſeul corps ; ce qui eſt un cas du choc direct, expliqué ci-deſſus Chapitre V, §. 2. En effet faiſant $p = q$, on aura $x = (ma - 2na) : (m + 2n)$, & $y = 2ma : (m + 2n)$, conformément à ce qui a été trouvé dans l'endroit cité, où on a exprimé par *A* & *B* ce qui l'eſt ici par *m* & $2n$.

COROLLAIRE VI.

10. Si les angles *FDH*, & *GDH* ſont auſſi grands qu'ils puiſſent l'être, c'eſt-à-dire, ſi chacun de ces angles eſt droit, & que par conſequent les directions *AF* & *BG*, ſoient dans une même ligne perpendiculaire à la direction *CD* ; la boule *C* étant parvenuë en *D*, ne fera que friſer les boules *A* & *B*, & coulera entre deux ſans leur imprimer aucune viteſſe ; auſſi aura-t-on, dans ce cas où $q = 0$, $x = ppma : ppm = a$, & $y = 2pm0a : ppm = 0$.

11. Il eſt manifeſte par ces deux derniers Corollaires, que les directions *AF*, *BG* peuvent former avec la direction *DH* des angles *FDH*, *GDH*, tels que les boules *A* & *B* s'éloigneront de la direction *CDH*, le plus vite qu'il eſt poſſible ; je veux dire, qu'il y a un *maximum* entre toutes les directions des boules *A* & *B*, qui contribuë à former cet éloignement ; ce qui donne lieu à un Problême aſſez curieux, que voici.

PROBLEME I.

12. *On demande la grandeur des angles* FDH *&* GDH *des directions* AF *&* BG, *ſuivant leſquelles les boules données* A *&* B *frapées par une troiſiéme boule donnée* C, *dont la viteſſe eſt auſſi donnée, s'éloignent l'une de l'autre le plus vite qu'il eſt poſſible, dans un tems donné ; ou ce qui revient à la même choſe, on exige que la viteſſe reſpective des boules* A *&* B *ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible.*

Je trouve par la methode *de maximis*, que pour réſoudre ce Problême, il faut faire cette analogie : Comme $2m + 2n$ eſt

eſt à $m+2n$, ainſi le quarré du ſinus total, eſt à un quatriéme terme. La racine quarrée de ce dernier terme donnera le ſinus de l'angle cherché *FDH* ou *GDH* : c'eſt pour abreger que je n'en mets pas ici l'analiſe.

COROLLAIRE I.

13. Si les trois boules *A*, *B*, *C* ſont égales, l'angle *FDH*, ſera de 60 degrez, ou les deux tiers d'un angle droit ; & par conſequent le double de cet angle *FDG* ſera de 120 degrez, ou les $\frac{4}{3}$ d'un droit : car dans ce cas $2m+2n$ eſt à $m+2n$, comme 4 eſt à 3 ; ce qui eſt préciſement la raiſon du quarré du ſinus total, au quarré du ſinus de 60 degrez.

COROLLAIRE II.

14. Si la boule *C* eſt égale à la ſomme des deux boules *A* & *B*, on aura $2m+2n : m+2n = 3 : 2$; ce qui donne à très-peu de choſe près l'angle *FDH*, de 54 degrez 44 minutes ; le même angle que pluſieurs perſonnes ont démontré que la barre du gouvernail devoit faire avec la quille du Vaiſſeau, pour l'obliger à virer le plus promptement qu'il eſt poſſible.

COROLLAIRE III.

15. Comme $m+2n$ excede toujours la moitié de $2m+2n$, il s'enſuit que l'angle du plus grand éloignement, *FDH*, eſt auſſi toujours plus grand qu'un demi droit ; mais ſi les boules *A* & *B* ſont ſupoſées infiniment petites par raport à la boule *C*, alors l'angle *FDH* ſera demi droit, & ſon double, l'angle *FDG*, deviendra droit.

16. Il y a des cas où la viteſſe abſoluë des boules *A* & *B* peut devenir un *maximum*, ce qui eſt un eſpece de paradoxe : il conſiſte en ce que ſi ces boules ſont réünies en un corps, & choquées directement par la boule *C*, elles en recevront

une

une viteſſe abſolue moindre que ſi ces boules étoient ſeparées & frapées ſelon certaines directions. On tire de cette remarque un nouveau Problême.

PROBLEME II.

17. *Toutes choſes ſupoſées comme dans le Problême precedent, on demande les directions AF, BG, les plus avantageuſes, pour que les boules données, A & B, frapées à la fois par une troiſiéme boule C, en reçoivent la plus grande viteſſe poſſible, ſuivant ces mêmes directions.*

On réſoudra ce Problême ſi, ſuppoſant que la valeur generale de $y = 2pqma : (ppm + 2qqn)$ eſt un *maximum*, on la differentie en prenant la lettre q pour variable, & les autres pour invariables, & qu'enſuite on égale la differentielle à *zero*; de cette maniere on trouvera $qq = mpp : 2n$, & par conſequent le quarré du ſinus de l'angle *FDH*, c'eſt-à-dire, $pp - qq = (2n - m)pp : 2n$. D'où l'on tire cette analogie; Comme $2n$ eſt à $2n - m$, ainſi pp, où le quarré du ſinus total, eſt à un quatriéme terme, dont la racine quarrée donnera le ſinus de l'angle cherché *FDH*, ou *GDH*.

COROLLAIRE I.

18. Lorſque les trois boules ſont égales, l'angle *FDH* devient demi droit, & le double *FDG* = à un angle droit.

COROLLAIRE II.

19. Si $m = 2n$, ou ſi la boule *C* eſt égale à la ſomme des deux autres, l'angle *FDH* devient nul; je veux dire que la plus grande viteſſe ſera imprimée aux boules *A* & *B*, lorſqu'elles ſeront réünies & frapées directement par la boule *C*.

COROL-

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

20. Dans tous les cas, où m eſt plus petite que $2n$, il y aura toujours certaines directions obliques AF & BG le long deſquelles les boules A & B, frapées par la boule C, iront avec plus de viteſſe, que ſi étant réünies elles étoient frapées directement, & avec la même viteſſe, par la même boule C. Soit par exemple, $m = \frac{3}{2}n$, ou $C : A = 3 : 2$, l'angle FDH doit être de 30 degrez, & ſon double FDG de 60 degrez: la plus grande viteſſe abſoluë que les boules A & B puiſſent recevoir par le choc de la boule C, ſe fera donc quand le triangle FGD ſera équilateral. Soit $m = \frac{1}{2}n$ l'angle FDH le plus avantageux ſera de 60 degrez: & ainſi des autres.

COROLLAIRE IV.

21. Mais ſi m eſt plus grand que $2n$, il n'y aura plus de direction oblique qui jouiſſe du privilége de la plus grande viteſſe, alors la viteſſe ſera toujours plus grande, à meſure que l'angle FDH diminuera, ou que la boule C frapera plus directement les boules A & B; la raiſon en eſt évidente; car ſi m étoit $> 2n$; q, ou $\sqrt{(mpp : 2n)}$, devroit être auſſi plus grand que p. Mais aucun ſinus ne peut être plus grand que le ſinus total.

CHAPITRE XII.

Du choc d'un corps contre pluſieurs autres, & de la détermination generale de leur mouvement après le choc.

1. APrès avoir déterminé ce qui arrive quand une boule en frape deux autres, qui ſont égales entr'elles, & diſpoſées à ſe mouvoir après le choc ſuivant des directions

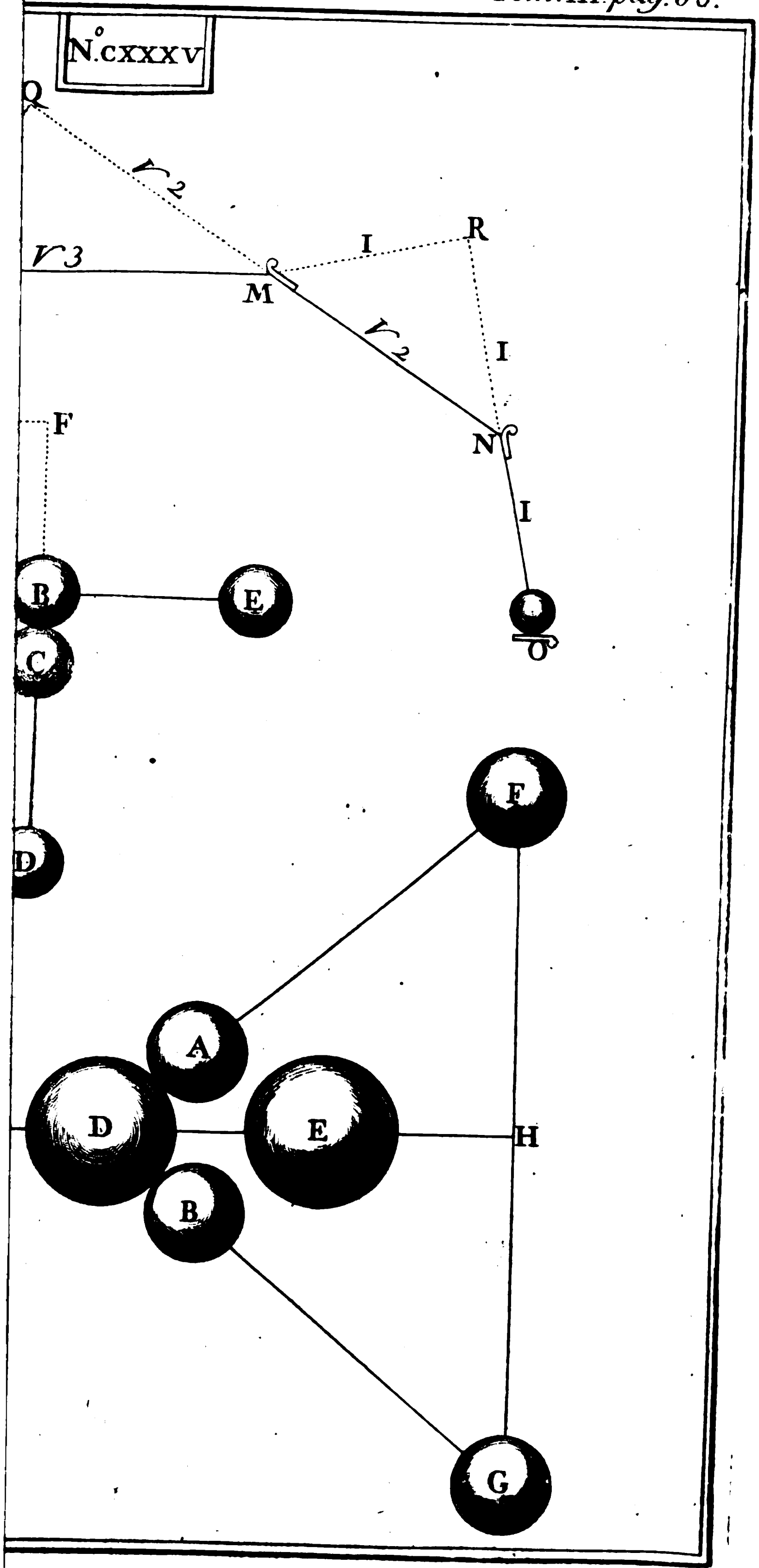
Digitized by Google

également inclinées ſur la direction de la boule qui frape, que j'apellerai dans la ſuite *direction moyenne*; je paſſe à la conſideration de deux paires de boules, dont les directions de chaque paire faſſent des angles égaux avec la direction moyenne. Je ſupoſe d'abord que les deux boules de chaque paire ſont égales entr'elles: conſiderant enſuite ces quatre boules, comme venant à être frapées à la fois avec une viteſſe donnée par une cinquième boule quelconque, il s'agit de déterminer le degré de viteſſe que chacune de ces quatre boules recevra après le choc, & celle que conſervera la boule qui les a frapées, ſoit en avant, ſoit en arriere.

2. Cette queſtion me parût ſi difficile la premiere fois que j'y penſai, que je fus tenté de croire que la reſolution en étoit impoſſible; auſſi ne connois-je perſonne qui l'ait entrepriſe. Il me ſembloit qu'il n'y avoit pas aſſez de choſes données: cependant un peu de tems & de reflexions m'ont fourni les moyens d'en venir à bout; & ma methode eſt telle, que non ſeulement elle ſatisfait à cette queſtion, mais qu'on peut l'appliquer à un auſſi grand nombre de paires de boules qu'on voudra, priſes dans les circonſtances preſcrites: donnons-en un eſſai.

TAB. XLIII. *Fig.* 11. 3. Soit la boule *C* en mouvement ſelon la direction *CDH*, & que cette boule, parvenuë en *D*, frape à la fois contre les deux paires de boules reſpectivement égales, *A* & *B*, *K* & *L*, que je ſupoſe être ſituées de maniere que les droites *DAF* & *DBG*, *DKT* & *DLV*, tirées du centre de la boule qui frape par les points d'attouchement, faſſent de part & d'autre des angles égaux avec la ligne de moyenne direction, $FDH = GDH$, & $TDI = VDI$; il eſt clair que ces lignes feront les directions des quatres boules. Reſte à déterminer leurs viteſſes, exprimées par *AF* & *KT*, ou *BG* & *LV*.

4. Pour réſoudre ce qui paroit le plus épineux dans cette queſtion, je m'aviſai de conſiderer la boule *C*, ou *D*, comme étant partagée au hazard en deux parties quelconques *R* & *S*,


N°. CXXXV
Q
V 2
V 3
I
R
M
V 2
I
F
N
I
B
E
C
O
D
F
A
D
E
H
B
G

Digitized by Google

& *S*, ſeparables l'une de l'autre, mais qui ſe meuvent conjointement juſqu'en *D*, où je ſupoſe que la partie *R* choque ſeulement les deux boules *A* & *B*, dans le même inſtant que la partie *S* frape les deux autres boules *K* & *L*. On peut donc conſiderer la choſe comme un double cas de la premiere queſtion déja reſoluë pour trois boules. On déterminera enſuite ſeparément les viteſſes des parties *R* & *S* après le choc. Mais ces deux viteſſes differeront plus ou moins, ſelon le raport qu'il y aura entre les deux parties *R* & *S* de la boule *D*, leſquelles ſe ſéparant après le choc, chacune ſe mouvra avec ce qui lui reſtera de viteſſe propre. Cependant je conçois qu'il peut y avoir une raiſon entre *R* & *S*, telle qu'il reſtera à chacune de ces parties une viteſſe égale après le choc, & qu'ainſi elles iront de compagnie, & avant & après le choc. De cette maniere les parties *R* & *S* demeurant contiguës, elles continueront de faire enſemble un même tout, de même que ſi la boule *C* n'avoit point été partagée. Mais il eſt aiſé de voir, que les viteſſes, que les cinq boules auroient dans cette ſupoſition, ſont préciſément les mêmes que ſi une boule entiere, & égale à *D*, choquoit, dans les mêmes circonſtances, les quatre boules *A* & *B*, *K* & *L*. Le nœud de la queſtion conſiſte donc à déterminer la raiſon qui doit être entre les parties *R* & *S*, pour que ces parties ſe meuvent de même viteſſe après le choc: ceci trouvé, le reſte en coule naturellement.

5. Tel eſt le plan que je me ſuis propoſé, il s'agit de l'executer. Soit donc la boule *C*, ou $D = M$, la boule *A*, ou *B*, $= n$, la boule *K*, ou *L*, $= N$; la viteſſe *CD* de la boule *C* avant le choc $= a$; le ſinus total $= p$; le ſinus de l'angle *DFH*, complément de *FDH*, $= q$; le ſinus de l'angle *DTI*, complément de *TDI*, $= Q$. Maintenant pour trouver la viteſſe de la partie *R* après le choc, je conſulte la formule pour trois boules, $x = (ppma - 2qqna) : (ppm + 2qqn)$, où je ſubſtitue *R* à *m*, laiſſant les autres lettres qui ſont ici les mêmes; j'aurai par ce moyen *x*, ou la viteſſe de la partie *R*

après le choc, égale à $(ppRa - 2qqna) : (ppR + 2qqn)$; je ſubſtitue enſuite dans la formule S à m, N à n, & Q à q, pour avoir la viteſſe de la partie $S = (ppSa - 2QQNa) : (ppS + 2QQN)$; mais puiſqu'il faut que les viteſſes de R & de S ſoient égales, pour que ces parties ne ſe ſeparent pas après le choc, formons cette égalité : $(ppRa - 2qqna) : (ppR + 2qqn) = (ppSa - 2QQNa) : (ppS + 2QQN)$, qui réduite, donnera la valeur de $S = QQNR : qqn$. Et d'autant que les parties R & S priſes enſemble, compoſent la boule entiere M; il s'enſuit que $R + QQNR : qqn = M$. D'où il ſuit que $R = qqnM : (qqn + QQN)$. Subſtituant donc cette valeur de R dans celle de S, on aura auſſi $S = QQNM : (qqn + QQN)$, enſorte qu'il ne reſte plus qu'à ſubſtituer la valeur de R dans $(ppRa - 2qqna) : (ppR + 2qqn)$, ou ce qui eſt la même choſe, la valeur de S dans $(ppSa - 2QQNa) : (ppS + 2QQN)$, pour obtenir la viteſſe commune à chaque partie après le choc; & par conſequent la viteſſe de toute la boule M qui ſera $= (ppMa - 2qqna - 2QQNa) : (ppM + 2qqn + 2QQN)$. Quant aux viteſſes des boules frapées A & B, K & L, je prends la formule pour trois boules $y = 2pqma : (ppm + 2qqn)$, dans laquelle je ſubſtituë premierement la valeur de $R = qqnM : (qqn + QQN)$, à m, ſans toucher aux autres lettres; & enſuite la valeur de $S = QQNM : (qqn + QQN)$ à m, N à n, & Q à q; la premiere de ces ſubſtitutions donne la viteſſe AF, ou BG des boules A & $B = 2pqMa : (ppM + 2qqn + 2QQN)$, & la ſeconde fait connoitre la viteſſe KT, ou LV, des boules K & L, égale à $2pqMa : (ppM + 2qqn + 2QQN)$. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

6. On ſe ſervira de la même méthode à déterminer les viteſſes de tel nombre de paires de boules qu'on voudra, de trois paires par exemple. Pour cet effet, partagez par la penſée

ſée la boule *C*, ou *D*, en deux parties *R* & *S*; & que l'une de ces parties, comme *R*, frape une paire de boules, tandis que la partie *S* heurtera contre les deux autres paires. Cherchez enſuite ſéparément les viteſſes que *R* & *S* auront après le choc, & égalez ces deux viteſſes; vous déterminerez les valeurs des parties *R* & *S*, & le Problême réduit au cas précédent de deux paires de boules ſe réſoudra de même. On voit aiſément que cette méthode s'étend également à tout nombre de paires de boules propoſé. Mais ſans entrer dans un calcul long & pénible; ce que nous avons dit de la formation des formules pour une, & deux paires de boules, indique ſuffiſamment, la maniere de l'étendre à autant de paires de boules qu'on voudra. Soit, par exemple, la maſſe de la boule qui frape, nommée *M*, & les maſſes des boules frapées *e*, *f*, *g*, *&c.* Soient de plus les ſinus des complémens des angles de leurs directions avec la direction moyenne, *q*, *r*, *t*, *&c.* Je dis qu'on aura après le choc.

1°. La viteſſe de la boule qui frape, $= (ppMa - 2qqea - 2rrfa - 2ttga - \&c.) : (ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.)$.

2°. La viteſſe de la boule *e*, $= 2pqMa : (ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.)$.

3°. La viteſſe de la boule $f = 2prMa : (ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.)$.

4°. La viteſſe de la boule $g = 2ptMa : (ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.)$. Et ainſi à l'infini.

COROLLAIRE I.

7. On voit que les viteſſes des boules frapées ſont entr'elles comme *q*, *r*, *t*, *&c.* c'eſt-à-dire, proportionnelles au ſinus des complémens des angles que font leurs directions, avec la direction moyenne.

Corollaire II.

8. La viteſſe, avant le choc, de la boule qui frape eſt à ſa viteſſe après le choc, comme $ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg$ + &c. eſt à $ppM - 2qqe - 2rrf - 2ttg$ — &c. & ſi ppM eſt $>$ ou $=$ ou $<$, que $2qqe + 2rrf + 2ttg$ + &c. la viteſſe de cette boule après le choc ſera affirmative, nulle ou negative: Je veux dire, qu'après le choc cette boule ira en avant, qu'elle s'arrêtera, ou qu'elle reculera.

Corollaire III.

TAB. XLIII. *Fig.* 12. 9. Je ſupoſe à preſent qu'une boule quelconque *C*, frape à la fois un nombre infini de petites boules uniformément ſituées autour d'un grand cercle de la boule qui les frape, comme on voit dans cette Figure, où les arcs égaux, *AE* & *AB*, ſont cenſez occupez par une multitude égale & infinie de part & d'autre de petites boules *e*, *e*, *e*, &c. *b*, *b*, *b*, *b*, toutes égales entr'elles, mais dont la ſomme des maſſes ait une proportion finie & comparable à la maſſe de la boule *C* ou *D*. Je dis que la détermination des viteſſes de toutes ces boules après le choc, tant de la boule qui frape, que de chacune de celles qui ſont frapées, dépend de la quadrature du cercle, lorſque les arcs *AE*, *AB* occupent moins d'un demicercle ſur la circonference *EAB*.

10. Mais ces viteſſes peuvent être déterminées algebriquement, lorſque chacun des arcs *AE*, *AB* eſt égal au quart de cercle *D*, & partant l'arc entier *EAB* $=$ à ſa demi circonference. Soit donc comme ci-deſſus la boule qui frape $= M$, ſa viteſſe avant le choc $= a$, la ſomme de toutes les boules frapées $= N$, le ſinus du complément de l'obliquité de la direction de l'une de ces petites boules quelconque, $= R$; la viteſſe de la boule qui frape ſera, après le choc, $= (2Ma - Na) : (2M + N)$, & la viteſſe de la petite boule frapée $= 4MRa : (2M + N)$. D'où il paroit que la boule qui frape doit perdre

dre toute ſa viteſſe, & s'arrêter après le choc, dans le cas où $N = 2M$. Mais en general ſa perte eſt $= 2Na : (2M + N)$. Je n'en donne pas l'analyſe, elle me méneroit trop loin.

11. Je crois cependant devoir avertir que par le moyen de cette *Théorie*, il ſeroit aiſé de déterminer les effets abſolus de la réſiſtance d'un milieu, compoſé de molécules doüées d'une parfaite élaſticité, & ſéparées les unes des autres par de petits interſtices; en ſorte que de toutes les molécules qui compoſeroient ce fluide, il n'y auroit jamais que celles qui touchent immédiatement le devant d'un corps mû dans le milieu qui lui réſiſtaſſent & qui reçuſſent du mouvement de ce corps un petit degré de force vive, ſans que d'autres molécules y contribuaſſent en rien, quelque peu éloignées qu'elles fuſſent des premieres, juſqu'à ce que le corps en mouvement vint auſſi à les rencontrer à leur tour; car non ſeulement on prouve que cette ſorte de fluide opoſeroit aux corps, qui ſe mouvroient dedans, une réſiſtance proportionnelle au quarré de leur viteſſe, comme font les fluides ordinaires; mais on tire encore de cette conſideration le moyen de déterminer préciſément combien un corps mû dans un fluide pareil, perdroit actuellement de ſa viteſſe initiale, après avoir parcouru un eſpace donné. Matiere nouvelle, d'une recherche auſſi curieuſe qu'utile dans la pratique, propre à rendre raiſon de divers Phénomènes, & d'autant plus digne d'être approfondie, que perſonne ne l'a encore entrepriſe; auſſi me ſerois-je fait un plaiſir de l'examiner avec ſoin, ſi les bornes de cette Diſſertation, déja trop longue, ne m'en avoient empêché. Peut-être aurai-je occaſion de traiter quelque jour ce ſujet. Mais reprenons le fil de nôtre diſcours.

12. La quantité de cette perte dépend, & de la figure du corps mû, & de ſa conſiſtance, ou de la denſité qu'il a par raport à la denſité du fluide compoſé de molécules élaſtiques dans lequel il ſe meut. Supoſé, par exemple, que le plomb ſoit huit mille fois plus denſe que l'air, & que ce dernier ſoit un fluide compoſé de molécules parfaitement élaſtiques: je dis qu'une

qu'une bale de plomb, chaſſée dans l'air, ſur un plan horiſontal, avec un degré de viteſſe donné, aura perdu la moitié de ſa viteſſe, après avoir parcouru un eſpace égal à peu près à 3700 de ſes diamétres: qu'un cube de plomb, mû le long d'une ligne horiſontale perpendiculairement à l'une de ſes faces, parcoura un eſpace 2770 fois plus grand que ſon côté, pour que ſa viteſſe initiale ſoit auſſi diminuée de la moitié: & qu'avant de ſouffrir une pareille diminution de viteſſe, un cone de plomb iſoſcele, dont l'angle du ſommet eſt droit, ſe mouvant le long de la direction de ſon axe, la pointe en avant, parcoura 924 diamétres de ſa baſe, quoique ce même cone ne parcoure que la moitié de ce chemin, ou 462 de ſes diametres, lorſque ſa baſe eſt opoſée à la réſiſtance de l'air. Et ſi on ſupoſe ce cone équilateral, l'eſpace parcouru, juſqu'à la perte de la moitié de ſa viteſſe initiale, ſera de 3272 diamétres de ſa baſe, en cas qu'il ſe meuve de pointe; car s'il ſe mouvoit, la baſe en avant, ce cone ne parcoureroit que le quart de l'eſpace précedent, ou 818 diamétres de ſa baſe.

13. Ou pour déterminer d'une maniere generale la longueur du chemin que doit parcourir avant de perdre une quantité donnée de ſa viteſſe, tout conoïde régulier dont la baſe eſt un cercle: Soit *AHBD* le conoïde propoſé, qu'on ſupoſe ſe mouvoir dans l'air, la pointe en avant, le long de la direction de ſon axe *ID* perpendiculaire à ſa baſe, *PO* une ordonnée $= x$, *yO*, ou ſa differentielle, $= dx$; *oO*, ou la differentielle de

TAB. XLIII. Fig. 13. l'arc *DO*, $= ds$; *n*, le nombre de fois que la viteſſe initiale du conoïde doit être diminuée; *ln*, le logarithme de ce nombre: Soit enfin $C =$ à la longueur d'un cylindre d'air, perpendiculaire à ſa baſe, de même baſe, & auſſi peſant que le conoïde. Je dis que $Cxx\,ln$ diviſé par $17371780 \int (x\,dx^3 : ds^2)$ exprimera, dans le cas où *x* devient $= IA$, ou au rayon de la baſe, l'eſpace que doit parcourir le conoïde, pour que ſa viteſſe réſiduë, ou ce qui lui reſte de viteſſe, ſoit à ſa viteſſe initiale comme 1 eſt à *n*.

CHAPI-

Digitized by Google

N°.CXXXV.

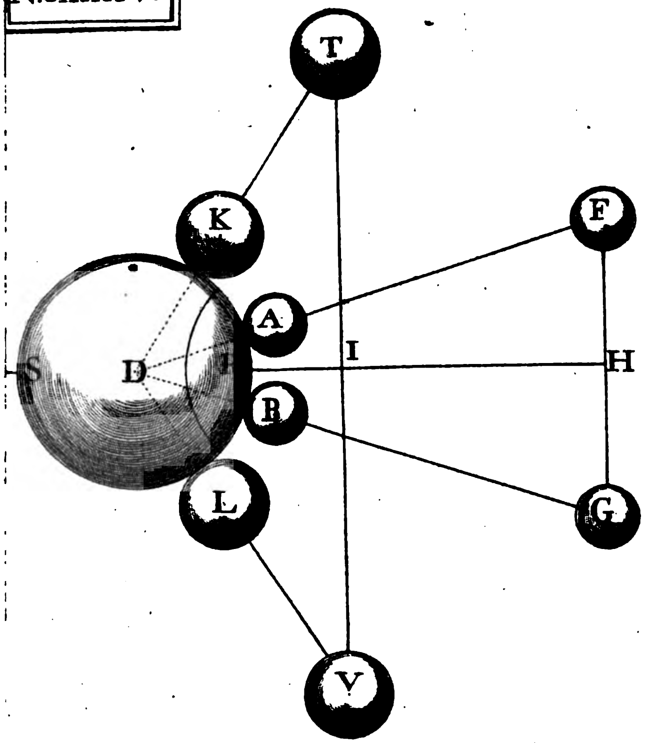
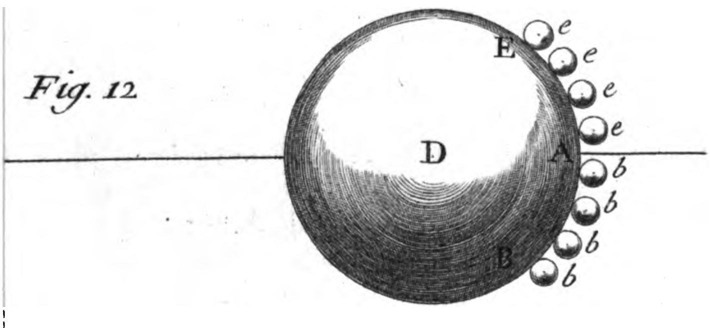


Fig. 12



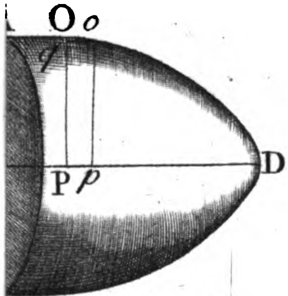


Fig. 13

Digitized by Google

CHAPITRE XIII.

De la réſiſtance des milieux; qu'elle ne change pas les loix de la communication du mouvement. Maniere de calculer la perte de la viteſſe cauſée par la réſiſtance.

1. LA réſiſtance ordinaire, que ſouffrent les corps mûs dans le plein ou dans une matiere fluide, ne donne pas occaſion à beaucoup de ſpéculations nouvelles; & je craindrois avec d'autant plus de raiſon d'ennuyer mon Lecteur, ſi je repetois ce que divers Auteurs ont écrit ſur ce ſujet, que rien ne m'oblige à le faire. En effet, la communication du mouvement des corps durs, dont il s'agit principalement ici, ſe fait de la même maniere dans le plein que dans le vuide. Je m'explique: Toute réſiſtance eſt une eſpece d'effort paſſif, qui ne diminuë ſenſiblement la viteſſe d'un corps, que lorſque ce corps a parcouru un eſpace fini ou ſenſible, dans un tems auſſi fini ou ſenſible.

2. Mais le choc des corps eſt ſi ſubit, quoique ſucceſſif, & d'une ſi petite durée depuis ſon commencement juſqu'à ſa fin, que la réſiſtance du fluide ambiant n'a le tems de cauſer aucun changement ſenſible à la viteſſe que les corps ont dans l'inſtant qu'ils ſe choquent. On peut donc aſſurer, que les loix generales, de même que les regles que nous avons établies & démontrées dans ce Diſcours, & particulierement celles qui concernent la meſure de la force vive, ſeront auſſi inviolablement obſervées dans le plein, qu'elles le ſeroient dans le vuide.

3. Il eſt vrai que peu de tems après le choc, les viteſſes, que les corps ont acquiſes, ſont alterées par la réſiſtance du fluide dans lequel ces corps ſe meuvent, & cela plus ou moins, ſelon la diverſité de la réſiſtance, laquelle dépend de la nature de chaque fluide, & des qualitez qui lui ſont propres. Mais, comme je l'ai déja dit, cet effet de la réſiſtance n'in-

Digitized by Google

fluë en aucune maniere ſur la communication du mouvement. Il en change ſeulement la continuation dans chaque corps en particulier.

4. C'eſt ce changement qu'il s'agiroit d'examiner, ſi la queſtion propoſée l'exigeoit; mais puiſqu'elle ne fait mention que des loix de la communication du mouvement que j'ai traité avec aſſez d'étenduë, je me crois diſpenſé d'entamer une nouvelle queſtion; & ſi j'ajoûte ici quelque choſe, ſur la détermination de l'effet que produit la réſiſtance du fluide ſur les corps qui s'y meuvent, ce n'eſt que par ſurabondance de droit, & par le rapport que cette matiere a avec mon ſujet.

5. Il n'eſt pas difficile d'apliquer à l'effet de la réſiſtance, tout ce que j'ai dit (*Chapitre* XI, §. 2, *& ſuiv.*) pour expliquer la deſtruction & la production des viteſſes actuelles, par une preſſion miſe en œuvre & continuée pendant quelque tems. Cet effet conſiſte à diminuer peu à peu, & par des degrez infiniment petits, la viteſſe d'un corps mû dans un milieu qui lui réſiſte, de même qu'elle peut avoir été produite par des degrez infiniment petits par un effort continué. La loi de la réſiſtance étant donc donnée, il s'agit de trouver les diminutions de viteſſe, ou les viteſſes réſiduës. Soit, par exemple, la réſiſtance de l'air, ou d'un autre fluide uniforme, proportionnelle au quarré de la viteſſe, comme on l'établit communément. Soit AC la direction d'un corps qui ſe
TAB. XLIV. *Fig.* 14. meut dans ce milieu réſiſtant de A vers C. Soit enfin DEF une ligne courbe, dont les appliquées AD, BE, &c. marquent les viteſſes réſiduës.

6. Pour déterminer la nature de cette courbe, je prends à diſcrétion un point fixe A, pour le commencement des abſciſſes; & je m'imagine la courbe AMO, dont les appliquées BM repreſentent les tems que le mobile employe à parcourir les eſpaces AB. Soit donc $AB = x$, $Bb = dx$, $BE = v$, $GE = dv$, $BM = f$, $Nm = dt$; on aura le tems élementaire par Bb, c'eſt-à-dire, la differentielle Nm, ou $dt = adx : v$, parce que ce petit tems eſt en raiſon compoſée de

Digitized by Google

la directe de l'eſpace dx, & de l'inverſe de la viteſſe v. Or l'effet de la réſiſtance, pendant le tems dt, eſt de diminiuer la viteſſe BE d'un degré infiniment petit, qui s'exprime par GE, differentielle de l'appliquée B, & cette diminution momentanée eſt en raiſon compoſée de la réſiſtance & du tems. Ainſi ſupoſant la force qui réſiſte proportionnelle au quarré de la viteſſe, on aura GE, ou $-dv + (vv:aa)\times(adx:v) = vdx:a$, & partant $-adv:v = dx$, ce qui fait voir que la courbe cherchée DEF eſt la logarithmique ordinaire, dont la soû-tangente eſt la conſtante a, priſe arbitrairement pour remplir les homogénes. Et ſi on ſupoſe la viteſſe initiale $AD = a = 1$, AB ſera le logarithme de BE & par conſequent les eſpaces parcourus ſont comme les logarithmes des viteſſes réſiduës.

COROLLAIRE I.

7. On n'a pour déterminer la courbe des tems AMO, qu'à ſubſtituer dans l'équation $dt = adx:v$, la valeur de $dx = -adv:v$, il viendra $dt = -aadv:vv$, dont l'integrale donne $t = aa:v - a$ ou $t + a = aa:v$, ce qui fait voir que AMO eſt la même logarithmique que la précédente miſe en un ſens opoſé, je veux dire qu'ayant prolongé FED vers L, & tiré DP parallèle & égale à AB; il faut faire $BM =$ à l'apliquée PL, pour avoir la courbe AM égale & ſemblable à la courbe DL. Il eſt clair que la courbe AM ſera la courbe des tems, & que les appliquées BM exprimeront les tems que le mobile donné employera à parcourir les eſpaces AB.

COROLLAIRE II.

8. Supoſons en general que la réſiſtance du milieu ſoit en raiſon d'une puiſſance quelconque de la viteſſe dont l'expoſant ſoit $= n$. On parviendra par la même méthode à cette équation, $-dv = (v^n : a^n)\times(adx:v) = v^{n-1}dx : a^{n-1}$,

 ou

ou $-a^{n-1}dv : v^{n-1} = dx$; dont prenant les integrales, il en reſulte $\frac{1}{n-2} a^{n-1} v^{2-n} = x \pm b$. Equation qui prouve que la courbe des viteſſes *DEF*, eſt du genre des hyperboles, lorſque $n > 2$, & des paraboles lorſque $n < 2$; excepté dans le cas où $n = 1$, dans lequel *DEF* devient une ligne droite.

Corollaire III.

9. La courbe des tems *AMO*, pour la puiſſance generale de la viteſſe, ſe détermine en ſubſtituant dans l'équation $dt = adx : v$ la valeur de dx, trouvée par le Corollaire précédent. On aura par ce moyen $dt = -a^n dv : v^n$, & ſon integrale $t \pm c = \frac{1}{1-n} a^n v^{1-n}$; & ſi $n = 1$, l'équation $dt = -a^n dv : v^n$, ſe changera en $dt = -adv : v =$ [parce que dans ce cas, $v = b - x$] $adx : (b - x)$; d'où il paroit que la courbe *AMO* ſera auſſi une logarithmique, dont l'aſymptote eſt *CR*, tirée perpendiculairement ſur la ligne de direction *AC*, du point *C* où la ligne des viteſſes, qui dans ce cas eſt une ligne droite, coupe la même ligne *AC*; enſorte que *BM*, qui au point *C* ſe confond avec l'aſymptote, devient infinie. D'où il s'enſuit, qu'il faut un tems infini au mobile, pour parcourir l'eſpace fini *AC*.

10. Si un mobile eſt continuellement ſollicité à ſe mouvoir en avant, par une force motrice qui le pouſſe par derriere, tandis que la réſiſtance du milieu qu'il traverſe le repouſſe par devant; comme il arrive aux corps peſans qui tombent dans l'air, dans l'eau, ou dans tout autre fluide qui réſiſte à leur mouvement; la viteſſe du mobile ira en augmentant, ou en diminuant, ſelon que la force motrice ſera plus grande, ou moindre que la réſiſtance. La méthode précédente déterminera dans cette ſuppoſition la courbe des viteſſes acquiſes ou réſiduës,

ſiduës, en prenant ici la difference de la force motrice, à la réſiſtance du milieu; cette difference étant la ſeule cauſe de l'acceleration ou de la retardation du mouvement.

11. Ainſi dans le cas où les corps peſans, mis ou jettez perpendiculairement dans un milieu qui leur réſiſte, deſcendent; la force motrice, qui n'eſt autre choſe que leur peſanteur, eſt uniforme & invariable, mais la réſiſtance eſt proportionnelle au quarré de la viteſſe. Il n'y a donc ici qu'à multiplier cette difference, laquelle [en prenant la peſanteur pour l'unité] eſt $= 1 - vv : aa$, par l'élement du tems, ſçavoir par $adx : v$; & l'on aura *GE*, ou $\pm dv = adx : v - vdx : a = (aa - vv) dx : av$, par conſequent $dx = \pm avdv : (aa - vv) = \pm \frac{1}{2} adv : (a - v) \mp \frac{1}{2} adv : (a + v)$, & en integrant $x = \pm \frac{1}{2} al(a - v) \mp \frac{1}{2} al(a + v)$, d'où il paroît que la courbe des viteſſes ſe conſtruit par le moyen de la logarithmique.

12. Ce ſeroit ici le lieu d'examiner la nature des courbes que décrivent les projectiles peſans, jettez obliquement dans l'air; mais comme j'ai traité cette matiere ailleurs, je ne pourrois pas m'étendre ſur ce ſujet, ni renvoyer mon Lecteur à ce que j'en ai publié, ſans me faire connoitre; ce qui ſeroit contre l'intention de *l'Académie Royale des Sciences*.

CHAPITRE XIV.

Nouvelle maniere de déterminer, par la théorie des forces vives expliquée dans cet Ouvrage, le centre d'oſcillation dans les Pendules compoſez.

1. JE finirai cette Diſſertation par quelques remarques ſur le centre d'oſcillation dans les pendules compoſez, fondées ſur la conſervation de la quantité des forces vives, que je me flate qu'on verra avec plaiſir. La recherche de ce centre a toujours paru curieuſe & utile. Entre ceux qui ont entrepris de le déterminer, les uns ſe ſont trompez dans leurs raiſonne-

mens; d'autres n'en ſont venus à bout que par des détours longs & difficiles, & en employant diverſes méthodes tirées de principes qui ne paroiſſent pas toujours aſſez naturels. Des perſonnes intelligentes ont trouvé que le principe qu'employe M. HUGUENS, & qu'il propoſe comme un Axiome, étoit un peu trop hardi; ce principe ayant beſoin lui-même d'être démontré. M. HUGUENS (*) ſupoſe que le centre de gravité d'un pendule compoſé, deſcendu d'une hauteur donnée, ne remonteroit pas plus haut que la hauteur dont il eſt deſcendu, ſi les poids ſimples qui compoſent ce pendule ſe détachoient ſubitement lorſqu'il eſt parvenu dans une ſituation verticale, & que chacun de ces poids remontât ſéparément avec la viteſſe qu'il a acquiſe au moment de ſa ſéparation. La nouvelle théorie du centre d'oſcillation, qu'on trouve dans les *Mémoires de l'Académie* de l'année 1714, n'eſt apuyée ſur aucune ſupoſition gratuite; elle eſt même generale: mais ce que l'on y a employé de méchanique, quoique ſolidement établi, en rend la démonſtration difficile & moins à la portée de tout le monde.

2. La méthode, dont je me ſers, eſt d'autant plus remarquable, que ſans recourir à une nouvelle hypothéſe, on déduit de la ſeule conſervation des forces vives la détermination du centre d'oſcillation, & qu'elle découvre en même tems le fondement & la raiſon de l'identité du centre d'oſcillation avec le centre de percuſſion, qu'un célèbre Auteur a confondu mal-à-propos; perſuadé que ces deux centres étoient eſſentiellement compris ſous une même idée.

TAB. XLIV. *Fig.* 15. 3. Concevons un pendule compoſé, par exemple, de trois poids *A*, *B*, *C*, attachez ou enfilez à une ligne infléxible *HA*, qui faſſe ſes oſcillations autour de l'axe *H*. Soit *HA* la ſituation horiſontale, d'où le pendule commence à deſcendre, & qu'il parvienne enſuite dans la ſituation verticale *Ha*; les viteſſes acquiſes ſeront comme les diſtances; parce que les poids attachez à la ligne infléxible *HA*, ne ſçauroient ſe mouvoir l'un ſans l'autre. Concevons preſentement que les poids *A*, *B*, *C*, étant

(*) Voyez ſon Traité *De Horolog. Oſcillat.* Hyp. 1. pag. 93.

Digitized by Google

étant libres, forment autant de pendules ſimples, afin que chacun puiſſe deſcendre ſéparément, & parvenir à la ſituation verticale *Ha*, après avoir fait une demi-oſcillation; dans ce cas de liberté, les viteſſes acquiſes ſeront par la regle de GALILE'E, en raiſon ſoû-doublée des hauteurs *Ha*, *Hb*, *Hc*.

4. Ceci connu, je demande qu'on m'accorde ſeulement que la ſomme des forces vives des poids eſt la même, après que les poids ſont deſcendus auſſi bas qu'ils le peuvent, ſoit que ces poids deſcendent conjointement attachez à une même ligne infléxible, ſoit que chacun de ces poids deſcende librement, comme un pendule ſimple: il me ſemble que cette ſupoſition ſouffre beaucoup moins de difficulté que celle de M. HUGUENS, puiſque la deſcente des poids, dans l'un & l'autre cas, eſt l'effet d'une même cauſe, je veux dire de la peſanteur qui les oblige de deſcendre. C'eſt donc auſſi la peſanteur qui produit dans la ſomme des poids une quantité déterminée de force vive, de quelque maniere qu'ils deſcendent, pourvû que chaque poids deſcende de la même hauteur qu'il deſcendroit s'il faiſoit un pendule ſimple; la choſe me paroit évidente.

5. Prenant donc la ſomme des forces vives, pour le cas où les poids ſont attachez à une ligne infléxible, & la ſomme des mêmes forces pour le cas de leur deſcente libre; formons une égalité entre ces deux ſommes, cette égalité déterterminera le centre d'oſcillation, ou la longueur du pendule ſimple *HG*, iſochrone avec le compoſé *HCBA*. Pour cet effet, ſoit $HA = a$, $HB = b$, $HC = c$, & $HG = x$; la viteſſe du centre *G* parvenu en *g*, ſur laquelle les autres viteſſes doivent être reglées, peut être nommée comme on voudra; je la nomme donc auſſi *x*; mais les viteſſes des poids du pendule compoſé étant ſimplement proportionnelles à leurs diſtances du point *H*, la viteſſe du poids *A* ſera $= a$, la viteſſe du poids $B = b$, & la viteſſe du poids $C = c$; donc la ſomme de leurs forces vives ſera $= aaA + bbB + ccC$; & dans le cas où les poids deſcendent ſéparément, leurs viteſſes, acquiſes quand ils ſont parvenus au point le plus bas, étant, par la regle de

GALI-

Galile'e, en raiſon ſoû-doublée des hauteurs verticales, la viteſſe du centre d'oſcillation G ayant été nommée x, on aura la viteſſe du poids libre $A = \sqrt{ax}$, la viteſſe du poids libre $B = \sqrt{bx}$, & celle du poids libre $C = \sqrt{cx}$; d'où il réſulte que la ſomme de leurs forces vives eſt $= axA + bxB + cxC$, & ces deux ſommes miſes en équation $aaA + bbB + ccC = axA + bxB + cxC$, donnent $x = \frac{aaA + bbB + ccC}{aA + bB + cC}$, ce qui fait voir que la longueur du pendule ſimple iſochrone au pendule composé, ſe trouve en prenant la ſomme des produits des poids par les quarrez de leurs diſtances à l'axe du pendule, & diviſant cette ſomme par la ſomme des produits des poids par leurs ſimples diſtances. Et c'eſt auſſi préciſément en quoi conſiſte la (*) regle que M. Huguens a donnée pour la détermination du centre d'oſcillation, établie enſuite & fondée ſur des principes inconteſtables, & confirmée de nouveau à preſent par la loy de la conſervation des forces vives.

(*) Voyez ſon Traité *De Horolog. Oſcillat.* pag. 100.

Fin du premier Diſcours.

ADDI-

ADDITION

Au Diſcours In magnis voluiſſe ſat eſt, *ſur les loix de la communication du Mouvement,*

Où l'Auteur *entreprend de donner une explication probable de la cauſe phyſique du reſſort.*

L'Auteur ſouhaite que cette Addition ſoit lûë après le premier Chapitre de ſon Diſcours.

1. J'AY compoſé ce Diſcours *In magnis voluiſſe ſat eſt*, dans le deſſein de ſatisfaire au Prix propoſé par l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1724. Il s'y agiſſoit de déterminer les loix de la communication du mouvement des corps parfaitement durs. Les Philoſophes ayant eu de tout tems differentes idées ſur la nature de la dureté des corps, & l'Académie n'ayant point expliqué en quel ſens Elle vouloit qu'on prit ce terme, ni averti que par dureté parfaite, Elle entendoit une infléxibilité abſoluë; J'ai crû qu'il m'étoit libre d'attacher au mot de *dureté* l'idée qui me paroiſſoit & qui me paroit encore la plus convenable à la nature des choſes.

2. Sur ce pied, j'ai pris *dureté parfaite* & *roideur infinie*, pour des termes ſynonimes : tout corps qui aplati par le choc d'un autre corps, ſe remet dans ſa premiere figure, étant appellé *corps roide* ou *élaſtique*, j'ai conçû auſſi que plus cette roideur,

ou élaſticité, étoit forte, plus auſſi cet aplatiſſement devoit être petit; & que par conſéquent le corps doüé de cette faculté, devoit d'autant plus aprocher de la nature des corps parfaitement durs, que ſon élaſticité étoit grande; en ſorte qu'il n'y avoit plus qu'à ſupoſer une roideur infinie ou immenſe, pour avoir des corps parfaitement durs, ou infiniment peu fléxibles.

3. Mon but étoit en cela de concilier la dureté parfaite avec les loix de la nature; ayant fait voir, dans mon Diſcours, que l'opinion commune qui ſupoſe les corps parfaitement durs, dénuez de toute fléxibilité, même d'une fléxibilité infiniment petite, ne pouvoit pas ſubſiſter avec ces mêmes loix; puiſqu'elle ne ſçauroit s'accorder avec quelques-unes de ces loix, qu'elle n'en renverſe en même tems d'autres. Cependant Meſſieurs de l'Académie ont declaré dant l'Avertiſſement imprimé à la tête de la Piece qui a remporté le Prix, qu'en propoſant la queſtion, ils ont donné au mot de *dureté* ce même ſens que je rejette, & qui, ſelon moi, eſt phyſiquement impoſſible. Parlant au reſte de mon diſcours avec éloge, je commencerai par les remercier de la bonté qu'ils ont eu d'y faire attention, & j'avoüerai enſuite franchement, que ne pouvant pas raiſonner ſur un ſujet dont la ſuppoſition me paroiſſoit oppoſée aux loix de la nature, je ne m'y ſuis point attaché en compoſant cet ouvrage; je crus devoir ſubſtituer à cette idée, un examen general du choc des corps à reſſort; & conſiderant enſuite qu'en ſupoſant un reſſort infiniment vigoureux, il en reſultoit des corps infiniment peu fléxibles par les plus grands chocs, je me formai une notion juſte & diſtincte de la dureté parfaite. En effet, un aplatiſſement très-petit pouvant paſſer pour un non aplatiſſement abſolu; j'imitois en cela les Géométres & les Analyſtes, qui comparant à des grandeurs finies les grandeurs infiniment petites, ou les élemens, négligent ces dernieres, & ne les conſiderent que comme des points ou des zeros abſolus.

4. J'ai auſſi lieu d'être content du bon effet que mon Mémoire

moire a produit. Les forces vives, ſi differentes des forces mortes, commencent à être goûtées; & j'oſe me flater que la veritable maniere de les eſtimer, ſera bien-tôt connuë: on n'a pour cela qu'à peſer, avec une attention deſintereſſée, le poids des raiſonnemens & des démonſtrations, qu'on trouve en grand nombre dans mon diſcours. L'eſpoir même de remporter le Prix ne m'eſt pas ôté; Meſſieurs de l'Académie ſe ſont reſervez le pouvoir de l'adjuger à des Mémoires envoyez les années précédentes, & le mien convient parfaitement au ſujet propoſé pour l'année 1726, où *l'on exige les loix du choc des corps à reſſort, &c.*

5. Mais Meſſieurs de l'Académie ayant jugé à propos d'y ajoûter une nouvelle condition, ſur laquelle je ne me ſuis point arrêté en 1724, parce qu'il ne s'y en agiſſoit pas alors; il eſt juſte de l'examiner à preſent: ces Meſſieurs ne demandent pas ſimplement *les loix du choc des corps élaſtiques*; mon premier Diſcours y auroit ſatisfait: ils veulent de plus que ces mêmes loix ſoient déduites *d'une explication probable de la cauſe phyſique du reſſort;* il me reſte donc, pour ſatisfaire au ſujet dans toute ſon étenduë, d'ajoûter ici à mon Mémoire une Théorie de l'élaſticité des corps, que je me ſuis formée il y a déja long-tems; & je le fais d'autant plus volontiers, que cette Théorie m'eſt particuliere, & que par ſon moyen je rends une raiſon probable & méchanique, non ſeulement de la cauſe phyſique du reſſort, mais encore des principaux phénomènes que l'on remarque dans les fluides élaſtiques.

6. Il ſeroit inutile d'entrer dans un examen trop étendu des differentes opinions que les Philoſophes ont euës ſur la cauſe du reſſort; auſſi me contenterai-je de faire quelques réflexions ſur les plus vraiſemblables. Je ne ſçai ſi ceux qui admettent dans les corps élaſtiques des corpuſcules élementaires, doüez naturellement d'une vertu *expanſive*, ſans expliquer d'où leur vient cette proprieté, méritent qu'on les refute. Ces Philoſophes ſupoſent évidemment ce qui eſt en queſtion, & ſi cette vertu, ſelon eux innée & primitive, eſt indépen-

dante de l'arangement des particules dont les corps élaſtiques ſont compoſez; il eſt auſſi aiſé de l'atribuer tout d'un coup aux maſſes entieres des plus grands corps, qu'à la moindre de leurs particules: mais qui ne voit que ce ſeroit ouvrir de nouveau un aſile à l'ignorance, & faire revivre les qualitez occultes décriées avec tant de raiſon.

7. Les Phyſiciens modernes ſont allez plus loin; ils tâchent d'employer les loix de la Méchanique à expliquer la cauſe du reſſort. Mais je n'en connois aucun, qui ait ſuffiſamment éclairci cette matiere, & levé les difficultez qui l'envelopent. On en trouve de bien grandes, pour peu qu'on examine leurs explications, qui loin d'être fondées ſur la ſaine Méchanique, en détruiſent ſouvent les premiers principes. Ils conviennent preſque tous, qu'il faut recourir à l'action d'un fluide, ou d'une matiere ſubtile, qui coulant dans les pores des corps à reſſort, leur donne la faculté de ſe débander & de ſe reſtituer dans leur premier état, lorſque la force qui les avoit comprimez ceſſe. A parler generalement, ces Meſſieurs ont raiſon d'admettre une matiere ſubtile, qui par ſon mouvement ſoit la cauſe primitive du reſſort des corps. Mais il ne ſuffit pas de ſupoſer ſimplement un fluide perpétuellement agité; il faut de plus rendre raiſon des circonſtances qui l'acompagnent, & faire voir quelle eſt la nature d'une agitation capable de produire le reſſort; toute ſorte de mouvement n'étant pas propre pour cela.

8. Quelques-uns ſoutiennent, par exemple, qu'un corps élaſtique venant à être comprimé par quelque force exterieure, la matiere ſubtile qui remplit ſes pores, & qui avoit été contrainte d'en ſortir, rentre dans ces mêmes pores d'où elle avoit été chaſſée, dès que la force exterieure ceſſe d'agir; d'où il ſuit neceſſairement, ſelon eux, que ce corps eſt obligé de reprendre ſa premiere figure; ces Meſſieurs faiſant conſiſter l'élaſticité dans cet effort, ſans ſe mettre en peine d'expliquer ce qui contraint la matiere ſubtile à rentrer dans ces mêmes cellules qu'elle occupoit auparavant, ni pourquoi elle s'éforce, du-

Digitized by Google

durant la compreſſion, de regagner le poſte qu'elle avoit abandonné. Diront-ils, que c'eſt la maſſe de la matiere ſubtile ambiante, qui par ſa réſiſtance repouſſe celle qui ſort, & la chaſſe dans les pores retrécis, lorſqu'ils ceſſent d'être comprimez par une force exterieure? Mais cette raiſon, ſpécieuſe en aparence, ne ſauroit ſubſiſter avec les premiers principes de l'hydroſtatique; puiſqu'on prouve par eux, que la plus petite portion d'un fluide, enfermée dans une envelope, & miſe au milieu d'une maſſe du même fluide, réſiſte & fait équilibre avec la maſſe entiere du fluide qui l'environne; enſorte que quand même on forceroit une partie du fluide à ſortir, en comprimant l'envelope qui le contient, & que nous ſupoſerons pour cet effet fléxible & percée de toutes parts, loin que ce même fluide s'éforçât de rentrer dans l'envelope, après la compreſſion, & de remplacer celui qui en avoit été chaſſé, l'hydroſtatique nous aprend au contraire, que la petite portion de fluide reſtée dans l'envelope doit ſoûtenir, par ſa réſiſtance paſſive, la preſſion de la maſſe du dehors, & que toutes les parties du fluide, tant grandes que petites, demeurent entr'elles en équilibre. Supoſons par exemple, une veſſie remplie d'air ordinaire, percée de toutes parts, & expoſée au grand air, & que comprimant cette veſſie entre ſes mains, on oblige l'air qu'elle contient, ou une partie de cet air, à s'échaper; ſoûtiendra-t-on, que l'air exterieur retournera dans la veſſie, & la renflera avec impetuoſité? non ſans doute, & l'experience le démentiroit, puiſqu'elle fait voir que la veſſie demeure flaſque, & dans l'état de compreſſion où on l'avoit miſe, ſoit que l'air exterieur auquel on l'avoit expoſée ſoit calme, ou agité par un grand vent. Je ne crois pas au reſte qu'on puiſſe m'objecter que les cellules, ou pores des corps élaſtiques, ayent une ſtructure differente des trous de la veſſie percée. Car, 1°. ſelon cette opinion, les cellules des corps élaſtiques doivent être ouvertes de toutes parts, puiſqu'elles donnent un libre paſſage à la matiere ſubtile. En ſecond lieu, leurs parois doivent être fléxibles comme celles de la veſſie, puiſqu'elles changent de figure par

la compreſſion ; à moins qu'on ne ſoutienne que ces pores, quoique fléxibles, ont outre cela un degré de roideur, qui les fait retourner à leur premiere figure. Mais cette roideur n'étant autre choſe que l'élaſticité même, elle demanderoit une nouvelle explication : ce ſeroit d'ailleurs ſupoſer ce qui eſt en queſtion.

9. D'autres attribuent la cauſe phyſique du reſſort à un principe peu different de celui que nous venons de refuter : ils conſiderent les pores des corps élaſtiques, comme autant de petits tuyaux capables d'être retrécis par la compréſſion ; enſorte que la matiere ſubtile ou étherée, coulant rapidement au travers de ces petits canaux, choque continuellement leurs parois interieures. D'où il ſuit, que les chocs lateraux deviennent plus forts, quand par la compreſſion les paſſages ſe retréciſſent, & que par conſequent la matiere ſubtile qui y coule doit acquerir par là une plus grande rapidité. C'eſt, ſelon ces Meſſieurs, de l'augmentation de ces efforts lateraux de la matiere ſubtile, que dépend l'effort total que le corps comprimé fait pour ſe rétablir dans ſa premiere diſpoſition, & en quoi conſiſte la nature du reſſort.

10. Si cette explication a quelque vrai-ſemblance, il faut avoüer qu'elle eſt bien legére, & que pour peu qu'on raiſonne on en découvre l'illuſion : car outre que ce que nous venons de dire tombe en partie ſur cette maniere d'expliquer la cauſe du reſſort, ce que je vais ajoûter achevera d'en faire ſentir le foible. Il eſt vrai, & le bon ſens le dicte, qu'un fluide qui coule doit acquerir d'autant plus de viteſſe, que l'endroit par où il eſt contraint de paſſer eſt plus étroit ; ſans quoi il ſeroit impoſſible que des quantitez égales de fluides paſſaſſent en même tems par deux ouvertures inégales en largeur : il n'eſt pas moins vrai, qu'une plus grande viteſſe dans le fluide augmente la violence avec laquelle il agit ſur les parois de ſon canal ; & que plus le fluide coule vite, plus il s'éforce d'élargir ſon paſſage. Auſſi voyons-nous qu'une riviére prend un cours rapide, quand d'un lit large & ſpacieux elle eſt contrainte de ſe reſſer-

Digitized by Google

reſſerrer entre deux rivages hauts, étroits & eſcarpez, & que les rivages ſouffrent bien plus de la violence du courant, que dans les endroits où l'eau trouve aſſez d'eſpace pour s'étendre en largeur. Mais il faut faire attention à la circonſtance, qui fait que l'eau accélére ſa courſe quand elle commence à être reſſerrée entre deux rivages étroits. En effet, la choſe n'arrive que lorſque l'eau eſt contrainte de couler dans ſon lit, ſans pouvoir échaper de côté ni d'autre. Car ſi à l'entrée du paſſage étroit, l'eau trouvoit d'autres routes ouvertes, ou une plaine de niveau, il eſt certain qu'elle n'iroit pas ſe fourrer toute entiére dans ce paſſage; mais qu'une partie de l'eau, trouvant dans le détroit plus de réſiſtance à ſon cours qu'auparavant, elle s'écouleroit par les routes qu'elle trouveroit ouvertes, ou ſe répandroit dans la plaine; enſorte que le détroit ne recevroit de l'eau qu'à proportion de ſa capacité; la nature des fluides étant de ſe tourner à la rencontre d'un obſtacle, & d'enfiler les routes où il n'y en a point: d'où il eſt aiſé de conclure que la viteſſe du courant n'y ſeroit nullement augmentée.

11. Mais pour revenir à nôtre ſujet, on doit diſtinguer entre le mouvement d'un fluide contraint, & le mouvement d'un fluide libre. Lorſque le mouvement ſe fait dans un canal d'inégale largeur, dont le fluide ne ſauroit échaper; il eſt ſans contredit que le fluide s'accélérera toutes les fois qu'il paſſera d'un endroit plus large dans un endroit plus reſſerré; mais ſi le fluide a un mouvement rectiligne libre, & qu'il puiſſe s'étendre de tous côtez à la rencontre de la moindre réſiſtance, je dis que ſi on lui opoſe quelque obſtacle, un tuyau, par exemple, ouvert par les deux bouts, & couché dans la même direction, un cylindre de ce fluide, égal en capacité au tuyau, enfilera ce tuyau & le traverſera d'un bout à l'autre, avec une viteſſe égale à celle de toute la maſſe du fluide qui reſtera hors du tuyau. Je dis plus, c'eſt que ſi on preſſe aſſez fortement ce tuyau, que je ſupoſe d'une matiere molle ou pliable, pour le rendre plus étroit, le fluide ne le traverſera pas avec plus de

de rapidité qu'auparavant ; puiſque le ſurperflu de ce fluide que le tuyau ne pourra plus contenir regorgera, & paſſera librement à côté. On ne ſentira donc aucune réſiſtance de la part du fluide interieur ; ſa preſſion étant contre-balancée par celle du fluide exterieur qui lui eſt égale. La preuve en eſt aiſée ; ſoit une quantité ſuffiſante de brins de paille entiers, d'égale longueur, & liez legérement en botte, opoſez au courant d'une riviére rapide, dans une ſituation fixe & parallèle à la direction du fil de l'eau, afin que l'eau puiſſe en pénétrer librement les tubules : je dis, que quoiqu'on ſerre cette botte de paille entre ſes mains, juſqu'à retrécir la capacité des petits tuyaux qui la compoſent, on ne ſentira cependant de réſiſtance que celle qui peut provenir de la roideur même de la paille, & qu'on ſentiroit hors de l'eau de même que dans l'eau : la raiſon en eſt manifeſte, car dès que les chalumeaux deviennent plus étroits, l'eau ne pouvant plus y entrer avec la même facilité, il n'y en paſſe plus qu'une quantité proportionnée à leur ouverture diminuée, le ſurplus ſe détourne librement de côté, & pourſuit, conjointement avec le reſte de l'eau, le mouvement commun de la riviére ; ainſi n'y ayant aucune force qui contraigne l'eau de paſſer par les tuyaux, au de là de ce que leur cavité en peut recevoir ſans effort ; il eſt évident que l'eau n'acquerrera aucune augmentation de viteſſe en coulant au travers de ces tuyaux retrécis.

12. L'aplication de ce que nous venons de dire eſt facile. Les partiſans de l'opinion que je combats, doivent néceſſairement admetre dans les corps élaſtiques, des pores ouverts en forme de petits tuyaux parallèles, & diſpoſez de même que les brins de paille de la botte dont j'ai parlé, & un mouvement, dans la matiere ſubtile qui traverſe ces pores, ſemblable à celui de l'eau de la riviére qui coule au travers des chalumeaux : mais on a démontré que quand même les chalumeaux viendroient à ſe retrécir, l'eau n'en auroit pas pour cela plus de force à les dilater : d'où il s'enſuit, ſelon moi, que la matiere ſubtile, qui pénétre les pores tubuleux des

des corps élaſtiques, ne doit pas faire plus d'effort pour les élargir, quoique retrécis par une compréſſion étrangére. Loin de ſe redreſſer, le corps reſteroit donc aplati; ce ne ſeroit donc plus un corps élaſtique. Donc cette maniere d'expliquer la cauſe du reſſort n'eſt pas la véritable.

13. Je ne ſais, ſi ceux qui ſont conſiſter l'air dans l'amas d'une infinité de petites particules branchuës, pliables, & perpétuellement agitées, qui nageant dans l'éther, tendent naturellement a ſe redreſſer, lorſque quelque cauſe extérieure les comprime, s'aperçoivent qu'ils tombent dans le défaut qu'on nomme *pétition de principe*. Qui ne voit en effet, que cette tendance à ſe redreſſer, que ces Meſſieurs attribuent gratuitement aux petites particules repliées de l'air, eſt préciſément cela même dont il s'agit de déterminer la cauſe.

14. Si quelques Phyſiciens ſont conſiſter la cauſe du reſſort, dans l'effort d'un fluide imperceptible, qui ſe mouvant avec rapidité dans les pores des corps élaſtiques, tâche continuellement à ſe dilater par quelque force centrifuge; ce ſont ceux qui, à mon avis, aprochent le plus de la vérité; pourvû que ſe renfermant dans les bornes de la nature, ces Philoſophes n'attribuent pas la cauſe de cette force à quelque vertu ou faculté immatérielle & imaginaire, telles que ſont l'antipathie, & la ſimpathie.

15. Pour en venir maintenant à l'explication de ma Théorie ſur la cauſe probable de l'élaſticité des corps à reſſort; je commencerai par dire que j'adopte pour principe *la force centrifuge*, mais priſe dans un ſens intelligible. J'entends par ce mot, la force qu'ont tous les corps étant mûs en rond, ou ſur quelqu'autre ligne courbe: force, qui conſiſte dans l'effort que tout corps fait de ſe mouvoir en ligne droite, en vertu de la loi generale de la nature, qui veut que tout corps continue autant qu'il eſt en lui de ſe mouvoir ſuivant la direction qu'il a en chaque inſtant; ainſi pour détourner un corps de ſon mouvement rectiligne, & pour lui faire décrire une ligne courbe, il faut une action continuellement apliquée, qui entretienne le

le mouvement en ligne courbe; parce qu'autrement le corps s'échaperoit ſuivant la tangente de la courbe, ſi cette action venoit ſeulement à ceſſer un moment: or comme il n'y a point d'action ſans réaction, & que l'action, qui détourne le corps de ſon mouvement rectiligne, eſt une impulſion ou preſſion extérieure, il eſt viſible que la réaction qui ſe fait ſentir de la part du corps en mouvement, n'eſt autre choſe que cette réſiſtance, ou plûtôt cette *rénitence* qu'on rencontre en voulant changer ſon état, laquelle dépend en partie de l'inertie, ou de la quantité de matiere, & en partie de la viteſſe avec laquelle le corps ſe meut. Telle eſt *la force centrifuge* que j'admets.

16. Ce n'eſt point une qualité imaginaire, puiſqu'elle a des proprietez très-réelles, que d'habiles Géométres ont démontrés, & entr'autres M. HUGUENS, dans les beaux Théorèmes qu'il a le premier publiez, à la fin de ſon Traité *De Horologio oſcillatorio*. On conclud aiſément du ſecond & du troiſiéme de ces Théorèmes, que la force centrifuge d'un corps mû ſur la circonference d'un cercle, eſt comme le produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe, diviſé par le rayon; je veux dire, en raiſon compoſée de trois raiſons, de la ſimple directe de la quantité de matiere, de la doublée directe de la viteſſe, & de la ſimple reciproque du rayon. Ce Théorème me ſervira à expliquer la cauſe d'un des plus curieux Phénomènes qui ſe remarque dans les fluides élaſtiques, & qu'on ſait être attaché à leur nature. Ce Phénomène, que l'expérience a découvert, conſiſte en ce que la force de l'élaſticité de tout fluide comprimé augmente dans la proportion du degré de denſité auquel on le réduit. Si l'air de conſiſtance naturelle, renfermé, par exemple, dans une eſpace, peut ſoutenir, par la force de ſon reſſort, une colonne de vif-argent de 28 pouces de hauteur; ce même air en ſoutiendra une deux fois plus haute, réduit à un volume deux fois plus petit, ou, ce qui revient au même, ſi dans le même eſpace, où cet air eſt renfermé, on introduit de nouveau une quantité d'air éga-

le

le à celle qui y étoit déja. Quoiqu'on ſe ſoit aſſuré de la vérité de ce fait par un grand nombre d'expériences réiterées; je ne ſache pourtant perſonne qui ait entrepris d'en rendre une raiſon phyſique. Et comment l'auroit-on fait? les Théories publiées juſqu'ici ſur la cauſe du reſſort, ont ſi peu de fondement dans les loix de la nature, qu'on ne ſauroit en déduire une explication vrai-ſemblable de ce même Théorême, que ma Théorie dévelope avec tant de facilité. Je me flatte qu'on en ſera pleinement convaincu, ſi on ſe donne la peine d'examiner avec un peu de ſoin, ce que j'aurai l'honneur de dire dans la ſuite de ce Mémoire.

17. J'ai déja inſinué (*Art.* 7) que la cauſe generale & primitive du reſſort des corps, tant fluides que ſolides, dépend du mouvement d'une matiere ſubtile. Je ne dis pas que cette matiere, étant en mouvement, devienne elle-même élaſtique: mais le mouvement de cette matiere ſubtile devant néceſſairement entrainer avec rapidité les particules les plus groſſiéres qui nagent dedans; ces particules ſont par cela ſeules déterminées à ſe mouvoir en rond, & acquiérent dès-là une force centrifuge (*), telle qu'agiſſant avec violence contre la ſurface intérieure de l'endroit où elles ſont renfermées, elles s'éforcent continuellement d'élargir la priſon qui les retient. C'eſt de cet effort dont dépend la force du reſſort. Voici de quelle maniere je conçois la production de cet effet.

18. Soit un eſpace, par exemple, un recipient d'une figure quelconque, rempli de matiere ſubtile: on ſait aſſez que cette matiere, qui paſſe ſans peine par les interſtices les plus étroits de tous les corps ſenſibles, traverſera avec la même facilité les pores du récipient: je ſupoſe qu'outre la matiere ſubtile contenuë dans le récipient, il y a quantité de corpuſcules trop groſſiers pour pouvoir s'échaper au travers des pores du récipient, mais qui nageant librement dans la matiere ſubtile, laiſſent entr'eux des intervalles ſi ſpatieux, que tous ces corpuſcules, ramaſſez en un tas, n'ocuperoient peut-être pas la

(*) Voyez l'art. 14.

cent-milliéme partie du récipient. Je ſupoſe enfin, que ces mêmes corpuſcules, tous extrêmement ſuſceptibles de mouvement, le ſont pourtant inégalement, les uns plus, les autres moins, à cauſe de la diverſité de leurs figures.

19. Juſques-ici j'ai conſideré la matiere ſubtile comme étant en repos dans le récipient. Voyons à preſent ce qui doit arriver, lorſque cette matiere, ſe ſuccedant continuellement à elle-même, traverſe avec rapidité le récipient qu'elle pénétre de toutes parts. Il eſt évident, que ces corpuſcules, que leur groſſiéreté empêche de s'échaper au travers des pores du récipient, emportez çà & là par le cours violent de cette matiere, ne peuvent qu'être en une agitation extrêmement confuſe, & ſe choquer les uns les autres dans l'irrégularité de leurs mouvemens. Mais ces corpuſcules, agitez ainſi en tous ſens, s'embaraſſans les uns les autres par des mouvemens rectilignes opoſez, chacun d'eux ſe trouvera bien-tôt déterminé à ſe mouvoir de la maniere où il ſera le moins en obſtacle au mouvement des autres corpuſcules; je veux dire, à changer ſon mouvement droit en un mouvement circulaire autour d'un centre; ainſi chaque corpuſcule agité, que je nommerai dans la ſuite *mobile circulant*, décrira ſon propre cercle, plus ou moins grand, ſelon qu'il aura plus ou moins de viteſſe; car j'ai déja remarqué, que tous les mobiles circulans ne reçoivent pas un même degré de viteſſe par l'agitation de la matiere ſubtile.

20. Il y aura donc differens ordres de mobiles circulans; & entre ceux qui ſont d'un même ordre, pluſieurs pourront ſe mouvoir autour d'un centre commun, ſur des circonferences égales, & décrire differens plans, qui tous paſſeront par le centre commun de leur mouvement; en ſorte que toutes les circonferences, que ces mobiles circulans décriront autour d'un même centre, ſeront autant de grands cercle d'une ſphére, & la multitude de ces mobiles pourra devenir ſi grande, que toute la ſurface ſphérique ſera comme couverte de ces petits mobiles, dont les mouvemens rapides & divers parcoureront toujours des circonferences égales, ou au moins des

arcs

arcs de grands cercles: je dis des arcs, car il arrivera à tout moment que pluſieurs mobiles circulans ſe rencontrans aux points où leurs cercles ſe croiſent, ſe détourneront de leur route ſans rien perdre de leur viteſſe, parce que le mouvement de la matiere ſubtile les entretient toujours dans le même dégré de viteſſe qu'elle leur a une fois communiquée. D'où il eſt aiſé de conclure, que les arcs décrits en divers plans par chaque mobile, ſeront toujours des portions de grands cercles. Car ſi on ſupoſoit qu'un mobile décrivit un petit cercle avec une viteſſe égale, il acquerreroit dès-là une force centrifuge prévalante, qui feroit étendre ſur la ſurface ſphérique le petit cercle qu'il décrit, juſqu'à ce qu'il ſe changeât en un grand cercle, & que ſa force centrifuge devint égale à celle des autres mobiles.

21. Mais comme la multitude des mobiles circulans d'un même ordre eſt ſans doute beaucoup trop grande, pour qu'ils puiſſent tous ſe mouvoir commodément, & ſans s'embarraſſer ſur une même ſurface ſphérique; on conçoit aiſément qu'il doit ſe former un grand nombre de ces ſurfaces ſphériques, dont chacune ſe mouvra autour de ſon centre particulier; à peu près comme font les abeilles, (s'il m'eſt permis de me ſervir de cette comparaiſon) qui ſe partagent en divers eſſains, lorſqu'elles ſont trop nombreuſes pour n'en compoſer qu'un ſeul.

22. Conſiderons à preſent les diſpoſitions que prendront dans le récipient toutes ces ſurfaces ſphériques, & l'effort qu'elles font, les unes ſur les autres, & contre les parois intérieurs du récipient qui les empêche de ſe dilater; & nous comprendrons, 1°. que toutes les ſurfaces, grandes & petites, de tous les degrez, ſeront diſperſées dans l'étenduë du récipient, de la même maniere dont DESCARTES a conçu que l'Univers étoit rempli de tourbillons de toute ſorte de grandeur. Par quelle raiſon y auroit-il en effet dans une partie du récipient, plus de ſurfaces ſphériques d'un certain ordre, que dans toute autre partie? 2°. Supoſant donc les plus grandes ſphéres

Digitized by Google

également diſperſées dans toute la cavité du récipient; celles qui les ſuivent en grandeur occuperont les intervalles que les premieres laiſſeront entr'elles, de même que celles du troiſiéme ordre ſe logeront dans les interſtices des ſecondes, & ainſi de ſuite à l'infini; en ſorte que chaque ſurface ſphérique ſera environnée de toutes parts d'une infinité de ſurfaces plus petites dans tous les degrez poſſibles. 3°. Et comme chacune de ces ſurfaces fourmille de mobiles, qui circulent avec une viteſſe convenable à la grandeur de leurs ſphéres, & que chacun de ces mobiles acquiert par cette circulation une force centrifuge; il eſt clair, que toutes ces ſphéres, dont l'intérieur n'eſt rempli que de matiere ſubtile, s'efforceront continuellement de ſe dilater en tout ſens; tous les points de leurs ſurfaces tâchant en même tems de s'éloigner du centre de leur mouvement. On pourroit donc comparer ces ſphéres à ces veſſies d'eau de ſavon, que l'on dilate par le moyen de l'air introduit par un chalumeau; avec cette difference pourtant, que les ſurfaces de celles-ci ſont pouſſées du dedans au dehors par une force étrangère, au lieu que les ſurfaces ſphériques tendent d'elles-mêmes à ſe dilater en dehors, par la force centrifuge qui reſide dans ces mêmes mobiles circulans dont chaque ſurface ſphérique eſt composée. 4°. Auſſi chacune de ces ſphéres groſſiroit-elle actuellement par la dilatation de ſa ſurface, ſi les ſphéres voiſines qui font de pareils efforts pour s'étendre, ne l'en empêchoient. 5°. Mais y ayant un parfait équilibre entre les préſſions, par le moyen deſquelles ces ſphéres agiſſent les unes ſur les autres, il faut de néceſſité que chacune de ces ſphéres, tant grandes que petites, ait une force égale, qui contrebalance l'effort de celles qui l'environnent, & l'empêche de ceder à leur préſſion.

23. Tout ceci bien entendu, j'en tire les conſéquences ſuivantes: 1°. Il faut que les mobiles qui circulent ſur des ſurfaces ſphériques de differentes grandeurs, ayent des viteſſes qui ſoient en raiſon ſou-doûblée des rayons de leurs ſphéres: car de cette maniere les forces centrifuges deviennent égales, par le Théorème de l'article 16; & les ſurfaces ſphériques que j'appel-

j'appellerai dans la ſuite *Sphéres creuſes*, ou ſimplement *Sphéres*, ſe maintiendront dans un parfait équilibre, quoiqu'inégales en grandeur, par leurs préſſions égales & réciproques. 2°. Comme les ſphéres contiguës aux parois du récipient, ne trouvent de réaction, du côté de leur attouchement à ces parois, que la ſimple réſiſtance paſſive, ou la fermeté du récipient; il eſt manifeſte que toute ſa ſurface intérieure, devant ſoutenir l'effort des ſphéres qui la touchent, ſera continuellement preſſée du dedans au dehors dans tous ſes points par des directions perpendiculaires. 3°. Les ſphéres qui ne touchent pas les parois du récipient, ne faiſant autre choſe que ſe contre-balancer mutuellement, & ſervant ainſi uniquement d'apui aux ſphéres qui touchent ces parois; il eſt évident que ce ſont ces dernieres ſeules, dont l'effort ſe fait ſentir ſur la ſurface intérieure du récipient. Il en eſt de ceci, comme de la préſſion de pluſieurs reſſorts rangez en ligne droite, dont j'ai parlé dans mon Diſcours (*Chap. VI, art.* 3,) où j'ai fait voir que la puiſſance *L*, qui empêche que les quatre reſſorts égaux *ACB*, *BED*, *DGF*, *FIH*, ne ſe débandent, eſt égale à la puiſſance *P*, qui réſiſte à un ſeul de ces reſſorts, au reſſort *ACB*, par exemple. 4°. D'où il s'enſuit, que la préſſion totale, que ſouffre la ſurface intérieure du récipient, ne doit pas être eſtimée par la multitude de toutes les ſphéres contenues dans la cavité du récipient; mais ſeulement par le nombre de celles qui ſont contiguës à ſa ſurface. 5°. Ainſi tout l'amas de nos ſphéres creuſes étant tranſporté dans un autre récipient de même capacité, mais de figure differente, la préſſion totale, que le ſecond récipient ſoutiendra, ſera plus ou moins forte, ſelon que ſa ſurface ſera plus ou moins grande que celle du premier récipient. 6°. Il s'enſuit encore de là qu'un récipient beaucoup moins ſpatieux que le premier, quoiqu'il ne puiſſe contenir qu'une partie de ces mêmes ſphéres creuſes, ſera cependant expoſé à une plus forte préſſion, ſi ſa ſurface intérieure eſt plus grande que celle du premier récipient.

TAB. XLI. *Fig.* 5.

24. Il eſt aiſé, après tout ce que je viens de dire, de détermi-

terminer quelle peut être la cauſe probable du reſſort des corps élaſtiques. En effet, on ne peut guéres attribuer qu'à une matiere ſubtile, telle que je l'ai décrite, la cauſe primitive de l'élaſticité de tous les corps à reſſort; ſoit que ces corps ſoient eux-mêmes fluides, comme l'air groſſier que nous reſpirons; ſoit que ces corps ſoient ſolides, & de la nature de ceux qu'on nomme *roides*, lorſque, parmi les particules terreſtres qui compoſent une matiere fluide ou liquide, il ſe trouve quantité de ces ſphéres creuſes, leſquelles tendent continuellement à ſe dilater par la force centrifuge de leurs mobiles circulans, il eſt évident que ce mouvement imprime à ces particules terreſtres une force, ou une tendance à s'écarter les uns des autres, & à occuper ainſi un plus grand volume qu'auparavant. C'eſt en vertu de cette force, ou de cette tendance des ſphéres creuſes à ſe dilater, que le fluide, où elles ſe trouvent, eſt apellé *élaſtique*: tel eſt non ſeulement l'air ordinaire, mais encore l'eſprit de vin rectifié, & d'autres liqueurs ſpiritueuſes, leſquelles ſe dilatent avec impétuoſité, dès que la préſſion extérieure de l'air qui retenoit leurs ſphéres creuſes en contrainte eſt ôtée, ou que la force centrifuge de leurs mobiles circulans eſt augmentée, par un nouveau degré de viteſſe, cauſé par la chaleur, ou par quelqu'autre cauſe étrangere. Auſſi voyons-nous que l'eſprit de vin, mis dans la machine du vuide, boüillonne avec force; & qu'étant expoſé à un air plus chaud, il ſe dilate ſenſiblement: les Thermométres ſont une preuve de ce que j'avance. Ce ſeroit ici le lieu de parler des effets ſurprenans des fermentations, & des effervescences chymiques, & particuliérement de ceux de la poudre enflammée, ſi le ſujet le permettoit, n'y ayant aucun de ces effets qui ne découle naturellement de ma Théorie ſur la cauſe du reſſort.

25. Il n'eſt pas plus difficile d'aſſigner aux ſolides élaſtiques une cauſe probable de leur reſſort. Concevons que ces corps, ſemblables à une éponge, ſont remplis de petites cavitez ou cellules, & que chacune de ces cellules renferme des ſphéres creuſes, qui jointes aux particules terreſtres, compoſent ce que nous

nous venons de nommer *matiere fluide élaſtique*. Concevons de plus, qu'outre ces cellules, il y a une infinité de pores fort étroits, par leſquels la matiere ſubtile paſſe librement d'une cellule à l'autre, ſans que les mobiles circulans puiſſent s'échaper de leurs cellules à cauſe de la petiteſſe de ces pores. Voilà donc le corps roïde ou élaſtique, conſideré comme un amas de petits récipiens, dont chacun contient une quantité de matiere fluide élaſtique, proportionnée à ſa capacité. Mais un corps composé de la ſorte, ne ſauroit être plié ou comprimé, qu'une partie de ſes cellules ne ſe retréciſſent, & que les ſphéres creuſes qui y ſont renfermées, ſe retréciſſant auſſi à proportion, ne deviennent plus petites. Leurs mobiles circulans ſeront donc obligez de décrire de plus petits cercles, pendant qu'ils conſerveront toujours leur même viteſſe; la matiere ſubtile, qui la leur imprime, continuant toujours d'être agitée de même, quelle que puiſſe être la compréſſion des pores & des cellules, ainſi que je l'ai fait voir art. 11, & 12. D'où il s'enſuit, que chacun des mobiles circulans aura une force d'autant plus grande, que le rayon de la ſurface ſphérique ſur laquelle il circule diminuë davantage; les forces centrifuges des mobiles égaux, qui circulent avec des viteſſes égales ſur des circonferences de cercles inégaux, étant en raiſon renverſée de leurs rayons. Les ſurfaces ſphériques, ou les ſphéres creuſes contenuës dans les cellules retrécies, feront donc un plus grand effort pour les dilater, qu'elles ne faiſoient avant la compreſſion des cellules. Or c'eſt préciſément dans cet effort, exercé continuellement contre les parois des cellules, & qui tend à les élargir, que conſiſte la vertu des corps à reſſort; & c'eſt auſſi ce que j'avois entrepris d'expliquer.

COROLLAIRE I.

26. Le reſſort des corps ſolides provenant de l'effort que fait une matiere fluide renfermée dans leurs petites cellules; on voit aiſément pourquoi ce reſſort eſt parfait en quelque corps,

& imparfait en d'autres. En effet un corps eſt parfaitement élaſtique, lorſque les fibres, qui compoſent ſes cellules, ſont aſſez fortes pour réſiſter à l'effort des ſphéres, pendant le retréciſſement de ſes cellules; en ſorte que bien loin qu'il en creve aucune, elles ſe rétabliſſent toutes dans leur premier état. Il n'eſt au contraire qu'un corps imparfaitement élaſtique, lorſque la ſtructure de ſes fibres eſt telle, qu'il creve une partie de ſes cellules retrécies par la compreſſion, tandis que l'autre partie de ſes cellules ſe rétablit.

COROLLAIRE II.

27. Tout ce qui augmente la viteſſe des mobiles circulans ſur les ſurfaces ſphériques, augmente auſſi en même tems la force de l'élaſticité du fluide élaſtique; & plus la force centrifuge de chaque mobile circulant devient grande par l'augmentation de ſa viteſſe, plus les ſphéres creuſes tendent à ſe dilater avec effort; c'eſt par cette raiſon, que l'air enfermé dans une phiole, étant aprochée du feu, la caſſe & la fait ſauter avec bruit; car la chaleur mettant en une agitation violente la matiere ſubtile, & celle-ci augmentant la rapidité des mobiles circulans, augmente auſſi leurs forces centrifuges, d'où dépend l'élaſticité de la matiere fluide; & cela à un point, que les parois de la phiole n'étant plus en état de ſoutenir l'effort avec lequel les ſphéres creuſes tendent à ſe dilater, il faut de néceſſité que le verre ſe caſſe avec éclat.

COROLLAIRE III.

28. C'eſt auſſi de là que dépend la cauſe phyſique de ce que certains corps, dont les cellules ſont compoſées de fibres peu fléxibles, tels que le verre, le criſtal, & diverſes ſortes de pierres., étant jettées au feu, ſe fendent de toutes parts; les mobiles circulans du fluide élaſtique contenu dans les cellules de ces corps, étant excitez par la chaleur à ſe mouvoir d'une viteſſe

teſſe extraordinaire, ſe dilatent avec tant de violence, qu'ils ſont crever leurs cellules incapables de ſoutenir un ſi grand effort, & s'échapant ainſi de tous côtez, laiſſent dans ces corps une infinité de crevaſſes ou fêlures: auſſi voit-on que ces corps perdent leur élaſticité par la calcination.

COROLLAIRE IV.

29. D'autres corps, tels que les métaux, par exemple, ont une ſtructure differente, & les fibres de leurs cellules ſujetes à extenſion, prêtent plûtôt que de rompre par la dilatation de leurs cellules: auſſi voit-on que la contexture de ces corps demeure entiere, quoique leur volume augmente par la chaleur, à moins que la chaleur devenuë exceſſive, ne les faſſe fondre; & cela conformément à l'expérience, qui montre qu'une plaque de fer rougie au feu, augmente ſenſiblement dans toutes ſes dimenſions. On doit cependant remarquer que les corps les plus caſſans & les plus roides, tels que ceux dont j'ai parlé dans le Corollaire précédent, n'ont jamais leurs fibres aſſez inextenſibles, qu'elles n'obéiſſent un peu avant que de rompre, & qu'une chaleur moderée dilate ces ſortes de corps, ſans déſunir leurs petites parties. La pierre même eſt ſujete à cette loi; & un bloc de marbre, meſuré avec ſoin, a été trouvé plus long en Eté qu'en Hyver.

30. Je reviens aux fluides élaſtiques; il ſera facile à preſent de découvrir le reſte de leurs proprietez: ç'en eſt une fort connuë, que celle dont j'ai parlé au ſecond Corollaire; ſavoir que la chaleur augmente la force du reſſort de l'air enfermé dans une phiole. Mais on n'a pas encore fait aſſez d'attention au raport qu'il peut y avoir entre les differens degrez de chaleur & les augmentations des forces du reſſort de l'air que la chaleur occaſionne: Voici ce que je conçois ſur cela.

Puiſque la chaleur conſiſte dans une agitation violente de la matiere ſubtile, qui, pénétrant avec facilité les corps les

plus compactes, met en mouvement leurs mobiles circulans; il eſt évident que la viteſſe de leur mouvement eſt la meſure du degré de chaleur, ou, ce qui revient au même, l'intenſité de la chaleur eſt en raiſon de la viteſſe des mobiles circulans d'un ordre donné; enſorte que ſi cette viteſſe augmente, par exemple, du double, on doit conclure que la chaleur, qui a produit cet accroiſſement de viteſſe, a deux fois plus d'intenſité qu'elle n'en avoit avant cet accroiſſement.

31. Venons à la maniere de meſurer la proportion des divers degrez de viteſſe, que peuvent avoir entr'eux les mobiles circulans. Les forces centrifuges des mobiles circulans d'un même ordre, c'eſt-à-dire, qui décrivent des cercles égaux, ſont comme les quarrez de leurs viteſſes. Mais j'ai démontré que l'effet de ces forces centrifuges n'eſt autre choſe que la force du reſſort d'un fluide élaſtique. On aura donc la juſte meſure de la force du reſſort, & par conſéquent auſſi du degré de chaleur, réduite au poids, & les intenſitez de la chaleur ſeront en raiſon ſoû-doublée des forces du reſſort, ou des poids, que le fluide élaſtique, tantôt plus, tantôt moins échauffé, peut ſoutenir. Soient, par exemple, *A* & *B*, deux cylindres creux, parfaitement égaux en largeur & en hauteur, fermez par en bas, & ouverts par en haut, remplis tous deux d'air d'une même denſité, & que nous ſupoſerons d'abord de même temperature que l'air extérieur. Soient de plus deux diaphragmes *LM*, *NP*, qui bouchant exactement les ouvertures des cylindres, puiſſent néanmoins ſe mouvoir ſans frottement, de haut en bas, & de bas en haut; il eſt clair que ces deux diaphragmes, conſiderez ſans peſanteur, reſteront en équilibre, chacun d'eux étant également preſſé deſſus & deſſous, d'un côté par l'action de l'air extérieur, & de l'autre par une force égale du reſſort de l'air intérieur.

TAB. XLIV. *Fig.* 16.

Supoſons à preſent que l'air extérieur étant ôté, on lui ſubſtituë deux poids *R* & *S*, dont chacun, égal à la préſſion de l'air extérieur qui peſoit ſur les diaphragmes, continuë à les tenir en équilibre contre l'effort de l'air intérieur, qui renfermé dans

dans les cylindres *A* & *B* agit contre ces diaphragmes, & tâche de les ſoulever par ſon reſſort. Il eſt encore manifeſte que cet équilibre durera, auſſi long-tems que l'air en *A* & en *B* reſtera dans ſon premier état de chaleur naturelle. Mais s'il ſurvient un nouveau degré de chaleur à l'un ou à l'autre de ces deux cylindres d'air, à *B*, par exemple; en ce cas ſon reſſort ſera augmenté, & il ſoulevera le diaphragme dont il eſt chargé, à moins qu'on n'augmente auſſi la charge d'un nouveau poids *T*. Soient donc les poids *T* & *S*, pris enſemble, ce qu'il faut préciſément de peſanteur pour empêcher que l'air en *B* ne ſouleve le diaphragme *NP*; je dis que, ſuivant le ſyſtême que je viens d'établir, la chaleur de l'air naturel en *A*, ſera à la chaleur augmentée en *B*, comme $\sqrt{R}$ eſt à $\sqrt{(S+T)}$.

32. Il ſeroit aiſé de déterminer par ce moyen, ou par d'autres moyens équivalens, & plus faciles à pratiquer, celui-ci n'ayant été propoſé que pour mieux faire entendre ma penſée; il ſeroit, dis-je, aiſé de déterminer la proportion qui regne entre les degrez de chaleur de l'air en Eté, & celle que ce même air conſerve en Hyver. Je ſuis perſuadé, qu'il s'en faut beaucoup que la chaleur de l'air en Eté ne ſurpaſſe, autant qu'on le croit communément, la chaleur de l'air en Hyver: & qu'on ne ſoit pas ſurpris ſi j'attribuë un degré de chaleur à l'air en Hyver; car le froid le plus violent n'étant cauſé que par une diminution, & non pas par une entiere extinction de la chaleur, il ne fait jamais ſi froid, qu'il ne puiſſe faire encore plus froid; ainſi, quelque froid que l'air paroiſſe à nos ſens, il conſerve toujours quelque reſte de chaleur.

33. Une des proprietez les plus curieuſes qu'on ait reconnuë dans l'air, c'eſt la proportion conſtante qui regne entre ſon élaſticité & ſa denſité. L'expérience ayant découvert, que le même air, & dans un même degré de chaleur, devient d'autant plus élaſtique, qu'on le réduit à une plus grande denſité; les efforts, que l'air fait pour ſe dilater, étant toujours en raiſon de ſes denſitez. La denſité de l'air ſe meſure par la quan-

tité d'air contenuë dans un volume donné, ou réciproquement par l'eſpace connu qu'une quantité d'air occupe. Ainſi, par exemple, le piſton d'une pompe pneumatique, & remplie d'air, étant enfoncé juſqu'à la moitié de la profondeur du cylindre, enſorte que l'air, qui en occupoit auparavant toute la cavité, n'en occupe plus que la moitié ; cet air, comprimé & réduit à un volume deux fois plus petit que ſon premier volume, ſera dit avoir deux fois plus de denſité qu'il n'en avoit avant l'avancement du piſton. Reſte à faire voir pourquoi, dans cet état de compreſſion, l'air repouſſe le piſton avec deux fois plus de force : car dans le premier état de conſiſtance naturelle, l'air intérieur repouſſoit le piſton en dehors avec autant de force que l'air extérieur le repouſſoit en dedans : mais dans l'état de compreſſion dont nous venons de parler, il faut, outre la force de l'air extérieur, que celui qui enfonce le piſton employe de nouveau une force préciſément égale à celle de l'air extérieur, s'il veut empêcher que le piſton ne rebrouſſe chemin. Et ſi on enfonce le piſton dans le cylindre, enſorte que l'air enfermé ſe trouve réduit à un tiers de la hauteur qu'il occupoit auparavant, cet air ainſi comprimé ſera trois fois plus denſe, & repouſſera par conſéquent le piſton avec trois fois plus d'effort : car pour empêcher le retour du piſton, il faut joindre à la preſſion contraire de l'air extérieur, une force double de cette preſſion, & opoſer par ce moyen au piſton une réſiſtance égale à l'effort de l'air condenſé : il en eſt de même des autres cas que l'expérience vérifiera tous. J'en excepte les preſſions exceſſivement grandes, où les forces de l'élaſticité croiſſant en plus grande raiſon que les denſitez ; la regle generale commence à s'écarter un peu de cette proportion. Ma théorie en découvre la raiſon.

TAB. XLIV. *Fig.* 16. 34. Reprenons les deux cylindres égaux de l'article 31, *A* & *B*, ſupoſons qu'il n'y ait point d'air extérieur qui agiſſe ſur les diaphragmes *LM* & *NP* ; que le cylindre *A* eſt rempli d'air naturel, & que le cylindre *B* en contient huit fois autant ; l'air de ce cylindre ſera huit fois plus denſe que celui du cylindre

Digitized by Google

lindre *A*. Soient chargez les diaphragmes *LM*, *NP*, des poids *R* & *S + T*, dont la peſanteur proportionnée contrebalance préciſément l'effort, avec lequel l'air renfermé dans les cylindres *A* & *B* tend à ſoulever ces diaphragmes; enſorte que les poids *R* & *S+T* marquent les forces de l'élaſticité de l'air en *A* & en *B*: il s'agit de démontrer que $R : S + T = 1 : 8$; c'eſt ce que j'exécute de la maniere ſuivante.

35. Puiſque dans l'eſpace *B* il y a, par l'hypothéſe, huit fois plus d'air que dans l'eſpace *A*; il eſt viſible que tout ce qui concourt à compoſer l'air naturel en *A*, ſe trouvera huit fois dans l'air en *B*, & que c'eſt la même choſe, que ſi j'avois introduit ſucceſſivement dans le cylindre *B* huit cylindres d'air naturel, dont chacun fut égal au cylindre *A*: il y aura donc en *B* huit fois plus de particules terreſtres, & parmi celles-ci huit fois plus de ſphéres creuſes de toutes façons, qu'il n'y en a en *A*, leſquelles ſeront entre-mêlées de la même maniere qu'elles le ſont dans le cylindre *A*; avec cette ſeule différence, qu'en *B* toutes les dimenſions des ſphéres creuſes ſeront réduites à la moitié de ce qu'elles ſont en *A*; je veux dire, que le rayon de chacune de ces ſphéres étant devenu deux fois plus petit par la compreſſion, la diſtance des mobiles circulans, au centre de leurs ſphéres, ſera auſſi deux fois plus petite: c'eſt dans cette proportion que les dimenſions homologues doivent diminuer, pourvû qu'il y ait huit fois plus de ſphéres en *B* qu'en *A*: la raiſon en eſt manifeſte, & la moindre attention aux principes de Géométrie fait voir que, dans le cas propoſé, le nombre des ſphéres creuſes de chaque eſpéce contenuës en *B*, doit être au nombre des ſphéres creuſes qui leurs répondent, & que contient l'eſpace *A* égal à l'eſpace *B*, en raiſon triplée réciproque de leurs rayons. Remarquez que je ſupoſe ici les eſpaces *A* & *B* incomparablement plus grands que la plus grande des ſphéres creuſes; ſans quoi il pourroit arriver que la raiſon triplée réciproque ne ſeroit pas tout-à-fait exacte.

36. Il s'enſuit encore, conformément aux mêmes principes de la Géométrie, que la multitude des ſphéres de chaque eſpece,

Digitized by Google

péce, contiguës au diaphragme *NP*, eſt à la multitude de celles qui leurs répondent, contiguës au diaphragme *LM*, en raiſon doublée réciproque de leurs rayons; parce que les diaphragmes *NP* & *LM*, ſont des cercles égaux; enſorte que, dans le cas ſupoſé, il y a quatre fois plus de ſphéres de chaque eſpéce qui s'apuyent contre *NP*, qu'il n'y en a qui s'apuyent contre *LM*. Mais puiſque de toutes les ſphéres que renferme un cylindre, ſon diaphragme n'eſt chargé que de la préſſion de celles qui le touchent immédiatement, ainſi que nous l'avons fait voir dans les notes 3, & 4 de l'article 23 de ce Diſcours: il reſte à examiner ici, combien la préſſion totale des ſphéres apuyées contre le diaphragme *NP*, dont le nombre eſt quadruple du nombre de celles qui s'apuyent contre le diaphragme *LM*, ſurpaſſe la préſſion que les ſphéres contenuës dans le cylindre *A* font ſur ce même diaphragme *LM*: le calcul en eſt aiſé; le voici. Le rayon de chaque ſphére étant réduit à la moitié par la condenſation, comme on l'a dit dans l'article précédent, & les mobiles continuans à circuler ſur chaque ſurface ſphérique avec la même viteſſe après la condenſation, puiſqu'on ſupoſe le même degré de chaleur; il eſt évident, par le Théorème de l'article 16, que chacun des mobiles circulans aura une force centrifuge double de celle qu'il avoit avant la condenſation, & que chaque ſphére creuſe réduite à la moitié de ſon rayon, tendra à ſe dilater avec deux fois plus de force. Ainſi le diaphragme *NP* étant preſſé par quatre fois plus de ſphéres, & chacune de ces ſphéres ayant deux fois plus de force; il en reſulte une preſſion totale contre *NP*, deux fois quatre fois, ou huit fois plus grande que celle avec laquelle l'air dans ſon état naturel agit ſur le diaphragme *LM*. On démontrera, par le même raiſonnement, que la préſſion contre *NP* doit être vingt-ſept fois plus forte, lorſque l'air en *B* eſt vingt-ſept fois plus denſe que n'eſt l'air naturel en *A*; parce que chaque ſphére creuſe, réduite par la condenſation au tiers de ſon rayon, augmentera au triple l'effort avec lequel elle tend à ſe dilater, y ayant dans ce cas trois fois trois, ou neuf fois plus de ſphéres qui agiſſent ſur *NP*; de ſorte que

que la preſſion totale de l'air condenſé contre NP, ſera $3 \times 3 \times 3$, ou vingt-ſept fois plus grande que celle de l'air naturel contre LM. La démonſtration eſt generale, puiſque les preſſions ſuivent toujours la proportion des denſitez. Mais c'eſt dans la force de ces preſſions que conſiſte la force du reſſort de l'air, & de toute autre fluide élaſtique: donc les élaſticitez ſont proportionnelles aux denſitez. *C. Q. F. D.*

37. Dans tout ce raiſonnement, j'ai fait abſtraction de l'étenduë qu'auroit la matiere propre du fluide élaſtique, ſi toutes les particules qui la compoſent, & qui ne peuvent pas pénétrer les pores des corps, étoient ramaſſées en une maſſe ſolide & ſans pores; ou plutôt, j'ai ſupoſé tacitement, que toute l'étenduë de cette maſſe ne feroit qu'une partie infiniment petite de l'eſpace entier dans lequel le fluide élaſtique eſt contenu. En effet, l'air naturel étant pour le moins 15000 fois moins peſant, & par conſéquent plus rare, que l'or, qui lui-même n'eſt pas ſans pores; on peut dire que la matiere propre de l'air naturel, & des ſphéres creuſes qui nagent dedans, ne fait pas la quinze milliéme partie du volume qu'occupe l'air; de ſorte qu'on peut bien conſiderer cette partie comme infiniment petite par raport à l'étenduë de ſon volume entier. Mais un autre fluide élaſtique, qui contiendroit beaucoup plus de matiere que l'air, ou l'air même extrêmement condenſé, demanderoit ſans doute qu'on eut égard à ce que ſon étenduë pourroit aporter de changement à notre régle. Car ſoit l'eſpace A occupé par un fluide élaſtique, dont la matiere ramaſſée forme une étenduë $= b$; ſoit une autre eſpace $B =$ à A, qui tienne huit fois autant du même fluide élaſtique. On devroit dire, ſelon la définition ordinaire de la denſité, que le fluide en B eſt huit fois plus denſe que le fluide en A, mais on ſe tromperoit, puiſqu'à proprement parler, il eſt plus de huit fois plus denſe. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à conſiderer que l'eſpace entier A ou B étant nommé a, le volume que le fluide élaſtique occupe en A & en B par ſa dilatation, ſe détermine en retranchant de l'eſpace entier a, ce que le fluide ramaſſé contiendroit d'étenduë de part & d'autre, ſavoir b

& $8b$: de ſorte que le volume en A, n'eſt pas a, mais $a-b$, & le volume en B, $a-8b$; ces deux volumes ne peuvent donc pas être pris pour égaux ; comme lorſqu'on ſupoſe que la matiere du fluide ne fait pas une partie finie de l'eſpace dans lequel il eſt contenu, je veux dire, que b eſt infiniment petit par raport à a ; & lorſque ces volumes ſont inégaux, la véritable denſité du fluide en B, n'eſt pas à la denſité du fluide en A, comme la quantité de matiere en B, eſt à la quantité de matiere en A, ou comme 8 eſt à 1 ; mais en raiſon compoſée de la directe de ces quantitez, & de la raiſon inverſe des véritables volumes que le fluide élaſtique occupe de part & d'autre par ſa dilatation. Ainſi la denſité en B, eſt à la denſité en A, $= \frac{8}{a-8b} : \frac{1}{a-b} =$ $8a-8b : a-8b$; ce qui fait une raiſon plus grande que de 8 à 1. Mais par notre démonſtration (*art.* 36) les élaſticitez ſont toujours proportionnelles aux véritables denſitez : donc la force de l'élaſticité du fluide en B, eſt à la force de l'élaſticité en A, $= 8a-8b : a-8b$, c'eſt-à-dire, en plus grande raiſon que 8 à 1 ; & en general, ſi on introduit en B une quantité de fluide élaſtique, n fois plus grande que celle qui eſt en A, on aura l'élaſticité en B à l'élaſticité en A, $= na-nb : a-nb$ $> n : 1$; & partant en une raiſon plus grande que celle des denſitez aparentes.

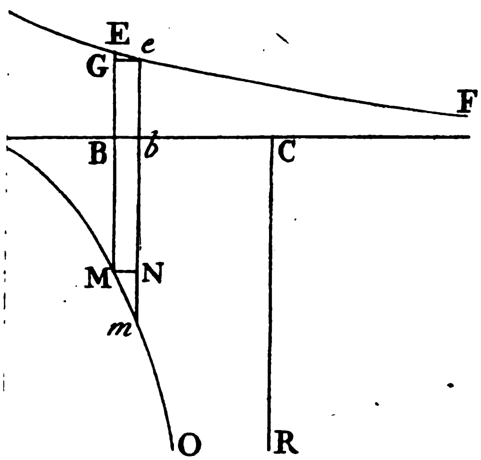
38. On remarquera que quoique b ſoit plus petit que $\frac{1}{15000}a$, lorſque l'air eſt dans ſon état naturel, & que par conſéquent il ne faſſe pas une partie ſenſible de a ; cependant le nombre n peut augmenter ſi fort, que nb deviendra enfin ſenſible par raport à a. C'eſt ce qui fait que l'air extrêmement condenſé a la force de ſon reſſort plus grande que ne ſemble l'exiger la denſité aparente : lorſqu'on dit donc, que les élaſticitez de l'air ſont proportionnelles à ſes denſitez aparentes ; cela ne doit s'entendre que des denſitez aparentes mediocres ou moyennes, leſquelles ne different pas ſenſiblement des denſitez véritables.

39. Nous ne connoiſſons juſqu'ici que la chaleur & la condenſa-

Digitized by Google

N°CXXXV.

Fig.14



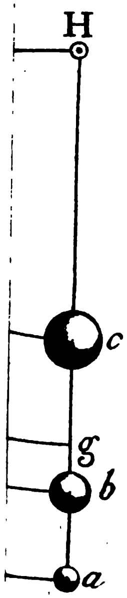
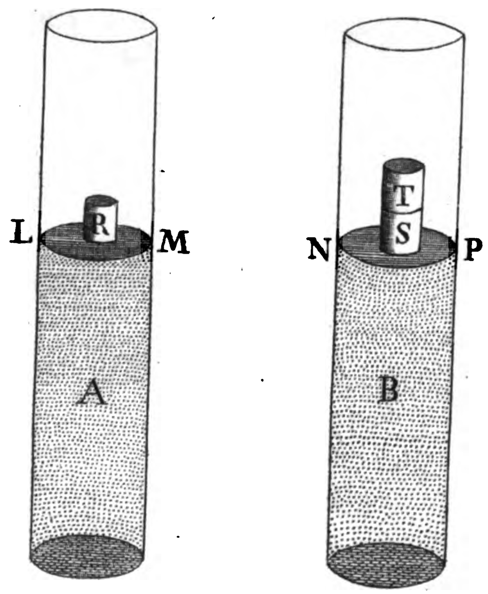


Fig.16



Digitized by Google

Digitized by Google

denſation qui augmentent le reſſort de l'air ; j'ai conſideré ces cauſes ſéparément, & j'ai déterminé l'effet que chacune d'elles peut produire de ſon côté : Il ne ſera pas difficile de déterminer préſentement l'effet que ces deux cauſes produiſent étant combinées enſemble, lorſque l'une & l'autre vient à être changée. Nous avons prouvé, que les differens degrez de chaleur cauſent, dans le même air, des élaſticitez, qui ſont comme les quarrez des intenſitez de la chaleur ; & que les differentes denſitez (la même chaleur ſupoſée) ſont en ſimple raiſon des élaſticitez. On trouvera donc, en compoſant ces deux raiſons, que les élaſticitez de deux volumes d'air differemment chauds & differemment denſes, ſont en raiſon compoſée de la raiſon doublée des chaleurs, & de la ſimple des denſitez : vérité qui a lieu, tant que les denſitez aparentes ne different pas ſenſiblement des véritables : je veux dire, tant que la compreſſion de l'air n'eſt pas aſſez grande pour que la quantité de matiere, ramaſſée en une maſſe, faſſe une étenduë comparable à l'eſpace où il eſt renfermé.

40. J'aurois pû tirer ici de mes principes diverſes conſequences, qui peut-être contribuëroient à perfectionner l'uſage des Thermometres, & des Barometres. La matiere eſt riche, & d'autant plus curieuſe, qu'il ne me paroit pas qu'on ait eu juſqu'à preſent des idées aſſez nettes ſur la meſure du froid & du chaud ; & ſi les Thermometres ordinaires marquent les variations qui arrivent à l'une & à l'autre de ces qualitez, c'eſt ſans indiquer au juſte la proportion qui regne entr'elles, ni combien l'air eſt plus ou moins chaud en un tems qu'en un autre. Mais cette entrepriſe me meneroit trop loin ; elle paſſe les bornes que je me ſuis preſcrites, & ce que Meſſieurs de l'Académie exigent de moi. Content donc de me renfermer dans une explication probable de la cauſe phyſique du reſſort, je pourrai un jour leur faire part de mes méditations, ſi cet Ecrit, que j'ai l'honneur de leur préſenter, a le bonheur de leur plaire.

FIN.

Voyez le N°. CXLV.

Digitized by Google

Nº. CXXXVI.

DE INTEGRATIONIBUS ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM,

Ubi traditur Methodi alicujus ſpecimen integrandi ſine prævia ſeparatione indeterminatarum :

Auctore Joh. BERNOULLI.

I.

Comment. Acad. Petrop. Tom. I. pag. 167. Jun. 1726.

QUando æquatio aliqua differentialis primi gradus reducta habetur ad $pdx = qdy$, ubi p datur per x, & q per y, hoc eſt, meo loquendi more, ubi p & q ſunt functiones qualeſcunque datæ indeterminatarum x & y; eo caſu conſtructio æquationis nulla premitur difficultate, conceſſis nimirum quadraturis; quæ & ipſæ generaliter ad extenſiones curvarum algebraïcarum non ita pridem reductæ ſunt. Vid. Cel. HERMANNI Schediaſma in *Actis Lipſ.* 1723, meumque de hac materia analytice tractanda editum in iiſdem *Actis* 1724 *. Adeo ut hac in parte nihil ulterius ad majorem perfectionem deſiderari videatur, niſi hoc tantum, quod, cum infinitis modis, ceu monſtravimus, idem præſtari poſſit, ille eligatur qui exhibeat curvam conſtructu facillimam, cujus extenſione uti lubeat ad quadraturam determinandam. Hanc vero rem, utpote alius negotii, nunc non attingimus.

* Nº. CXXXII. *Tom. II.* pag. 582.

II. Quod

I I.

Quod ſi autem æquatio differentialis $pdx = qdy$ laborat indeterminatarum permixtione, id eſt, ſi utraque quantitas p & q, vel alterutra ſaltem, componitur diverſimode ex indeterminatis x & y ſimul, earumque variis potentiis, atque contineant vel non contineant varia ſigna radicalia; id quidem eſt, quod hodienum crucem figit Geometris, nec quemquam novi hucuſque, qui generalem invenerit Regulam (ad praxim applicabilem) integrandi ejuſmodi æquationes differentiales, ſi integrabiles ſunt: aut, ſi non ſunt, conſtruendi eas, ſive per quadraturas, ſive per rectificationes curvarum datarum: dico notanter *applicabilem ad praxin*, nam cum conſtructio requirat executionem, nihil penſi haberem alicujus regulæ, quæ in ſpeculatione tantum ſubſiſteret, re ipſa autem nullius eſſet uſus, quæ & totam requireret hominis ætatem, ſi in leviſſimis quoque exemplis vellet eam effectui dare. Tales utique regulæ generales, vel potius regularum ideæ, etiam mihi in promtu forent, ſed quas ob dictam rationem negligo.

I I I.

Dantur regulæ particulares, etſi omnibus caſibus in ſuo quæque genere applicabiles, quæ cum ſucceſſu adhibentur. Earum multas ac varias jam eo tempore excogitavi, quo de naſcente calculo vix quiſquam alius cogitabat, nedum ad ejus perfectionem animum applicabat. Inventas regulas communicavi paulo poſt cum amicis, partim coram, partim per litteras, præſertim cum Illuſtr. *Marchione* HOSPITALIO, in cujus privatam utilitatem initio a me conſcriptæ Lectiones, in multorum jam manibus verſantes, æque ac litteræ meæ cum ipſo poſtea frequenter commutatæ, luculento ſunt veritatis teſtimonio.

I V.

Inter prædictas regulas maximam univerſalitatem ſive extenſio-

ſionem habet illa, quæ valet pro omnibus æquationibus differentialibus, quantæcunque dimenſionis ſint termini, modo ubique ſint homogenei; id eſt, in quibus exponentes indeterminatarum x & y ſimul ſumti eundem in quolibet termino componunt numerum, adeoque litteræ conſtantes, quæ in cjuſmodi æquationibus occurrunt, nihil aliud deſignant quam numeros coëfficientes, nihilque proin contribuunt ad dimenſionum ſuppletionem. Monſtravi namque talem æquationem mutari in aliam indeterminatas ſeparabiles habentem, ſi aſſumendo novam indeterminatam z, ſubſtituatur zy pro x, & $zdy + ydz$ pro dx; vel contra zx pro y, & $zdx + xdz$ pro dy. Aut etiam quod interdum ſimpliciorem reddit æquationem, ſi pro x ſcribatur $z^n y$, atque pro dx, $z^n dy + nyz^{n-1} dz$, vel vice verſa $z^n x$ pro y, & $z^n dx + nxz^{n-1} dz$ pro dy; ita enim fit, ut, cum n ſit exponens arbitrarius, pro eo aliquis eligi poſſit, qui exhibeat æquationem tractabiliorem. Quinimo certiſſimum eſt, nihil obſtare, quo minus adhiberi queat functio quælibet ipſius z ad arbitrium formata, ponendo ex. gr. $y\sqrt{(aa+zz)}$ pro z, adeoque $dy\sqrt{(aa+zz)} + yzdz : \sqrt{(aa+zz)}$ pro dx; aut ſi mavis $x\sqrt{(aa+zz)}$ pro y, & $dx\sqrt{(aa+zz)} + xzdz : \sqrt{(aa+zz)}$ pro dy.

V.

Dantur ſane caſus, ubi talis functionum formatio utilitate ſua non caret, præcipue in illis aliquando in quibus ſigna radicalia reperiuntur: ſciendum enim regulam noſtram porrigi quoque ad eas omnes æquationes, quæ unum pluresve terminos habent ſignis radicalibus affectos. Verbi gratia, ſit propoſita æquatio inter coordinatas x & y alicujus curvæ hæc, $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$, in qua indeterminatæ x & y ſunt unius dimenſionis, quia quantitas $\sqrt{(xx+yy)}$ non niſi primæ dimenſionis eſſe cenſetur; ſi itaque, ſecundum regulam noſtram, ſimpliciter ponatur zy & $zdy + ydz$ pro x, & dx, mutatur æquatio propoſita in

in hanc $dy : y + dz\sqrt{(zz+1)} : (az + z\sqrt{(zz+1)}) = 0$ quæ quidem non amplius laborat indeterminatarum permixtione; at vero irrationalitas adhuc ineſt, quæ nondum permittit videre, annon forſan ex differentialibus logarithmicis componatur æquatio, unde illa per integrationem ad terminos finitos deinceps reduci poſſit.

VI.

Quamobrem præſtat ut ſcribam pro x productum ipſius y per convenientem aliquam functionem ipſius z ad aſymemetriam tollendam; in hunc finem, pono ex. gr. $x = y\sqrt{(zz-1)}$ ac proinde $dx = dy\sqrt{(zz-1)} + yzdz : \sqrt{(zz-1)}$; quibus ſubſtitutis in æquatione propoſita $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$, convertetur illa in hanc $(z^3 + azz - z - a)dy + yzzdz = 0$, quæ per diviſionem reducta dat hanc alteram, $dy : y + zzdz : (z^3 + azz - z - a) = 0$, ab omni irrationabilitate immunem: Reſolvitur vero poſterius membrum $zzdz : (z^3 + azz - z - a)$ in differentialia logarithmica, per methodum quam communicavi in *Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris.* an. 1702, * & in *Actis Lipſ.* an. 1703: Cum enim denominator hujus fractionis $z^3 + azz - z - a$ conſtet ex iſtis tribus factoribus $z + a$, $z + 1$ & $z - 1$, faciendum eſt ex præſcripto illius methodi $zzdz : (z^3 + azz - z - a) = \alpha dz : (z+a) + \beta dz : (z+1) + \gamma dz : (z-1)$; tum quærendi valores litterarum α, β, γ, qui reperientur eſſe $\alpha = aa : (aa-1)$, $\beta = -1 : (2a-2)$; $\gamma = 1 : (2a+2)$. Quare æquatio noſtra $dy : y + zzdz : (z^3 + azz - z - a) = 0$ ſeu $dy : y + \alpha dz : (z+a) + \beta dz : (z+1) + \gamma dz : (z-1) = 0$ [ſubſtitutis valoribus ipſarum α, β, γ & dein ſingulis terminis in $2aa - 2$ ductis] abibit in hanc æquationem $(2aa-2)dy : y + 2aadz : (z+a) - (a+1)dz : (z+1) + (a-1)dz : (z-1) = 0$, in differentialibus logarithmicis expreſſam; quæ integrata, ut olim docuimus, reddit $(2aa-2)ly + 2aal(z+a) - (a+1)l(z+1) + (a-1)l(z-1) = lC$, ubi per lC intelligo logarithmum

* N°. LXX. Tom. I. pag. 393.

Digitized by Google

rithmum quantitatis conſtantis pro lubitu aſſumtæ; reducendo igitur, ut moris eſt, logarithmos ad potentias, acquiritur æquatio finita, ſeu in terminis finitis expreſſa, $y^{(2aa-2)} \times (z+a)^{2aa} \times (z+1)^{(-a-1)} \times (z-1)^{(a-1)} = C$. Nunc vero, ut in coordinatis x & y exprimatur, reſtituendus eſt valor ipſius z; qui ex hypotheſi aſſumta $x = y\sqrt{(zz-1)}$, eſt $= \sqrt{(xx+yy)} : y$; hinc enim emergit

$$y^{(2aa-2)} \times \left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}+ay}{y}\right)^{2aa} \times \left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}+y}{y}\right)^{(-a-1)} \times \left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}-y}{y}\right)^{(a-1)} = C;$$

vel quia in denominatoribus habetur y elevata ad $2aa$, ad $-a-1$, & ad $a-1$, quarum ſumma $= 2aa-2$, patet tres iſtos denominatores y deſtrui per alteram y fractionibus præmiſſam, ita ut tandem hæc prodeat æquatio naturam curvæ determinans, $(\sqrt{(xx+yy)}+ay)^{2aa} \times (\sqrt{(xx+yy)}+y)^{(-a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)}-y)^{(a-1)} = C$. Quæ ſi dextre tractetur ulterius reduci poteſt in iſtam $x^{(a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)}+ay)^{aa} \times (\sqrt{(xx+yy)}+y)^{-a} = C$; vel etiam in hanc $x^{(-a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)}+ay)^{aa} \times (\sqrt{(xx+yy)}-y)^{a} = C$. Ubi recordandum, per litteram C intelligi perpetuo conſtantem arbitrariam in omnibus æquationibus ſumendam, vel eandem, vel diverſam, prout libuerit; quod in ſequentibus etiam, ſicubi reperietur, monitum volo.

VII.

Singularis caſus conſiderandus hic venit, exiſtente nimirum $a = 1$, quo fit ut duo priores factores in prima æquatione, qui jam erunt $(\sqrt{(xx+yy)}+y)^{2}$ & $(\sqrt{(xx+y)}+y)^{-2}$ ſe mutuo deſtruant, & tertius $(\sqrt{(xx+yy)}-y)^{0}$ evadat $= 1$, unde tota æquatio foret $1 = C$; ſic pariter ſecunda & tertia, ex prima æquatione deductæ, in caſu $a = 1$, abirent in $1 = C$, quod eſſet abſurdum; unitas enim non poteſt eſſe æqualis quantitati arbitra-

arbitrariæ C. Quæritur itaque, quid jam ſit ſtat uendum, utrum in hoc caſu nulla ſatisfaciat curva æquationi propoſitæ, quæ jam eſt $xdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$, aut ſi aliqua ſatisfaciat, quomodo illa determinetur? Hunc ſcrupulum ut tollam, dico, incommodum iſtud ex eo venire, quod in præced. §, æquatio $dy:y + \alpha dz:(z+a) + \beta dz:(z+1) + \gamma dz:(z-1) = 0$ multiplicata fuerit per $2aa - 2$, h. e. per o, in hoc caſu, unde totam æquationem evaneſcere neceſſe eſt. Ut igitur hoc evitemus, notandum eſt quantitatem $zzdz:(z^3 + azz - z - a)$, quam æqualem ſuppoſuimus hiſce fractionibus $\alpha dz:(z+a) + \beta dz:(z+1) + \gamma dz:(z-1)$, continere in ſe aliquid abſolute integrabilis quando $a = 1$; illa igitur non poteſt ſupponi conſtare ex meris differentialibus logarithmicis. Quod autem contineat partem aliquam integrabilem, ex eo patet, quod denominator fractionis, qui jam eſt $z^3 + zz - z - 1$, conſtet ex duobus factoribus $zz + 2z + 1$, & $z - 1$, quorum ille eſt quadratum perfectum; unde $dz:(zz + 2z + 1)$ fiet integrabile, eſt enim ejus integrale $= -1:(z+1)$, Oportet itaque, ceu monui in præmemoratis *Commentariis Paris.* 1702, pag. 290. Edit. Paris †. ſeparare ex quantitate $zzdz:(z^3 + zz - z - 1)$ illud quod eſt integrabile, & tum procedere ſecundum regulam; quod utrumque ſimul ſic perago: Pono ſtatim $zzdz:(z^3 + zz - z - 1) = \alpha dz:(z+1) + \gamma dz:(z-1) + \pi dz:(zz + 2z + 1)$, quibus reductis ad communem denominatorem $z^3 + zz - z - 1$, habebo æqualitatem inter numeratorem zz & ſummam trium reliquorum, quæ erit $(\alpha+\gamma)zz + (2\gamma+\pi)z + (\gamma - \pi - \alpha)$; inſtituta comparatione terminorum, faciendo $\alpha + \gamma = 1$, $2\gamma + \pi = 0$, $\gamma - \pi - \alpha = 0$, invenietur, $\pi = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{1}{4}$. His ita inventis integrentur, ut olim monſtravimus, termini æquationis $dy:y + zzdz:(z^3 + zz - z - 1) = 0$ & prodibit $ly + \frac{3}{4}l(z+1) + \frac{1}{4}l(z-1) + 1:(2z+2) = lC$, ſeu $4ly + 3l(z+1) + l(z-1) = -2:(z+1) + lC$; hinc ergo, conſiderando unitatem tanquam logarithmum numeri alicujus qui vocetur n, habebitur $y^4 \times (z+1)^3$

† *Tom.* I. *pag.* 393.

$\times (z - 1)^1 = C \times n^{-2:(z+1)}$, quæ, ſubſtituto pro z ejus valore $\sqrt{(xx+yy)}:y$, & reductis reducendis, ut ſupra factum, deſinit in iſtam, $(\sqrt{(xx+yy)}+y)^3 \times (\sqrt{(xx+yy)} - y)^1 = C \times n^{-2y:\sqrt{(xx+yy)}+y}$, transmutabilem porro in $(\sqrt{(xx+xyy)}+y) \times x = C \times n^{-y:\sqrt{(xx+yy)}+y}$, vel etiam non minus ſimplici modo in $(\sqrt{(xx+yy)} - y)^{-1} \times x^3 = C \times n^{-y:\sqrt{(xx+yy)}+y}$; quarum autem quælibet ſi evolvatur, & homogeneitatis gratia ſcribatur $bbRR$ pro quadrato quantitatis exponentialis, hanc induit faciem $x^4 \pm 2bRyx - bbRR = 0$. Aio igitur hanc æquationem $x^4 \pm 2bRyx - bbRR = 0$ oriri ex vera integratione hujus differentialis $xdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$; quod confirmabitur a poſteriori, ſi nimirum illa differentietur & quod provenit cum hac comparetur. Unde videmus curvam propoſitæ æquationi ſatisfacientem non eſſe algebraïcam, ſed exponentialem, & ita quidem, ut ipſæ indeterminatæ ingrediantur exponentem, qua in re differt ab omnibus aliis caſibus particularibus æquationis generaliter propoſitæ $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$; utpote quæ in quovis alio caſu ſemper admittit curvam aliquam algebraïcam, modo a ſit rationalis; aut ſi a non eſt rationalis, erit quidem curva exponentialis, ſed exponentem nulla quantitas variabilis (ſicuti in caſu $a = 1$) ingreditur, cujuſmodi curvæ dici poſſunt algebraïcis proximæ.

VIII.

Paulo fuſior fui quam forſan neceſſe videbatur in diſcuſſione hujus exempli, quod, cum olim *Lutetiæ* agerem, multum agitabatur inter Geometras ejus loci, ex occaſione Problematis *Beauniani*, mihi tunc quoque cum aliis ab HOSPITALIO propoſitum atque feliciter ſolutum, poſtquam a Geometris inſolutum ad me perveniſſet. Fuſior igitur in hoc fui, ut fieret manifeſtum, qua dexteritate evitari poſſit ingens aliquando calculus

culus, in quem intricaremur, ſi regulas generales, prout primo intuitu ſe offerunt, ſine ulla circumſpectione ſequi vellemus. Præterquam quod multoties accidat, ut credamus curvas, quæ prodeunt per incautam regularum applicationem, eſſe tranſcendentes, nonniſi per quadraturas aut rectificationes conſtruibiles, quæ tamen ſi rite tractentur evadunt algebraïcæ aut ſaltem exponentiales, hoc eſt, tales quæ ſunt finitæ & non aliter tranſcendentes quam ex ſola exponentium irrationalitate. Quis enim prima fronte non crederet, æquationem ſupra §. 5 expreſſam $dy : y + dz\sqrt{(zz+1)} : (az + z\sqrt{(zz+1)}) = 0$, quæ oritur ex ſuppoſitione $x = zy$, deducere ad curvam tranſcendentem? niſi ante omnia id curet, ut ſublata irrationalitate $\sqrt{(zz+1)}$ per methodum *Diophanteam* acquirat fractionem rationalem, quam deinde, per noſtram methodum in §. 6 traditam, in differentialia logarithmica reſolvat: ſed & hic proceſſus operoſi foret calculi; quare tutiſſimum erit ut ſtatim ab initio diſpiciatur, prout exempli cujuſque natura exigit, de commoda aliqua functione aſſumtæ z ſubſtituenda in locum alterutrius indeterminatarum x vel y, quo immediate preveniatur ad æquationem rationalem & ſimplicem, ſicuti hic factum vidimus, ubi ſola ſubſtitutione $y = x\sqrt{(zz-1)}$ obtinuimus hæc tria ſimul, nempe indeterminatarum ſeparationem, rationalitatem terminorum, & maximam poſſibilem æquationis ſimplicitatem $dy : y + zzdz : (z^3 + azz - z - a) = 0$.

IX.

Pergo ad methodum a me inventam integrandi æquationes differentiales, ſine adhibita indeterminatarum ſeparatione, aliave ulla earum in alias tranſmutatione per ſubſtitutionem facienda; loquor hic de illis æquationibus $pdx + qdy = 0$, in quibus p & q deſignant functiones rationales & homogeneas indeterminatarum x & y utcunque inter ſe complicatarum atque permixtarum, modo indeterminatæ in ſingulis terminis eandem habeant exponentium ſummam, propter quod functiones, quæ ita ſunt

comparatæ, ipſaſque æquationes differentiales ex illis compoſitas, voco *homogeneas*.

X.

Poſtquam ejuſmodi æquationes a fractionibus liberatæ ſunt, ope multiplicationis, erunt illæ ordinis vel primi, vel ſecundi, vel tertii, vel cujuſcunque altioris; voco autem *ordinem primum*, *ſecundum*, *tertium* &c. ubi exponentium ſumma in quolibet termino obtinet dimenſionis gradum primum, ſecundum, tertium &c. His ita definitis, formo ſequentem Tabellam, quæ conſpectui offert ordines æquationum canonicarum. Per *æquationem canonicam* intelligo talem, quæ omnes æquationes particulares alicujus ordinis in ſe complectitur, ope coefficientium univerſalium ſingulis terminis præfixorum.

TABELLA ÆQUATIONUM CANONICARUM DIFFERENTIALIUM.

I. $(ax + by)dx + (cx + ey)dy = 0.$

II. $(axx + bxy + cyy)dx + (exx + fxy + gyy)dy = 0.$

III. $(ax^3 + bxxy + cxyy + ey^3)dx + (fx^3 + gxxy + hxyy + iy^3)dy = 0.$

IV. $(ax^4 + bx^3y + cxxyy + exy^3 + fy^4)dx + (hx^4 + ix^3y + kxxyy + mxy^3 + ny^4)dy = 0.$

V. $(ax^5 + bx^4y + cx^3yy - - - + hy^5)dx + (ix^5 + kx^4y + mx^3yy - - - + qy^5)dy = 0.$

XI.

Ex hac Tabella patet, æquationem canonicam cujuſque ordinis tot habere terminos præfixos ipſi dx, totidemque præfixos ipſi dy, quot habet unitates numerus ordinis unitate auctus. Sic æquatio ordinis primi, habet terminos utrobique duos; ordinis ſecundi, terminos tres; tertii, quatuor; quarti, quinque; & ita porro: Itaque in ordine primo ſunt coefficientes univerſales quatuor, in ſecundo ſunt ſex, in tertio octo, in quarto decem &c. Jam dico has omnes æquationes poſſe integrari ſeu reduci ad æquationes finitas, exprimentes naturam linearum, quæ ſingulæ conveniunt ſuis reſpective æquationibus cano-

Digitized by Google

canonicis differentialibus. Iſtæ vero æquationes finitæ erunt ſemper algebraïcæ vel ſaltem exponentiales, prout exponentes indeterminatarum fuerint vel rationales, vel irrationales. Quandoquidem igitur æquationes canonicæ in hac Tabella continuanda comprehenſæ, includunt omnes quæ dari poſſunt æquationes differentiales homogeneas & rationales; liquet, ſi oſtendero modum canonicas integrandi, rem generaliter confectam fore pro quacunque ejuſmodi æquatione differentiali integranda, ſine prævia indeterminatarum ſeparatione. Hoc vero eſt, quod jam docere volo.

XII.

In anteceſſum notare convenit, cuicunque æquationi differentiali homogeneæ, ſive ſit rationalis, ſive irrationalis, ſatisfacere lineam aliquam rectam, id quod ex eo patet, quia, ſi ponatur $y = nx$, adeoque $dy = ndx$ (aſſumto coefficiente invariabili n), iique valores pro y & dy in æquatione differentiali ſurrogentur, prodibit utique æquatio quæ diviſa per dx, & per potentiam ipſius x, cujus exponens eſt ipſe ordinis index, dabit æquationem algebraïcam, ab indeterminatis liberam, inter cognitas a, b, c, &c. & incognitam n, ejuſque varias dimenſiones; unde ſuppoſita radicum extractione ex æquationibus algebraïcis; erit illius æquationis radix n coefficiens quæſitus in nx, quod ipſi y æquale ponebatur.

XIII.

Ut res exemplo illuſtretur, capiamus æquationem differentialem canonicam ordinis ſecundi $(axx + bxy + cyy)dx + (exx + fxy + gyy)dy = 0$; atque in ea ſubſtituamus nx pro y, $nnxx$ pro yy, & ndx pro dy. Quo facto habebitur $(axx + nbxx + nncxx)dx + (exx + nfxx + nngxx)ndx = 0$; Dividendo igitur per $xxdx$, ac more ſolito ſecundum ordinem dimenſionum incognitæ n diſponendo, reſultat æquatio cubica

$gn^3 + (f + c)nn + (e + b)n + a = 0$, cujus radix n ducta in x dabit valorem ipſius y. Adeoque ſi conſtruatur triangulum rectangulum (ſuppoſito coordinatas angulum rectum facere) cujus baſis ad cathetum habeat rationem ut 1 ad n, dico hypothenuſam hujus trianguli, in utramque partem prolongatam, eſſe lineam ſatisfacientem æquationi differentiali canonicæ ordinis ſecundi, cujus coordinatæ ſunt parallelæ baſi & catheto.

X I V.

Loco alterius exempli ex homogeneis irrationalibus ſit æquatio in §. 5 propoſita $axdy + dx\sqrt{(xx + yy)} = 0$. Ubi ſi ponatur $nnxx$ pro yy, & ndx pro dy, ac poſtea dividatur per xdx; emerget $na + \sqrt{(1 + nn)} = 0$, quæ reſoluta dat $n = 1 : \sqrt{(aa - 1)}$. Facto itaque triangulo cujus baſis ad cathetum ſit ut 1 ad $1 : \sqrt{(aa - 1)}$, hoc eſt, ut $\sqrt{(aa - 1)}$ ad 1, erit hypothenuſa utrimque prolongata conveniens linea æquationi differentiali propoſitæ $axdy + dx\sqrt{(xx + yy)} = 0$, ejuſque coordinatæ lateribus parallelæ. Si $a = 1$, abit hypothenuſa in rectam applicatis parallelam, abſciſſæ vero evaneſcunt. Hicque caſus omnino fluit ex æquatione ad curvam quam ſupra §. 7 invenimus $x^4 \pm 2bRyx - bbR^2 = 0$, faciendo enim b (quia eſt arbitraria) $= 0$, habetur $x^4 = 0$, adeoque $x = 0$.

X V.

Propero nunc ad methodum eruendi quoque lineas curvas, æquationibus canonicis differentialibus cujuſque ordinis reſpondentes, h. e. integrandi illas æquationes univerſaliter, idque ſine interventu ſeparationis indeterminatarum. Hoc ut præſtetur, formanda eſt æquatio finita, in quam ingrediantur tot litteræ aſſumtitiæ conſtantes, quot ſunt termini in æquatione canonica integranda, & quæ differentiata eaſdem cum hac obtineat dimenſiones indeterminatarum x & y. Illa autem æquatio finita talem (ceu cuilibet attendenti haud ægre pateſcit) habere debet formam $(x + \alpha y)^{\pi} \times (x + \beta y)^{\tau} \times (x + \gamma y)^{\varrho} \times (x + \epsilon y)^{\phi} \times \&c. = C$, ut

Digitized by Google

ut nimirum conſtituatur productum ex factoribus binomialibus $x + \alpha y$, $x + \beta y$, $x + \gamma y$, $x + \epsilon y$ &c. ad potentias π, τ, ρ, ϕ &c. elevatis, quod æquale fiat quantitati conſtanti C, ubi coefficientes α, β, γ, ϵ, ut & exponentes π, τ, ρ, ϕ, &c. ſunt aſſumtitii per calculum inveſtigandi. Quod attinet ad numerum factorum horum binomialium, aſſumendi ſunt duo pro canonica primi ordinis, tres pro canonica ſecundi ordinis, quatuor pro canonica tertii ordinis, atque ita conſequenter. Hoc nempe pacto fit, ut tot ſimul habeantur aſſumti coefficientes & exponentes, quot ſunt termini in propoſita æquatione canonica. Unde differentiando, eum in modum quem ſtatim exponam, aſſumtam æquationem formatam ex factoribus binomialibus, prodibit æquatio differentialis ejuſdem ordinis, & tot præciſe terminorum quot canonica habet; adeo ut totidem inſtitui poſſint comparationes inter utriuſque terminorum coefficientes, quæ determinabunt aſſumtos coefficientes & exponentes, ipſamque adeo æquationem finitam, quæ deſideratur, pro data canonica differentiali.

XVI.

Dabo exemplum unicum & quidem omnium facillimum, quod abunde illuſtrabit methodum: Sit æquatio canonica primi ordinis $(ax + by)\,dx + (cx + ey)\,dy = 0$ integranda, cui ſuppono convenire hanc æquationem finitam $(x + \alpha y)^{\pi} + (x + \zeta y)^{\tau} = C$; indagandi ergo ſunt valores litterarum α, ζ, π, τ. Hoc ut commode fiat, ſumo, priuſquam differentietur, logarithmos aſſumtæ æquationis finitæ, & habebo $\pi l(x + \alpha y) + \tau l(x + \zeta y) = lC$, quæ poſtea more ſolito differentiata mihi dat $(\pi dx + \alpha\pi dy) : (x + \alpha y) + (\tau dx + \zeta\tau dy) : (x + \zeta y) = dlC = 0$; ſeu peracta reductione, multiplicando ſcilicet per crucem, ut denominatores tollantur, $(\pi + \tau)\,x\,dx + (\zeta\pi + \alpha\tau)\,y\,dx + (\alpha\pi + \zeta\tau)\,x\,dy + (\alpha\zeta\pi + \alpha\zeta\tau)\,y\,dy = 0$. Itaque hanc inter & canonicam $(ax + by)\,dx + (cx + ey)\,dy = 0$ inſtituenda eſt comparatio terminorum ſimilium, ad determinandos coefficientes & exponentes aſſumtos α, ζ, π, τ; unde hæ quatuor emergent æqualitates

litates $\pi + \tau = \alpha$, $\beta\pi + \beta\tau = b$, $\alpha\pi + \beta\tau = c$, $\alpha\beta\pi + \alpha\beta\tau = e$. Computo jam recte inſtituto, reperientur valores optati tam coefficientium quam exponentium, quemadmodum ſequitur, ſcilicet

$$\alpha = (b + c - \surd(bb + 2bc + cc - 4ae)) : 2a$$
$$\beta = (b + c + \surd(bb + 2bc + cc - 4ae)) : 2a$$
$$\pi = (ab - ac + a\surd(bb + 2bc + cc - 4ae)) : 2\surd(bb + 2bc + cc - 4ae)$$
$$\tau = (-ab + ac + a\surd(bb + 2bc + cc - 4ae)) : 2\surd(bb + 2bc + cc - 4ae)$$

Ubi notandum, poſſe hos valores ſimplicius exprimi, reducendo nempe x in utroque factore binomiali ad communem denominatorem $2a$, & hunc poſtea omittendo; ſicuti etiam dividendo exponentes inventos per communem quantitatem $a : 2\surd(bb + 2bc + cc - 4ae)$. Liquet enim, ſi $(x + \alpha y)^{\pi} \times (x + \beta y)^{\tau}$ fuerit $=$ conſtanti, fore etiam $(2ax + 2a\alpha y)^{\pi : n} \times (2ax + 2a\beta y)^{\tau : n}$ $=$ conſtanti. His ita monitis, & ſcripto brevitatis gratia m pro $\surd(bb + 2bc + cc - 4ae)$, atque C majuſculo pro quantitate conſtanti arbitraria, dico hanc æquationem finitam $(2ax + (b + c - m)y)^{(b - c + m)} \times (2ax + (b + c + m)y)^{(-b + c + m)} = C$, eſſe integralem æquationis differentialis canonicæ primi ordinis $(ax + by)dx + (cx + ey)dy = 0$, omnes poſſibiles caſus particulares hujus ordinis in ſe complectentis. Poteſt vero inventa illa æquatio finita mutari in hanc formam, adhibita aliqua dexteritate, $(axx + byx + cyx + eyy)^{(-b + c + m)} \times (2ax + (b + c + m)y)^{(2b - 2c)}$ $= C$, vel in hanc aliam nonnihil diverſam $(axx + byx + cyx + eyy)^{(b - c + m)} \times (2ax + (b + c + m)y)^{(-2b + 2c)} = C$.

XVII.

Coroll. I. Hinc ſi $b = c$, erit tunc in prima æquatione inventa, neglecto communi exponente m utriuſque factorum, $(2ax + (2b - m)y) \times (2ax + (2b + m)y) = C$; hoc, eſt multipli-

multiplicatione actualiter peracta, erit $4aaxx + 8abxy + (4bb - mm)yy = C$, ſive, reſtituto valore ipſius mm & dein per $4a$ diviſo, proveniet $axx + 2bxy + eyy = C$, quod idem etiam ex duabus mutatis provenit; ſicuti omnino provenire debet per vulgarem integrandi modum, qui hoc in caſu locum habet, cum enim nunc ſit $axdx + b(ydx + xdy) + eydy = 0$, cujus ſingulæ partes ſunt integrabiles; integrentur ergo, & erit duplum ſumendo, $axx + 2byx + eyy = C$; ut modo habuimus.

XVIII.

Coroll. II. Eſto jam alterutra a vel $e = 0$; erit $m = b + c$, quo ſubſtituto in prima noſtra æquatione mutabitur illa [poſito $e = 0$] in hanc $x^b \times (ax + by + cy)^c = C$, vel [poſito $a = 0$] in hanc $y^c \times (bx + cx + ey)^b = C$. Idem dant duæ reliquæ, in quas prima illa mutata fuit.

XIX.

Coroll. III. Si $m = 0$, hoc eſt ſi $bb + 2bc + cc = 4ae$; prima noſtra generalis æquatio finita reſpondens differentiali canonicæ primi ordinis, migraret in hanc quæ abſurdum quid contineret $(2ax + (b + c)y)^{b-c} \times (2ax + (b + c)y)^{-b+c} = C$. Quia enim factores nunc ſunt æquales, exponentes vero, utpote alter alterius negativus, ſe mutuo deſtruunt, haberetur $(2ax + (b + c)y)^0 = C$, ſive $1 = C$, id eſt, unitas = quantitati arbitrariæ; quod utique eſſet abſonum & nihil indicaret; idemque etiam ex reliquis duabus emergeret. Quocirca cautela aliqua hic opus eſt, ne quis credat nullam prorſus in hoc caſu dari æquationem inter coordinatas x & y. Sic itaque ſtatuo. Fingamus loco exponentis o haberi exponentem generalem p, ita ut ſit $(2ax + (b + c)y)^p = C$; atque cum C denotet quantitatem arbitrariam, vocatur illa C^p; eritque ($2ax +$

$(b+c)y)^p = C^p$, unde extracta radice exponentis p, fiet $2ax + (b+c)y = C$; hoc autem valet qualiſcunque ſit p, ergo etiam quando $p=0$. Proinde dico, æquationem $2ax+by+cy=C$ ſatisfacere in caſu quo $m=0$, ſeu quo $bb+2bc+cc=4ae$. Atqui hoc ita ſe habere apparebit, ſi in æquatione $(ax+by)dx + (cx+(bb+2bc+cc)y:4a)dy=0$, pro x, & dx, ponantur eorum valores ex æquatione inventa eliciti, $-(b+c)y:2a$ & $-(b+c)dy:2a$; etenim evaneſcet, ut fieri debet, æquatio propoſita $(ax+by)dx+(cx+(b+c)^2y:2a)dy=0$. Hinc videmus, nullam lineam curvam huic caſui inſervire, ſed rectam tantum ex hac æquatione $2ax+by+cy=0$ deſcribendam. Quæ eadem quoque reperitur, ſi adhibetur regula in §. 12 tradita pro determinandis lineis rectis, quas in univerſum omnes æquationes canonicæ admittunt, ut ibidem oſtendi.

X X.

Coroll. IV. Quod ſi quatuor coefficientes a, b, c, e ſint proportionales, adeoque ſi $ae=bc$ in hoc caſu erit $m=b-c$; id quod quamlibet ex tribus noſtris æquationibus finitis mutat in $(2ax+2cy)^{2b-2c}=C$, vel neglecto exponente, in $ax+cy=C$, quæ iterum eſt ad lineam rectam. Quod quidem immediate colligi poteſt ex propoſita æquatione differentiali, quæ in præſenti caſu eſt $(ax+by)dx+(cx+bcy:a)dy=0$ diviſibilis per $ax+by$; prodit enim $dx+cdy:a=0$, ſeu $adx+cdy=0$; adeoque integrando, erit $ax+cy=C$, ut ante. Et hic quidem caſus, cum altero §i præcedentis ſunt fortaſſe ſoli, qui per ſolas lineas rectas ſolvi poſſunt, omnemque adeo curvam excludunt.

X X I.

Coroll. V. Cum in æquatione canonica indeterminatæ x, y, earumque differentiales dx, dy, ſimili gaudeant habitu & relatione inter ſe invicem; manifeſtum eſt poſſe mutari æquationem finitam in aliam æquipollentem, ſecribendo tantum in

illa

Digitized by Google

illa y pro x, e pro a, c pro b, & vice verſa. Quo facto prima noſtra æquatio finita $(2ax+by+cy-my)^{b-c+m} \times (2ax+by+cy+my)^{-b+c+m} = C$, induet hanc aliam formam, licet reipſa non diverſam $(2ey+bx+cx-mx)^{c-b+m} \times (2ey+bx+cx+mx)^{-c+b+m} = C$. Quod verum eſſe comperietur, ſi utraque differentietur eo modo, quo uſi ſumus in §. 16, reducendo nempe ad logarithmos ante differentiationem. Ita quoque reliquæ duæ in has æquipollentes permutantur, $(axx+byx+cyx+eyy)^{b-c+m} \times (2ey+(b+c-m)x)^{-2b+2c} = C$; & $(axx+byx+cxy+eyy)^{-b+c+m} \times (2ey+(b+c+m)x)^{2b-2c} = C$.

XXII.

Coroll. VI. Illud quoque notatu dignum reputo, quod omnes curvæ, quæ reſpondent æquationibus noſtris finitis, habent areas ſuas quadrabiles, uno tantum caſu excepto, quando ſcilicet $b = c$. Quod ſane pro paradoxo haberi poſſet, niſi res admodum facile demonſtraretur ex ipſa æquatione canonica $(ax+by)\,dx+(cx+ey)\,dy = 0$ apte diſpoſita. Liquet enim, illam ita poſſe ordinari, $axdx+cydx+cxdy+eydy = (c-b)\,ydx$, ut integrabilis fiat per partes prioris membri, alterum vero deſignet elementum areæ ydx in $c-b$ ductum; integrando itaque per partes prodibit $\frac{1}{2}axx+cxy+\frac{1}{2}eyy = (c-b)\int ydx+C$, unde $\int ydx$, ſeu area curvæ, erit $= (axx+2cxy+eyy-2C):(c-b)$ & proinde quadrabilis, præterquam in caſu $c=b$, in quo habetur $= \infty$, hoc eſt = infinito, quod ipſum indicio eſt in illo caſu aream curvæ eſſe inquadrabilem; etiamſi hoc jam concludi poſſit ex ipſa æquatione ad curvam, quam in §. 17 hanc eſſe invenimus $axx+2bxy+eyy = 0$; & quæ, ſi examinetur, ad hyperbolam vel ellipſin ſpectare obſervabitur.

XXIII.

Scholium. Ex hoc, quod ad longum deduximus, ſpecimine pro integranda æquatione canonica primi ordinis, ſine præcedanea indeterminatarum ſequeſtratione, nemo non videt, methodum eſſe generalem pro quocunque ordine, aſſumendo pro ſecundo ordine hanc æquationem $(x+\alpha y)^{\pi} \times (x+\beta y)^{\tau} \times (x+\gamma y)^{\varrho} = C$; pro tertio hanc $(x+\alpha y)^{\pi} \times (x+\beta y)^{\tau} \times (x+\gamma y)^{\varrho} \times (x+\epsilon y)^{\phi} = C$, & ita pro cæteris; ſic enim fiet, ut pro quolibet ordine tot reperiantur litteræ aſſumtitiæ α, β, γ, ϵ, &c. π, τ, ϱ, ϕ, &c. quot ſunt coefficientes in æquatione differentiali canonica illius ordinis, atque hoc modo obtineantur totidem æqualitates ad determinandos tam coefficientes α, β, γ, ϵ, &c. quam exponentes π, τ, ϱ, ϕ, &c. In altioribus evadit calculus operoſior quidem, ac propterea moleſtior; ſed ideo methodus haudquaquam difficilior, quippe quæ uniformis eſt in omnibus.

N°. CXXXVII.

THEOREMATA SELECTA,

Pro conſervatione virium vivarum demonſtranda & experimentis confirmanda.

Auctore Joh. Bernoulli.

Excerpta ex Epiſtolis datis ad filium Danielem, 11. *Oct.* & 20. *Dec.* (*ſtil. nov.*) 1727.

THEOREMA I.

Comment. Acad. Petrop. Tom. II. pag. 200.

Velocitas aquæ per foramen valde parvum in fundo vaſis exilientis, tanta eſt, quantam grave acquirit libere cadendo ex altitudine aquæ ſupra foramen. *

* Videatur Nrus CXLIX.

Theo-

THEOREMA II.

Sit curva data CbB, (*fig.* 1.) per quam deſcendat grave B poſt ſe in altum trahens aliud grave minus A, ope funiculi ACB trochleam C ambientis. Quæruntur velocitates ponderum A & B? TAB. XLV. *Fig.* 1.

Sit $CB = x$, $EB = y$, earum differ. $Bn = dx$, $Bo = dy$, $Bb = ds$, altitudo verticalis TV, per quam grave liberum cadens celeritatem acquirit, quam mobile B habet $= t$, erit $t = ds^2\,(By - Ax) : (Bds^2 + Adx^2)$. Haud difficilius eſt Problema, ſi etiam grave A ſuper curva aliqua data moveatur *.

THEOREMA III.

Sit tubus cylindricus ACBH (*fig.* 2.) utrobique apertus atque inflexus in duo crura BA & CH ad partem horizontalem BC; ſit ſinus anguli $ABC = p$, & ſinus anguli $HCB = q$, exiſtente nimirum ſinu toto $= 1$. Sit porro ille tubus aqua plenus uſque ad horizontalem MN, voceturque L longitudo partis tubi MBCN aqua plenæ. Erunt agitati liquoris in hoc tubo oſcillationes, tam majores, quam minores, omnes tautochronæ atque ejuſdem durationis cum oſcillationibus minimis penduli alicujus ſimplicis, cujus longitudo $= L : (p + q)$. TAB. XLV. *Fig.* 2.

COROLL. Si anguli ABC & HCB ſunt recti, qui unicus caſus eſt a NEWTONO ſolutus, erit longitudo penduli ſimplicis, quod oſcillanti aquæ iſochronum eſt, $= \frac{1}{2}L$, ut invenit NEWTONUS.

THEOREMA IV.

Chorda muſica, datæ longitudinis & ponderis, tenſa a dato pondere, invenitur facere vibrationes, quemadmodum definit TAYLORUS in *Tranſactionibus Londin.*

* Vid. Ni. CXLIV, CXLV.

Digitized by Google

Theorema V.

TAB. XLV. *Fig.* 3. Sit jam chorda ALB (*fig.* 3) craſſitiei & ponderis expers; onerata in medio ponduſculo dato perexiguo *L*, tenſa autem dato pondere P magno: dico numerum vibrationum hujus chordæ, durante una oſcillatione penduli datæ longitudinis *D*, fore $= 2\sqrt{(D \times P : AB \times L)}$.

Theorema VI.

TAB. XLV. *Fig.* 4. Iisdem poſitis ſit chorda AB (*fig.* 4.), onerata duobus ponduſculis æqualibus & æquidiſtantibus, cum a ſe invicem tum ab extremitatibus A & B. Vocetur unumquodque ponduſculorum $\frac{1}{2}L$: dico fore numerum vibrationum (oſcillante ſemel pendulo dato *D*) $= \sqrt{(6D \times P : AB \times L}$.

Theorema VII.

Si, manentibus reliquis, ſint tria ponduſcula ſingula $= \frac{1}{3}L$; erit numerus vibrationum chordæ $= 2\sqrt{((6 - 3\sqrt{2})D \times P : AB \times L)}$. Si ponduſcula ſint quatuor ſingula $= \frac{1}{4}L$, erit numerus vibrationum, quem vocabo $N = 2\sqrt{((5 - \sqrt{5}) D \times P : (5 + \sqrt{5}) \times \frac{1}{5} AB \times L)} = 2\sqrt{((25 - 5\sqrt{5}) D \times P : (5 + \sqrt{5}) AB \times L)}$. Si fuerint quinque ponduſcula, quorum unumquodque $= \frac{1}{5}L$, habebitur $N = \sqrt{((60 - 30\sqrt{3}) D \times P : AB \times L)}$. Sint tandem ponduſcula ſex, ſingula $= \frac{1}{6}L$, erit $N = \sqrt{((42xx - 126ax + 168aa) D \times P : (2xx + ax + aa) AB \times L)}$, ubi notandum, per *a* me intelligere numerum quemlibet pro lubitu aſſumtum, atque tum *x* eſſe radicem hujus æquationis $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$. Eadem methodo, quam habeo, progredi poſſum ad determinandos numeros vibrationum pro pluribus ponduſculis, quibus chorda onerata ſupponi poteſt: ſed pergo ad alia *.

De gravibus rotando deſcendentibus in plano inclinato, vel in

* Vid. Nus. CXL.

in curva aliqua, vel etiam verticaliter ſuſpenſis ex filis circa axes circumvolutis ſeſe evolvendo, ſequentia habe.

THEOREMA VIII.

Sit grave aliquod cujuſcunque figuræ BFG, (*Fig.* 5.) cujus centrum gravitatis ſit C, ex quo & radio CA deſcriptus AHL circulus repræſentet axem, cui circumvolutum intelligatur filum aliquod, ſecundum ordinem litterarum EALHALHAL &c. Ipſum vero grave ſua gravitate deſcendere concipiatur, id quod fieri non poteſt niſi rotando, dum nimirum axis ex filo ſeſe evolvit hoc litterarum ordine AHLAHL. Quæritur, poſtquam ex altitudine EA quacunque deſcenderit grave, quanta ſit velocitas centri C? TAB. XLV. *Fig.* 5.

SOLUTIO. Vocetur D diſtantia centri oſcillationis figuræ rotantis a puncto ſuſpenſionis, quod ubicunque in circumferentia AHL ſumi poteſt. Sit radius CA $= a$; EA altitudo verticalis, per quam grave rotando deſcendit, $=$ R; altitudo quæſita per quam grave aliquod liberum deſcendere debet, ut acquirat velocitatem æqualem illi quam habet gravis rotantis centrum gravitatis C, $= z$; dico fore $z = aR : D$.

COROLL. 1. Si grave BFG eſt circumferentia circuli, vel ſuperficies cylindrica, cujus radius CB $= b$, erit $z = aaR : (aa + bb)$.

COROLL. 2 Si vero ſit ipſe circulus vel cylindrus, erit $z = 2aaR : (2aa + bb)$:

COROLL. 3. Si ſit ſuperficies ſphærica, habebitur $z = 3aaR : (3aa + 2bb)$.

COROLL. 4. Et tandem ſi ſit globus gravis, fiet $z = 5aaR : (5aa + 2bb)$.

Notandum, in his omnibus, poni axem AHL gravitatis expertem.

SCHOLION. Poſſent experimenta inſtitui, ut pateret an centrum C haberet velocitatem, quam hic aſſignavimus, quo ipſo cuilibet manifeſta fieret conſervatio virium vivarum, cum præ-

Digitized by Google

præſertim pro lubitu temperare liceat deſcenſum, ut centrum tam lente, quam volumus, deſcendat, adeoque tempus deſcenſus per quamlibet altitudinem EA commode comparari poſſit cum deſcenſu naturali gravium cadentium, quæ nimirum uno ſecundo 15 ped. Reg. Paris. circiter a quiete delabuntur. Ut enim lentiſſime deſcendat, minuenda eſt tantum quantum ſatis ratio CA ad CB. Poſſunt quoque ex principio conſervationis virium vivarum determinari leges communicationis motus pro corporibus perfecte elaſticis, quæ rotando ſe mutuo impellunt, ſed brevitatis gratia eas hic non exprimo, ſufficit monere eas ex parte dependere a figura corporum rotantium. Multa alia nunc taceo, quæ commode per theoriam virium vivarum explicari aut ſolvi poſſunt, quæ vero ex aliis principiis difficulter, nec ſine ambagibus, determinantur, quibus annumero, quæ ſuperius dixi circa vibrationes chordarum & oſcillationes fluidorum in tubis reflexis, nec non ea, quæ de gravibus rotando deſcendentibus, vel de corporibus rotando in ſe invicem impingentibus expoſui. Cætera, argumentum plane eſt novum & nulli hactenus, quantum ſcio, conſideratum. Demonſtrationes alia vice mittam.

MONITUM.

Experimenta deſiderata in Scholio Theorematis 8, fuerunt inſtituta accuratiſſime in diverſis corporibus, eaque plane cum Theoria convenire obſervatum fuit. In ſequenti Epiſtola ad Filium data, talia ad hoc argumentum pertinentia atque in Latinum ſermonem verſa reſcripſit horum Theorematum Auctor.

Non dubitavi, quin facile invenires demonſtrationes Theorematum meorum, ope principii conſervationis virium vivarum, & gaudeo te alia eruiſſe ſimilia: gratum quoque fuit ex te intelligere, tam egregie Theoriam iſtam experimentis confirmari. Sententiam meam de tenſione fili corpus rotans ſuſtinentis in Theoremate octavo, quam ſcire cupis, jam tecum communicabo, ex qua patebit, eſſe tenſionem fili conſtantem, durante

te toto deſcenſu mobilis rotantis, cujuſcunque ſit figuræ. Sit IKL (*fig.* 6.) ſcala velocitatum naturalium, cujus nempe applicatæ MK, NL deſignent velocitates acquiſitas mobilis libere cadentis ex altitudinibus IM, IN. Sit alia curva IRS, cujus applicatæ PR, QS exprimant velocitates centri gravitatis mobilis alicujus ex filo ſuſpenſi, rotando ab initio I deſcendentis per evolutionem fili. Agantur ex punctis infinite propinquis K, L rectæ KT, LS, axi IQ parallelæ, ſecantes curvam IRS, in R, & S; erunt, ductis applicatis RP, SQ, ex natura velocitatum mobilis rotando deſcendentis [nominatis IP vel IQ = *R*, & IM vel IN = *Z*, PQ = *dR*, MN = *dZ*] *Z* = *aR* : *D*. [Vid. Epiſtolam meam anteriorem], hoc eſt, *D* : *a* = *R* : *Z* = IQ : IN = IP : IM = PQ : MN; unde, ob conſtantem rationem inter IQ & IN, vel inter IP & IM, patet curvam IRS, eſſe etiam parabolam; hinc, ob velocitates PR, MK æquales, erit tempuſculum per PQ ad tempuſculum per MN ut PQ ad MN, ſeu ut IP ad IM = *R* : *Z* = *D* : *a*. Sumta jam PO = MN, ductaque applicatis parallela OV ſecante KR productam in Y, & elementum parabolæ RS in X; fingamus filum, quando mobile pervenit in P ſubito rumpi, ita ut acquiſita ſua velocitate PR = MK, pergat libere deſcendere; quare in O habebit velocitatem OV = NL, & incrementum velocitatis momentaneum erit YV = ZL. Quia autem non rupto filo, incrementum velocitatis eodem momento acquiſitum eſt tantum YX, liquet reliquum XV impediri a filo; idemque adeo impendi in tenſionem fili. Unde ita argumentor: Incrementa & decrementa velocitatis, in eodem corpore & eodem tempuſculo producta, ſunt ut vires quæ ea producunt: eſt ergo tenſio fili, quæ dicatur *T*, ad vim gravitatis mobilis rotantis, hoc eſt, ad ejus pondus, quod vocetur *P*, ut VX ad VY = ST, adeoque ut SV ad RT, vel ut OQ ad PQ, hoc eſt, ut PQ — MN ad PQ. Unde *T* ad *P* = *dR* — *dZ* : *dR* = *R* — *Z* : *R* :: *D* — *a*. *D*, proinde *T* = (*D* — *a*) *P* : *D*. Q. E. I.

TAB. XLV. Fig. 6.

TAB. XLV. Fig. 5. Coroll. 1. Si mobile grave BFG (vid. *fig.* 5.) eſt circumferentia circuli vel ſuperficies cylindrica, cujus radius CB $= b$, erit $D = (aa + bb) : a$, adeoque $T = bbP : (aa + bb)$.

Coroll. 2. Si BFG ſit ipſe circulus vel cylindrus, cujus radius $= b$, erit $D = (2aa + bb) : 2a$, unde $T = bbP : (2aa + bb)$.

Coroll. 3. Si ſit ſuperficies ſphærica, cujus radius $= b$, erit $D = (3aa + 2bb) : 3a$; hinc $T = 2bbP : (3aa + 2bb)$.

Coroll. 4. Si ſit globus ſolidus, cujus radius $= b$, erit $D = (5aa + 2bb) : 5a$; proinde $T = 2bbP : (5aa + 2bb)$.

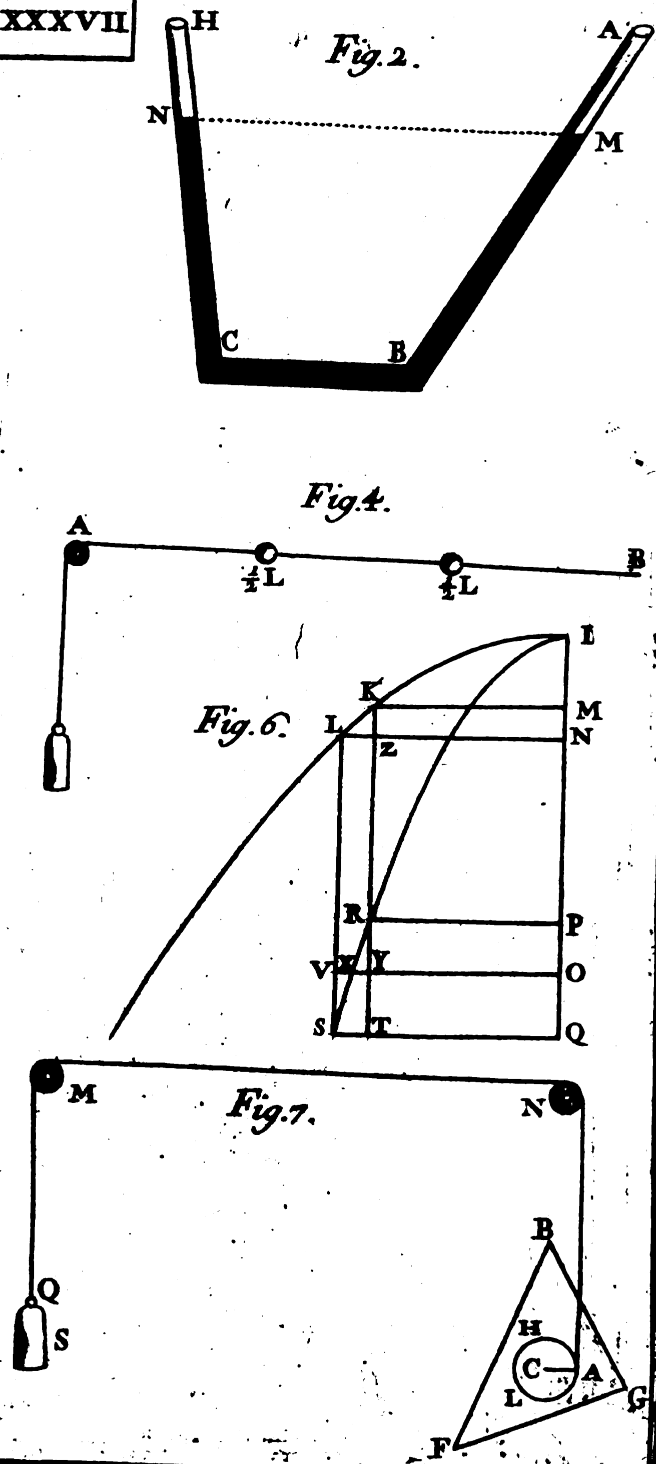
Coroll. 5. Sit jam mobile grave BFG (*Fig.* 7.) non TAB. XLV. Fig. 7. rotundum, ſed ex. gr. triangulum iſoſceles rectangulum in G; recta perpendicularis ex G in hypothenuſam demiſſa $= c$; CA radius circuli AHL [qui repræſentat axem cui filum circumvolutum eſt, & qui pro centro habet centrum gravitatis trianguli BFG] $= a$: Erit $D = (2cc + 9aa) : 9a$, ideoque $T = 2ccP : (2cc + 9aa)$, ſumendo hic etiam P pro pondere trianguli. Atque ita in aliis.

SCHOLION. Hæc Corollaria, tanquam totidem Theoremata non parum curioſitatis habent, ſiquidem facillimum eſt ea per experientiam confirmare; appendatur ex. gr. prædictum triangulum quod rotando deſcendere debet ad extremitatem unius brachii libræ; & ad alteram ejus extremitatem alligetur pondus $= 2ccP : (2cc + 9aa)$. Dico enim pondus hoc minus in æquilibrio ſervaturum pondus majus trianguli P; quamdiu hoc rotando deſcendit. Vel etiam hunc in modum inſtitui poſſet experimentum: Sint duæ trochleæ in centris ſuis parieti infixæ, quas ambiat filum QMNA axi ALH involutum, ſitque hujus axis centrum C in centro gravitatis trianguli iſoſcelis BFG rectanguli in G, cujus pondus $= P$; ad alteram fili extremitatem Q appendatur pondus S $= 2ccP : (2cc + 9aa)$. Dico pondus S, in quiete manſurum, dum triangulum BFG, per evolutionem fili rotando deſcendit.

NOU-

Digitized by Google

N°. CXXXVII


Fig. 2.
H
A
N
M
C
B
Fig. 4.
A
B
½L
½L
Fig. 6.
E
K
M
L
N
Z
R
P
V
X
Y
O
S
T
Q
Fig. 7.
M
N
Q
S
B
H
C
A
L
G
F

Digitized by Google

N°. CXXXVIII.

NOUVELLES PENSÉES SUR LE SYSTÊME DE M. DESCARTES,

Et la maniere d'en déduire les Orbites & les Aphélies des Planètes.

PIECE QUI A REMPORTÉ LE PRIX
proposé par l'Académie Royale des Sciences
pour l'année 1730.

Par M. JEAN BERNOULLI, *Profeſſeur des Mathématiques à Bâle, & membre des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Pruſſe.*

Imprimé

A PARIS,

MDCCXXX.

R 2

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

L'ACADEMIE a trouvé cinq Pieces, parmi celles qui lui ont été envoyées, qui méritoient de concourir, & principalement la Piece N°. 13, dont la Deviſe eſt :

Me vero primum dulces ante omnia Muſæ
Accipiant, Cœlique vias & ſydera monſtrent.

Les autres ſont la Piece N°. 3, dont la Deviſe eſt: *Sicut tenebræ ejus, ita & lumen ejus.* La Piece N°. 26, dont la Deviſe eſt: *Multa contigit ſcire, ſed non intelligere.* La Piece N°. 20, dont la Deviſe eſt : *Cœli enarrant gloriam Dei, & opera manuum ejus annunciat firmamentum.* Et la Piece N°. 27, dont la Deviſe eſt : *Ex minimis maxima.*

Digitized by Google

NOUVELLES PENSÉES SUR LE SYSTÊME DE M. DESCARTES,

Et la maniere d'en déduire les Orbites & les Aphélies des Planêtes.

Virtus recludens immeritis mori
Cœlum, negata tentat iter via.

HORAT. Od. 2 Lib. 3. Carm.

I.

L'ILLUSTRE Académie des Sciences ayant propoſé pour l'année 1730 cette queſtion: *Quelle eſt la cauſe de la figure elliptique des Orbites des planetes, & pourquoy le grand axe de ces Ellipſes change de poſition; ou ce qui revient au même. Pourquoy leur Aphélie, ou leur Apogée répond ſucceſſivement à differens points du Ciel?* J'ai cru qu'il m'étoit permis d'eſſayer mes forces ſur ce ſujet. On ſera peut-

être ſupris de voir que j'oſe reproduire ſur la ſcène les Tourbillons céleſtes, dans un tems où pluſieurs Philoſophes, particulierement des Anglois, les regardent comme de pures chimeres, & n'en parlent qu'avec le dernier mépris; mais la ſavante COMPAGNIE, à l'examen de laquelle je ſoumets mes penſées, jugera ſi on a raiſon de condamner un Syſtême bâti ſur des principes clairs & intelligibles, & de lui en ſubſtituer un autre fondé ſur des principes dont on ne peut ſe former aucune idée; ce qui en matiere de Phyſique me paroit une raiſon ſuffiſante pour rejetter un tel Syſtême, quand il ſeroit au reſte le plus heureuſement inventé pour l'explication de tous les Phénomènes; ſur tout ſi on a les moyens en main de faire voir que par le premier Syſtême bien ménagé, on eſt en état, non ſeulement de rendre raiſon de ces mêmes Phénomènes, mais auſſi de répondre aux objections les plus fortes qu'on a voulu faire valoir en Angleterre comme des armes invincibles contre les Tourbillons. Or je montrerai dans ce petit Diſcours qu'on a effectivement ces moyens pour éxécuter l'un & l'autre. Je vais commencer par faire une courte diſcuſſion des differentes idées que l'on a ſur le Syſtême général du Monde; enſuite, je répondrai à la prétendue impoſſibilité des Tourbillons fondée ſur deux Propoſitions de M. NEWTON; en troiſiéme lieu, je donnerai la ſolution de la queſtion propoſée, par l'hypothéſe des Tourbillons.

II.

Les deux parties que contient cette Queſtion, conſiſtent à déterminer 1°. la cauſe des Ellipſes que les Planètes décrivent dans le Ciel, 2°. la cauſe du changement de poſition des grands axes de ces Ellipſes. On ſuppoſe donc, comme une choſe avérée que les Orbites des Planètes ont une figure elliptique, & que les Aphélies ſont mobiles.

III.

III.

On a raiſon de le ſuppoſer ; les Phénomènes démontrent l'un & l'autre : quoique quant aux Planètes principales, le mouvement de leur Aphélie ſoit ſi lent, que pluſieurs, tant Aſtronomes que Philoſophes, ont voulu douter s'il eſt véritable, ou plûtôt apparent ; mais je le ſuppoſerai réel & véritable, d'autant plus qu'il découle fort naturellement du Syſtème dont j'entreprends la défenſe.

IV.

L'arrangement des parties du Monde ; l'ordre & le mouvement des Aſtres, enfin la ſymmétrie entre tout ce qui compoſe l'Univers, eſt ce qu'on nomme communément le Syſtème du Monde ; mais comme c'eſt une explication phyſique qu'on demande ſur les deux points en queſtion, on voit bien qu'il ne ſuffit pas de regarder ce grand édifice avec des yeux aſtronomes, c'eſt-à-dire, de ſe contenter de ſavoir le cours & les autres ſymptomes des Aſtres, ſuivant les régles établies par les obſervations & l'idée du Syſtème qu'on adopte, ſans ſe mettre en peine comment ni pourquoy les choſes ſont ainſi faites & point autrement. Il faut de plus pénétrer dans les cauſes phyſiques, connoitre les Loix du mouvement, & les prendre de la ſource, ſi on veut être en état de rendre raiſon des effets obſervés par les Aſtronomes.

V.

Cependant comme les Aſtronomes ſont obligés de choiſir un Syſtème qui convienne, autant qu'il eſt poſſible, aux Phénomènes céleſtes, dans toutes les particularités qui les accompagnent ; auſſi les Phyſiciens ne ſont pas moins obligés de s'y tenir préférablement à tout autre : car comment pourroit-on tirer des vérités en raiſonnant ſur une hypothéſe douteuſe, ou tout-à-fait fauſſe ? Ainſi je ne m'arrêterai pas au Syſtème de PTO-

LOME'E, ni à celui de TYCHO, puiſqu'il y a long-tems qu'on reconnoit l'inſuffiſance de l'un & de l'autre, tant pour l'Aſtronomie que pour la Phyſique.

V I.

Le Syſtême de COPERNIC eſt celui qui quadre le mieux pour l'Aſtronomie, comme étant le plus ſimple. On ſatisfait par ſon moyen aux principaux Phénomènes; & il eſt d'ailleurs confirmé par un grand nombres d'obſervations, & par des découvertes nouvellement faites, depuis qu'on a trouvé moyen d'employer les grands tuyaux optiques pour obſerver le Ciel. Les Satellites de Jupiter & ceux de Saturne, qui font leurs révolutions autour de ces Aſtres; le mouvement propre de Jupiter; celui de Mars & de Venus ſur leur centre, ſemblable au mouvement diurne de la Terre; les Phaſes croiſſantes & décroiſſantes de Venus; le mouvement du Soleil autour de ſon centre fixe & immobile, & pluſieurs autres découvertes de cette nature, ſont autant de preuves preſque certaines de la vérité du Syſtême de COPERNIC. Auſſi les Aſtronomes les plus habiles & de ce ſiécle & du paſſé, l'ont-ils reçû ſans difficulté, comme le ſeul qui puiſſe expliquer tous ces Phénomènes d'une maniere ſimple & naturelle.

V I I.

Mais pour ce qui eſt des cauſes phyſiques qui produiſent les mouvemens des corps céleſtes & les varietés de ces mouvemens, il s'en faut beaucoup que les Philoſophes ne ſoyent d'accord entr'eux. Mon but n'eſt pas d'éxaminer le ſentiment de chacun; on ne l'éxige pas. Je me propoſe ſeulement, parce que cela me conduit à mon ſujet, de confronter les deux differentes opinions qui ont fait le plus de bruit dans le monde. La prémiere eſt celle de M. DESCARTES; la ſeconde, qui eſt la plus en vogue en Angleterre, vient du fameux M. NEWTON.

VIII.

VIII.

Pour parler de cette derniere; en premier lieu, on ſait que M. NEWTON l'a batie ſur les vûës de KEPLER, dont il a emprunté le fondement pour compoſer ſon Syſtème. Il ne faut pas nier qu'il n'aït éxécuté ſon deſſein fort heureuſement par la force centrifuge des Planètes contre-balancée par une force contraire de leur gravitation vers le centre du mouvement. Quant à la premiere de ces deux forces, ſa nature eſt connuë, on en conçoit clairement la cauſe, & perſonne ne fait difficulté d'accorder, qu'une pierre, par exemple, agitée en rond par une fronde, acquiert un effort continuel pour s'éloigner du centre, parce qu'elle eſt empêchée par la fronde de ſe mouvoir en ligne droite, qui eſt la tangente du cercle en tout point où la pierre ſe trouve, & qui eſt la direction naturelle qu'elle ſuivroit, ſi elle n'ètoit point retenuë par la fronde: Et comme il faut une certaine force pour détourner à tout moment la pierre de ſon mouvement rectiligne, il eſt viſible qu'elle doit faire une réſiſtance égale (puiſque l'action & la réaction ſont toujours égales) & c'eſt dans cette réſiſtance que conſiſte la force centrifuge. Ainſi cette force eſt reconnuë & admiſe comme un principe clair & intelligible.

IX.

Mais quand il s'agit d'expliquer la cauſe de la gravitation des Planètes ſur le Soleil, & la raiſon pourquoi elles ne trouvent point de réſiſtance de la part du milieu dans lequel elles ſe meuvent; il a falu hazarder deux ſupoſitions hardies, qui révoltent les eſprits accoûtumés à ne recevoir dans la Phyſique que des principes inconteſtables & évidens. La premiere de ces ſupoſitions eſt d'attribuer aux corps une *vertu* ou *faculté attractive*, par laquelle ils s'attirent mutuellement; ſans le ſecours d'aucune autre action. La ſeconde conſiſte à ſuppoſer dans le Monde un *vuide* parfait. Voilà donc *l'attraction & le vuide* (comme dit agréablement M. de FONTENELLE) *bannis de la Phyſique par* DESCARTES, *& bannis pour jamais ſelon*

Digitized by Google

les apparences, y reviennent ramenés par M. Newton, *armés d'une force toute nouvelle, dont on ne les croyoit pas capables, & ſeulement peut-être un peu déguiſés*; deux principes qui tendent directement à rétablir ſur le trône le Péripatétiſme, qui a tyranniſé ſi long-tems les anciens Philoſophes. Auſſi M. NEWTON a-t-il bien ſenti & prévû les objections qu'on lui feroit, en particulier contre la peſanteur innée des corps : c'eſt pour cela qu'il proteſte, en pluſieurs endroits, qu'il n'adopte ce ſentiment que comme une hypothèſe, par exemple, à la page 389 de ſes *Princip. Phil. Nat.* Édit. derniere : *Attamen*, dit-il, *gravitatem corporibus eſſentialem eſſe minime affirmo*; plus retenu en cela que ſes Sectateurs outrés, tels que M. COTES, qui a fait la Préface devant cette Edition, où il prétend poſitivement & d'un air impérieux contre les Cartéſiens, pag. 8, & 9, *Que la peſanteur n'eſt pas moins eſſentielle aux corps que leur étenduë, mobilité & impénétrabilité.* On voit là le Diſciple plus courageux que le Maître.

X.

Mais puiſque cette confiance de parler ne nous oblige en aucune maniere de donner aveuglément dans ces ſentimens incompréhenſibles, il nous ſera permis d'abandonner le Syſtême de M. NEWTON, quelque ingénieux qu'il ſoit, juſqu'à ce qu'il ſoit délivré de tout ce qui choque la ſaine raiſon : comme en effet, je crois avoir trouvé un expédient tout particulier pour expliquer la gravitation des Planètes par une cauſe purement méchanique, ſans recourir ni à l'attraction, ni au vuide; avec cet avantage, que je me fais fort de montrer clairement, pourquoi les gravitations des Planètes ſur le Soleil doivent être en raiſon renverſée des quarrés des diſtances au centre du Soleil, ce que M. NEWTON & ſes Sectateurs ont ſeulement ſupoſé comme une hypothèſe, ſans pouvoir le démontrer, pour en déduire les Ellipſes, au foyer deſquelles on place le Soleil, ou le centre auquel tendent les gravitations. Mais mes penſées là-deſſus me donneroient matiere

tiere à une autre Diſſertation, que j'aurai l'honneur de communiquer à l'illuſtre ACADE'MIE, quand je verrai que celle-ci aura été reçûë favorablement. Je m'attache, pour le préſent, à convaincre les Adverſaires des Tourbillons, qu'ils ſont beaucoup plus commodes qu'on ne l'a crû juſqu'ici, pour ſauver les Phénomènes, en particulier ceux dont il eſt ici queſtion; ce qui diſſipera en quelque façon les difficultés auſquelles ce Syſtême étoit ſujet.

X I.

Les Tourbillons que M. DESCARTES a introduits, ſont trop connus des Phyſiciens pour en faire une ample deſcription. On ſait que par ces Tourbillons il a prétendu expliquer deux effets principaux, ſavoir le mouvement des Planètes autour du Soleil, & la nature de la peſanteur, qui fait deſcendre les corps groſſiers vers le centre de la Terre, ou d'une autre Planète. Mais ce Syſtême, tout ſpécieux qu'il eſt d'abord, n'a pas manqué de rencontrer ſes Antagoniſtes: on y a trouvé à redire ſur tout, que par les Tourbillons il eſt très-difficile d'expliquer la Règle de KEPLER, que les obſervations les plus exactes vérifient d'une maniere admirable. En conſéquence de cette Règle, les Planètes décrivent autour du centre du Soleil, non pas des Cercles excentriques, comme on croyoit, mais des Ellipſes, quoique approchantes des cercles; le Soleil eſt dans un des foyers de chacune de ces Ellipſes; le tems pour parcourir un arc d'une Ellipſe eſt proportionel à l'aire du Secteur Elliptique formé par cet arc & les deux lignes droites tirées du foyer aux extrémités du même arc; les tems périodiques des révolutions entières des Planètes ſont en raiſon ſeſquipliquée de leurs diſtances moyennes au centre du Soleil, c'eſt-à-dire, que les quarrés des tems périodiques ſont comme les cubes de ces diſtances; d'où il ſuit, que la viteſſe moyenne des Planètes eſt réciproquement comme la racine quarrée de leur diſtance moyen-

ne. Enfin tout cela s'obſerve auſſi dans les Planètes ſécondaires, ou Satellites, autour de leur Planète principale.

X I I.

D'ailleurs M. DESCARTES a tâché de rendre quelque raiſon pourquoi une même Planète eſt tantôt plus, tantôt moins éloignée du Soleil: ce qui ſe fait, ſelon lui & ſes Commentateurs, parce que le Tourbillon ſolaire, entouré de pluſieurs autres Tourbillons inégaux, en eſt preſſé inégalement; en ſorte que l'interſtice par où doit paſſer la matiere du Tourbillon, étant d'un côté plus étroit, & du côté opoſé plus large, il faut que la Planète s'approche plus du Soleil, & marche plus vite là où elle ſerrée, & qu'elle s'éloigne plus du Soleil, & aille plus lentement à l'endroit où elle eſt plus au large. Quand on accorderoit cela, on voit bien que les Orbites des Planètes ne ſeront pas des Cercles, & qu'elles auront leurs Aphélies & Perihélies; mais faut-il pour cela, dira-t-on, que les Orbites ſoyent juſtement des Ellipſes? que le Soleil ſoit juſtement placé dans un des foyers? que les Planètes obſervent ſi préciſément dans leur cours la loi de KEPLER? Faut-il auſſi que les Apſides ſoyent mobiles, nonobſtant que l'inégalité des interſtices entre le Soleil & les Tourbillons voiſins paroiſſent par cette explication devoir occuper toujours les mêmes endroits, par raport aux étoiles fixes? Voudra-t-on dire que Dieu a fait exprès un arrangement tout particulier par une eſpèce de miracle entre les Tourbillons, pour produire ces effets? En vérité cela ſeroit ce qu'on apelle *Deum accerſere ex machina.* On pourroit ſoûtenir avec le même droit, que Dieu dirige immédiatement par ſa Toutepuiſſance la machine de l'Univers, & que c'eſt ſa pure volonté, que les Corps céleſtes ſe meuvent de la ſorte & point autrement; ou bien, on pourroit rapeller ces Génies ou ces Intelligences, que Dieu a conſtituées, ſelon la groteſque idée de certains Anciens, pour tourner éternellement les Cieux &

Digitized by Google

& les Aſtres, en obſervant la Règle de Kepler. Mais ſ'il étoit permis de raiſonner ſur ce pied-là, en entaſſant hypothèſes ſur hypothèſes, il n'y auroit aucun Phénomène dans la Nature des choſes, dont on ne pût imaginer ſur le champ quelque explication, ſemblable à celle que donne par plaiſanterie M. Cotes dans ſa Préface que j'ai alléguée ci-deſſus, ou pour ſe rire des Tourbillons Cartéſiens, il dit; quoi-qu'avec un peu trop de préſomption, qu'ils ne ſont pas plus propres pour expliquer les mouvemens des Planètes, que ſeroit l'hypothèſe de celui, qui pour rendre raiſon pourquoi une pierre jettée en l'air décrit une Parabole, voudroit ſoûtenir, que c'eſt parce qu'il y a une matiere ſubtile qui ſe meut en tous ſens, & toûjours ſur des Paraboles grandes & petites, tellement que la pierre entrainée par le cours de cette matiere, ſera obligée de ſuivre la route de l'une ou de l'autre de ces Paraboles, ſelon la direction & la force avec laquelle la pierre a été jettée.

XIII.

Un tel uſage des Tourbillons ſeroit, en vérité, ridicule; mais d'un autre côté, on leur feroit grand tort de les rejetter tout-à-fait, à cauſe des difficultés qui ſe préſentent d'abord. Si on veut être équitable, il faut voir ſi on ne peut pas les lever par quelque tempérament ou explication raiſonnable. Ce ſeroit une eſpece d'ingratitude, ſi nous ne reconnoiſſions pas que c'eſt principalement à M. Descartes que nous ſommes redevables des premieres idées qu'il nous a données pour raiſonner en Phyſique, ſur des principes qu'on peut entendre clairement, au lieu de tout ce fatras de qualités occultes, de formes ſubſtantielles, de facultés, de vertus plaſtiques, & de cent autres chimères ſemblables, que l'Antiquité nous avoit laiſſées.

XIV.

Les Tourbillons ſe préſentent ſi naturellement à l'eſprit, qu'on

ne ſauroit preſque ſe diſpenſer de les admettre. Mais pour diſſiper les inconvéniens qui réſultent de la maniere dont M. DESCARTES veut qu'ils emportent les Planètes, ne fera-t-on pas bien d'y apporter quelque remède, en montrant un autre effet auquel on n'a pas ſongé, qui nous mette en état d'en tirer, d'une maniere ſimple & claire, les Phénomènes des Aſtres, comme je tâcherai de faire, lorſqu'après cette diſcuſſion j'aurai l'honneur d'expoſer à mes Juges la nouvelle idée que j'ajoûte au Syſtème de DESCARTES, qui me paroit la plus ſimple & la plus naturelle, tant pour obvier aux difficultés, que pour donner une réponſe convenable au ſujet de la queſtion propoſée par l'ACADE'MIE.

X V.

Quoique les Tourbillons Cartéſiens ſoyent, comme nous venons de voir, ſujets à de grandes difficultés; il faut avoüer auſſi qu'il y en a, formées même par des Philoſophes célèbres, qui ne ſont qu'apparentes, & qu'on peut d'abord diſſiper par des réponſes ſolides. En effet, le Savant M. SAURIN n'a-t-il pas ſolidement répondu, dans les Mémoires de l'ACADE'MIE de 1709, à l'objection de M. HUGUENS ſur la cauſe de la Peſanteur? lorſque celui-ci avoit prétendu, que ſi la matiere céleſte ſe mouvoit proche de la Terre en même ſens, avec une viteſſe qui devroit être, ſelon ſon calcul, beaucoup plus grande que la viteſſe du mouvement journalier de la Terre autour de ſon axe, il ne ſeroit pas poſſible que par le continuel effort d'un mouvement ſi rapide, elle n'entraînât avec elle tous les corps qui ſont ſur la ſurface de la Terre; ce qui n'arrive pas. La raiſon que M. SAURIN a donnée, pourquoy ce mouvement ſi rapide ne doit pas ſe faire ſentir, ni entrainer les corps qui ſont ſur la Terre, me paroît ſi bonne, qu'elle ne ſauroit être meilleure, ni plus ſatisfaiſante.

XVI.

Digitized by Google

XVI.

Je paſſe donc à une autre objection, qui paroit d'autant plus importante qu'on l'a voulu fonder ſur une démonſtration géométrique. Elle vient du célèbre M. NEWTON, qui a donné deux propoſitions dans ſes *Principes de la Phil. nat.* (ce ſont la 51e & la 52e du ſecond Livre,) par leſquelles il prétend démontrer l'impoſſibilité des Tourbillons. Mais outre la réponſe judicieuſe de M. SAURIN, que l'on voit à la fin de ſon Mémoire allégué, je trouve que le raiſonnement de M. NEWTON eſt un ſophiſme manifeſte, étant fondé ſur deux ſupoſitions également fauſſes. Voici comme il raiſonne. Il conçoit d'abord un fluide uniforme & infini en repos, dans lequel il fait tourner un Cylindre, & puis auſſi une Sphère ſolide autour de leur axe. Il diviſe par la penſée le fluide en une infinité de couches d'une épaiſſeur égale & infiniment petite, toutes parallèles à la ſurface du Cylindre, ou de la Sphére. Cette ſurface en tournant fait une impreſſion continuelle ſur la premiere couche qui lui eſt contiguë, & l'entraine peu à peu; de même cette premiere couche met en mouvement la ſeconde; celle-ci la troiſieme, & ainſi conſécutivement chacune des couches entrainera par ſon frottement ſa voiſine ultérieure, juſqu'à ce qu'une grande partie du fluide ſoit miſe dans une eſpèce de Tourbillon, qui tourne à chaque diſtance avec une viteſſe permanente & convenable à l'éloignement de l'axe du Cylindre ou de la Sphére. Pour déterminer le tems périodique qui convient à la révolution de chaque couche, M. NEWTON conſidere les couches comme ſolides & d'une petite épaiſſeur égale, comme je l'ai déja dit; enſuite il parle ainſi (v. pag. 375, Ed. derniere) „ Quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per hypoth.) ut eorum tranſlationes ab invicem, & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quam ex parte convexa, prævalebit impreſſio fortior, & motum orbis vel accelerabit, vel

„ retar-

„ retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel „ in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in mo- „ tu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte „ utraque ſibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias. Un- „ de cum impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum „ translationes ab invicem, erunt translationes inverſe ut ſu- „ perficies (cylindricæ), h. e. inverſe ut ſuperficierum diſtan- „ tiæ ab axe, &c.

XVII.

Or les dernieres lignes de ce raiſonnement, qui ne ſont qu'une répétition des premieres, contiennent une erreur. Car 1°. les impreſſions que ſe font les couches, les unes ſur les autres, conſiſtent dans la réſiſtance que cauſe le frottement, lorſque la ſurface convexe d'une couche ſe ſépare de la ſurface concave de la couche voiſine: mais on ſait que cette réſiſtance dépend uniquement de la force avec laquelle les deux ſurfaces ſont preſſées l'une contre l'autre, & point du tout de la grandeur ou de l'étenduë dans laquelle elles ſe touchent. Nous avons ſur ce ſujet une excellente Diſſertation de feu M. AMONTONS, dans les Mémoires de l'ACADE'MIE de *1699*, où il fait voir, pag. 212, *Que la réſiſtance cauſée par le frottement des ſurfaces de differentes étenduës eſt toûjours la même, lorſqu'elles ſont chargées de poids égaux, ou ce qui eſt la même choſe, lorſque les preſſions ſont égales.* Cependant M. NEWTON conſidere ſeulement l'étenduë des couches & la viteſſe relative avec laquelle elles ſe ſéparent, ſans faire attention à la quantité de preſſion dont chacune eſt preſſée contre ſa voiſine. 2°. Il néglige entiérement de faire intervenir l'action du levier, dont la conſidération pourtant eſt ici abſolument néceſſaire, étant viſible que la même force, appliquée ſuivant la tangente de la circonference d'une grande rouë, a plus d'efficace pour la faire tourner, qu'elle n'a lorſqu'on l'applique à la circonference d'un rayon plus petit. D'où vient donc que M. NEWTON, qui regarde ces couches comme autant de rouës ſolides à tourner

ſur

Digitized by Google

ſur leur axe commun, ne tire pas en conſéquence le raport des diſtances au centre, qu'obſervent les forces du frottement dans les couches, pour avoir leur véritable *momentum*, ou efficace? D'où vient auſſi qu'il ne met pas en ligne de compte la quantité de preſſion que chaque couche doit ſoûtenir; puiſque, ſans la preſſion, les couches ne feroient que gliſſer l'une ſur l'autre ſans ſe frotter, comme il eſt évident par les expériences de M. AMONTONS.

XVIII.

Voilà deux erreurs, qu'on ne ſauroit concevoir comment elles ſont échapées à la ſagacité d'un ſi grand Géométre, & moins encore peut-on s'imaginer pourquoy ſes zèlés Partiſans ne s'en ſont point aperçûs pendant ſi long-tems, juſques-là même qu'ils ont laiſſé paroitre ces fautes dans les trois differentes éditions qu'on a faites en Angleterre de l'Ouvrage de M. NEWTON, fort long-tems l'une après l'autre. Voyons ce qu'il faut faire pour remédier à ce double deffaut. Pour cette fin, je donne la ſolution de ſes deux Propoſitions dans les articles ſuivans; on jugera ſi je n'ai pas mieux réüſſi.

XIX.

Il eſt évident que chaque couche du fluide entre deux autres voiſines, pour qu'elle puiſſe circuler avec une viteſſe uniforme, doit recevoir autant d'efficace par le frottement de la couche inférieure, pour en être avancée ou accélerée, qu'elle en reçoit en ſens contraire par le frottement de la ſupérieure pour en être retardée; de ſorte que les décroiſſemens de viteſſe étant à tous momens réparés par des accroiſſemens égaux, la couche conſerve ſa circulation uniforme. Or qu'eſt-ce qui produit ces deux effets égaux & contraires l'un à l'autre? C'eſt ſans doute la force du frottement que ſouffre chaque couche en arrière & en avant, par les deux contiguës, la ſupérieure & l'in-

l'inférieure; mais cette force d'où vient-elle au frottement; puiſque ni le ſeul attouchement des ſurfaces, ni la viteſſe rélative avec laquelle elles ſe ſéparent, quelque grande qu'elle ſoit, ne produiſent encore aucune force? Voici donc d'où je dérive cette force. Pendant qu'une couche eſt en circulation, il eſt viſible qu'elle fait un continuel effort pour ſe dilater, à cauſe de la force centrifuge avec laquelle toutes ſes parties cherchent à s'éloigner du centre de la circulation; mais la dilatation actuelle étant empêchée par la couche voiſine ſupérieure, il eſt naturel que celle-ci en ſera preſſée. C'eſt donc ainſi que la premiere, ou la plus baſſe couche, miſe en circulation, preſſe la ſeconde; & la ſeconde aidée de la premiere, preſſe la troiſième; celle-ci aidée des deux précédentes, preſſe la quatrième, & ainſi, de couche en couche, par toute l'étendue du Tourbillon. D'où il ſuit que pour eſtimer la quantité de l'impreſſion que chaque couche éxerce ſur la ſurface concave de la ſuivante, il faut prendre la force centrifuge de la matiere, non de la ſeule couche inférieure contiguë, mais de toutes les précédentes, puiſque la derniere des couches doit toûjours ſoûtenir l'effort total de la force centrifuge que toute la matiere du fluide compris ſous elle acquiert par la circulation.

X X.

TAB. XLVI. *Fig.* I. Il ne reſte que le calcul à faire pour trouver combien de preſſion chacune des couches précédentes contribuë à preſſer la derniere; la ſomme de toutes ces preſſions donnera la preſſion totale. Soit donc le corps *S* que je ſupoſe premierement cylindrique, & qui, par le mouvement autour de ſon axe, produit dans le fluide un tourbillon compoſé d'une infinité de couches d'épaiſſeur égale & infiniment petite. Prenons deux de ces couches, comme *ERP* & *GMC*, éloignées l'une de l'autre de l'intervalle *EG*, & conſiderons *ERP* comme la dernie-

derniere, dont le rayon SE ſoit d'abord d'une longueur déterminée & invariable $= a$, pendant que l'autre couche GMC, conſidérée comme une des précédentes, a le rayon SG indéterminé & variable $= x$, & l'épaiſſeur conſtante $Gg = dx$. Soit v la viteſſe abſoluë avec laquelle la couche GMC circule autour de S. La quantité de matiere contenuë dans la couche GMC eſt proportionnelle au produit de SG par Gg: donc cette quantité s'exprimera par xdx, ce qui étant multiplié par la force centrifuge abſoluë (qui eſt, comme on ſait, en raiſon compoſée de la directe du quarré de la viteſſe & de la réciproque ſimple du rayon, c'eſt-à-dire en raiſon de $vv : x$) nous donnera $xdx \times (vv : x) = vvdx$ pour la force centrifuge de la matiere contenuë dans la couche GMC.

XXI.

C'eſt donc avec cette force $vvdx$ que la couche particuliére GMC, ſans le ſecours des précédentes inférieures, fait un effort pour ſe dilater, je veux dire qu'elle preſſe le fluide extérieur contenu dans l'eſpace $RPEGCM$. Or c'eſt un principe d'Hydroſtatique, qu'un fluide qui remplit éxactement quelque eſpace, étant preſſé d'un côté, répand également la même preſſion ſur toutes les parties des parois extérieures de l'eſpace qui renferme le fluide. Donc pour ſavoir quelle ſera la preſſion que toute la ſurface concave de la couche ERP reçoit de l'effort dilatatif de la ſeule couche GMC, il faut faire cette analogie : Comme la circonférence GMC eſt à la circonférence ERP, ou, comme le rayon SG [x] eſt au rayon SE [a]; ainſi la force centrifuge ou l'effort dilatatif de la couche GMC, que nous avons trouvée $= vvdx$, eſt à une quatrième $avvdx : x$, qui montre par conſéquent la preſſion que la ſurface concave de la derniere couche ERP ſouffre de l'effort dilatatif de GMC. Donc la ſomme ou l'intégrale de $avvdx : x$, c'eſt-à-dire $a\int(vvdx : x)$ déſignera la preſſion totale que toutes les couches inférieures compriſes entre S &

GMC tranſmettent conjointément ſur la concavité de la derniere *ERP*. Faiſons préſentement cette couche *ERP* variable & contiguë à *GMC*, afin que nous ayons indéterminément la preſſion totale ſur chacune. Ainſi il n'y a qu'à mettre x pour a, & nous aurons $x\int(vvdx : x) =$ à l'impreſſion totale que le fluide du Tourbillon communique à la ſurface concave d'une couche quelconque, dont le rayon eſt x; donc cet $x\int(vvdx : x)$ dénotant la force avec laquelle la ſurface convexe d'une couche eſt preſſée contre la concave de la plus voiſine ſupérieure, doit, ſelon l'expérience & le raiſonnement de M. AMONTONS, règler la force du frottement que ſe font les deux couches contiguës l'une à l'autre, ce que j'exécute en cette maniere.

XXII.

TAB. XLVI. *Fig.* 2. Ayant tiré (*Fig.* 2.) une ligne droite *SE* qui coupe les circonférences des couches *A*, *B*, *C*, &c. aux points *L*, *M*, *N*, *O*, &c. que l'on conçoive les arcs *LR*, *MT*, *NV*, *OP*, &c. qui expriment les viteſſes réelles avec leſquelles les couches font leurs révolutions autour de *S*. La courbe *RPF* qui paſſe par les points *R*, *T*, *V*, *P*, &c. ſera nommée la courbe des viteſſes. Conſiderons une de ces couches, par exemple *B* entre les deux voiſines *A* & *C*; & tirons les rayons *ST* & *SV*, qui coupent l'arc *MT* aux points *T* & *t*, pour avoir le petit arc *Tt*, élément de *Translation*, comme M. NEWTON l'apelle, c'eſt-à-dire, la viteſſe rélative avec laquelle là couche *B* ſe ſépare de ſes voiſines *A* & *C*. Soit donc, comme auparavant, la diſtance indéterminée *SM* ou $SN = x$, *MT* ou $NV = v$; nous aurons $Tt = TM - tM = TM - VN + VN - tM$. Or $TM - VN$ n'eſt autre choſe que la differentielle de l'arc *TM* priſe négativement, je veux dire, que $TM - VN = -dv$, & $VN - tM$ (parce que $SN : NM = VN : VN - tM$) $= vdx : x$. Et partant $Tt = -dv + vdx : x = (vdx - xdv) : x$. La même

même choſe ſe peut conclure en différentiant la viteſſe angulaire, dont la meſure eſt l'angle TSM ou $v:x$. Car VSN — TSM = — TSt = — $d(v:x) = (vdx - xdv):xx$. Mais $TSt = Tt:TS = Tt:x$; donc $Tt = (vdx - xdv):x$, comme auparavant.

XXIII.

Tout cela étant ainſi trouvé, il en faut déduire le *momentum*, ou l'efficace du frottement des couches, en prenant les trois raiſons, qui en doivent déterminer l'effet total. 1°. La preſſion des couches exprimée par $x\int(vvdx:x)$, 2°. La viteſſe rélative de translation ou de ſéparation de leur ſurfaces contiguës, $(vdx - xdv):x$. 3°. La longueur du Levier, c'eſt-à-dire, le rayon des couches qui eſt $= x$. Ainſi la raiſon compoſée de ces trois raiſons $x \times \frac{vdx - xdv}{x} \times x\int\frac{vvdx}{x}$, ce qui fait $(vxdx - xxdv) \times\int(vvdx:x)$ donnera le *momentum* du frottement, en vertu duquel la ſurface concave de chaque couche eſt pouſſée en avant, pendant que ſa ſurface extérieure ou convéxe en eſt autant préciſément repouſſée en arriere; dont l'effet eſt que la couche ſera conſervée dans ſa circulation uniforme. Mais afin que cela arrive généralement à toutes les couches, il n'y a qu'à faire $(vxdx - xxdv)\int(vvdx:x)$ = à une quantité conſtante que je nommerai cdx. Ainſi j'ai cette équation $(vxdx - xxdv)\int(vvdx:x) = cdx$, qui détermine la nature de la courbe des viteſſes RPF; par conſéquent auſſi la loi de la viteſſe réelle du tourbillon pour chaque diſtance au centre S. Or comme je remarque que dans le facteur du premier membre $vxdx - xxdv$ les deux indéterminées v & x montent enſemble à la même dimenſion, ſavoir à la ſeconde cela me fait connoitre que v peut être égal à une certaine puiſſance de x. Pour la trouver, ſupoſons $v = x^n$, & partant $dv = nx^{n-1}dx$; & ſubſtituons ces deux valeurs dans notre équation $(vxdx - xxdv)\int(vvdx:x) = cdx$; le pre-

T 3 mier

mier membre $(vxdx - xxdv)\int(vvdx:x)$ [après avoir pris l'Integrale de $vvdx:x$, ou de $x^{2n-1}dx$, qui eſt $\frac{1}{2n}x^{2n}$] ſe change en $(x^{n+1}dx - nx^{n+1}dx)\times\frac{1}{2n}x^{2n}$, ou $\frac{1-n}{2n}\times x^{3n+1}dx$. Nous avons donc cette équation $\frac{1-n}{2n}x^{3n+1}dx = cdx$; laquelle doit être identique, afin qu'elle ſatisfaſſe à l'équation trouvée, c'eſt pourquoi il faut faire $3n+1=0$, & $(1-n):2n=c$, ce qui donne $n=-\frac{1}{3}$ & $c=-2$, par conſéquent $x^{3n+1}=x^0=1$. La valeur de n étant ainſi déterminée, je dis que notre Equation differentielle $(vxdx - xxdv)\int(vvdx:x) = cdx$ convient à cette autre algébrique $v = x^{-\frac{1}{3}} = 1:\sqrt[3]{x}$.

XXIV.

D'où l'on voit que la viteſſe v, avec laquelle la matiere du tourbillon circule, eſt reciproquement proportionnelle à la racine cubique de ſa diſtance au centre S. Il eſt préſentement aiſé d'en tirer auſſi les tems périodiques; car puiſque ces tems ſont directement comme les circonferences à parcourir & reciproquement comme les viteſſes, & que les circonferences ſont comme les rayons, le tems d'une circulation ſera proportionel à $x:v = x\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}}$. Je dis donc que les tems périodiques des parties du fluide ſont en raiſon ſeſquitripliquée, ou comme les racines cubiques de la quatrième puiſſance des diſtances à l'axe du cylindre, au lieu que M. NEWTON les a trouvées ſeulement en raiſon des ſimples diſtances.

XXV.

Examinons à préſent l'autre cas, où le corps S qui tourne uniformément ſur ſon centre eſt une Sphére, laquelle formera autour

autour d'elle un tourbillon ſphérique, que nous diviſerons par la penſée, avec M. Newton, en une infinité de couches concentriques, d'épaiſſeur égale & infiniment petite. Il s'agit de trouver la loi des viteſſes que ces couches auront dans le plan de l'Equateur, je veux dire, dans le plan qui paſſe par le centre perpendiculairement à l'axe lorſque chacune de ces couches aura acquis ſon mouvement uniforme. La méthode eſt tout-à-fait la même, que celle dont je me ſuis ſervi pour le cas précédent. On conſidérera ſeulement chaque couche comme diviſée en zones d'une largeur infiniment petite par des cercles paralleles à l'Equateur. Et d'autant que ces zones d'une même couche doivent achever leur révolution dans le même tems, parce que les couches ſont regardées comme ſolides, il eſt viſible que nous n'avons qu'à chercher la viteſſe d'une ſeule de ces zones pour en tirer enſuite le tems d'une révolution de toute la couche ſphérique. Prenons donc la premiere zone contiguë à l'Equateur (*Fig.* 1.). D'abord il eſt manifeſte, que ſi *GMC* répréſente l'Equateur ou le circuit de la zone conſidérée avec ſon épaiſſeur *Gg* infiniment petite & égale dans toutes les couches ſphériques, la quantité de matiere contenuë dans la zone *GMC*, dont l'épaiſſeur eſt *Gg*, ſera ici proportionelle au produit du quarré de *SG* par *Gg*, parce que les zones ſemblables en différentes couches ſphériques ſont comme les quarrés des rayons; & partant ladite quantité de matiere ſera exprimée par $xxdx$, ce qui multiplié par la force centrifuge abſoluë $vv:x$, me donne $xxdx \times (vv:x) = vvxdx$ pour la force centrifuge de la matiere qui remplit la zone de l'épaiſſeur *Gg*. Enſuite pour connoître la preſſion que la ſurface concave de la zone ſemblable *ERP* priſe ſur la derniere couche ſphérique doit ſouffrir par l'effort dilatatif de la ſeule zone *GMC* ſans l'aide des précédentes, il faut faire ici cette analogie: Comme le quarré de la circonference GMC, au quarré de la circonference ERP, ou comme le quarré du rayon SG [xx] eſt au quarré du rayon SE [aa], ainſi l'effort dilatatif de la zone GMC [$vvxdx$] eſt à un quatrieme $aavvdx:x$ TAB. XLVI. Fig. 1.

qui

qui marque la preſſion que ce même effort exerce ſur la ſurface concave de la zone *ERP*. Donc l'Intégrale de cela, qui eſt $aa\int(vvdx:x)$ donne la preſſion totale que toutes les zones ſemblables des couches inférieures compriſes entre *S* & *GMC* transférent conjointément ſur la ſurface concave de la derniere zone *ERP*. En changeant préſentement la déterminée a en x; nous aurons, pour ce cas du tourbillon ſphérique, $xx\int(vvdx:x)$ pour la force de preſſion entiere que la zone, dont le rayon eſt x, doit ſoutenir. Et achevant le reſte comme dans le cas précédent, nous aurons le *momentum* du frottement pour faire circuler les zones ſupérieures par les inférieures $= x \times \frac{vdx - xdv}{x} \times xx\int(vvdx:x) = (vxxdx - x^3dv)$ $\int(vvdx:x)$, ce qui doit être égal à une quantité conſtante cdx. Supoſons ici comme ci-devant, que $v = x^n$ & $dv = nx^{n-1}dx$; nous trouverons en faiſant le calcul, que $n = -\frac{2}{3}$, & $c = -\frac{5}{4}$, d'où on conclut que l'équation differentielle $(vxxdx - x^3dv)$ $\int(vvdx:x)$ ſe réduit à cette algébrique $v = x^{-\frac{2}{3}} = 1:\sqrt[3]{xx}$.

X X V I.

Cela fait voir que, dans un tourbillon ſphérique, la viteſſe des couches ſous l'Equateur eſt réciproquement comme la racine cubique du quarré de la diſtance au centre; ou bien, parce que chaque couche fait ſa révolution avec toutes ſes parties enſemble, comme une Sphére ſolide qui tourne ſur ſon axe, il eſt clair que la viteſſe, ſous tel parallele que l'on voudra, ſera reciproquement proportionnelle à la racine cubique du quarré de la diſtance perpendiculaire à l'axe. C'eſt pourquoi les tems périodiques de differentes couches, étant toûjours proportionels à $x:v$, s'exprimeront dans ce cas par $x^{\frac{5}{3}}$, c'eſt-à-dire, que les parties d'un tourbillon formé par le tournoyement d'une Sphére font la révolution en des tems qui ſont comme les racines cubiques de la cinquieme puiſſance

de

Digitized by Google

ce de leurs éloignemens du centre de la Sphére. Mais M. NEWTON les a trouvés, par ſon raiſonnement erroné, comme les quarrés de ces éloignemens.

XXVII.

On peut remarquer en paſſant une particularité aſſés curieuſe; c'eſt que les tems périodiques, trouvés par M. NEWTON pour le tourbillon cylindrique en raiſon de x, ſont trop petits; devant être en raiſon de $x^{\frac{4}{3}}$; mais au contraire, ceux qu'il trouve pour le tourbillon ſphérique en raiſon de xx ſont trop grands, puiſqu'ils ne ſont véritablement que comme $x^{\frac{5}{3}}$. D'où il paroit, que ſon erreur l'a fait écarter de la Règle de KEPLER, pour le premier cas dans le défaut, & pour le ſecond dans l'excès, de part & d'autre plus qu'il n'étoit juſte. En effet, chacune de nos deux proportions aproche bien plus de l'exactitude de cette règle, qui veut, que les tems périodiques des Planètes ſoient en raiſon ſeſquipliquée des diſtances moyennes, ou comme $x^{\frac{3}{2}}$. Or $x^{\frac{4}{3}}$ que nous avons trouvé, marque une raiſon un peu plus petite que celle de $x^{\frac{3}{2}}$, & $x^{\frac{5}{3}}$ en donne une un peu plus grande que $x^{\frac{3}{2}}$.

XXVIII.

Ne ſeroit-il donc pas permis de hazarder à cette occaſion quelque conjecture en faveur des tourbillons Cartéſiens? On pourroit dire que puiſque la figure cylindrique du Soleil donne un peu trop peu, & la figure ſphérique un peu trop; il y a, peut-être, une figure à donner au Soleil entre le Cylindre & la Sphère, qui produiroit au juſte ce qu'il faut. Mais donnera-t-on au Soleil une autre figure que celle d'un Globe? Je répondrois; pourquoi non? Les Phyſiciens d'aujourd'hui ne ſont-ils pas du ſentiment, que la Terre, les Planètes, en-

fin tous les Corps céleſtes qui tournent ſur leur centre, doivent avoir une figure, non pas tout-à-fait ſphérique, mais celle d'un Sphéroïde, ſoit oblong, comme M. DE MAIRAN en a montré la poſſibilité (voy. les *Mém. de l'Académie* de 1720,) ſoit aplati fait par la converſion d'une Ellipſe autour de ſon petit axe? Au moins, les obſervations des Aſtronomes ont vérifié cela dans Jupiter, dont la diſtance d'un Pole à l'autre a été obſervée plus petite que le diamètre de ſon Equateur. Pourquoi donc le Soleil, qui tourne auſſi ſur ſon axe, témoin le mouvement de ſes taches, en ſeroit-il exempt? au lieu qu'il ſemble qu'il devroit être le plus ſujet à cet aplatiſſement vers ſes poles, à cauſe qu'il eſt vraiſemblablement compoſé d'une matiere entierement fluide. Il faut peut-être peu de difference entre la longueur de ſon Axe & le diamètre de ſon Equateur, pour que les tems périodiques des couches du tourbillon ſolaire ſuivent éxactement la Règle de KEPLER.

XXIX.

D'ailleurs, nous avons ſupoſé juſqu'ici, avec M. NEWTON, une parfaite uniformité dans tout le fluide du tourbillon; mais outre l'inégale fluidité qui s'y trouve, ſelon toutes les aparences, à meſure qu'on s'éloigne du centre, ce que M. SAURIN a fort bien remarqué; on peut, & même on doit, ſupoſer auſſi une differente denſité dans la matiere céleſte; je parle de cette matiere qui compoſe proprement le tourbillon, & laquelle, par le continuel effort de s'éloigner du centre, retient les Planètes dans leurs Orbites, & les entraine; en ſorte que les Planètes occuperont chacune telle ou telle région dans le tourbillon; où la matiere céleſte leur eſt convenable en denſité. Car ſi le tourbillon étoit, par toute ſon étenduë, uniformément denſe, & que les Planètes fuſſent auſſi d'une même denſité, il eſt viſible qu'elles ſeroient toutes également éloignées du Soleil, & feroient leurs périodes en tems égaux. Voyons donc quelle loi de denſité doivent obſerver les

Digitized by Google

les differentes couches du tourbillon, afin que les tems périodiques ſuivent préciſément la Règle de KEPLER. Le calcul n'en eſt pas trop difficile, après celui que j'ai fait pour l'uniformité de la matiere du tourbillon. Le voici; en conſiderant le Soleil de figure ſphérique, qui eſt le cas le plus convenable: ſans avoir beſoin de recourir au Sphéroïde oblong ou aplati.

XXX.

Puiſque tout revient à bien ſuputer la preſſion que les couches inférieures communiquent aux ſupérieures, & que nous avons montré §. 25, que ſi toutes les couches étoient également denſes, la preſſion de chacune ſous l'Equateur, ſeroit proportionnelle à $xx\int(vv dx : x)$, il faut ici faire entrer la denſité que je ſupoſe proportionnelle à x^p, je veux dire à une certaine puiſſance de la diſtance x, dont je chercherai l'expoſant p. Je raiſonne donc ainſi. La quantité de matiere contenuë dans la zone *GMC* (*Fig.* 1.) qui eſt contiguë à l'Equateur du tourbillon, ou plûtôt de ſa couche, dont le rayon eſt x, eſt proportionnelle au produit, non ſeulement du quarré de *SG* par *Gg*, mais encore par la puiſſance cherchée de *SG*, c'eſt-à-dire qu'elle eſt proportionnelle à $xx \times dx \times x^p$. Donc cette quantité de matiere ſera exprimée par $x^{p+2}dx$. D'où l'on tire, comme j'ai fait §. 25, $xx\int vvx^{p-1}\,dx$ pour la preſſion entiere de la zone, dont le rayon eſt x. Ainſi le *momentum* du frottement ſera $= x \times \frac{vdx - xdu}{x} \times xx\int vvx^{p-1}\,dx$ $= (vxxdx - x^3 dv) \times \int vvx^{p-1}\,dx$. Faiſons cela $= cdx$, & ſupoſons [pour le réduire à une équation algébrique] que $v = x^n$, & $dv = nx^{n-1}\,dx$; nous trouverons que $n = (-p-2) : 3$, & $c = (p-4) : (p+5)$. On aura donc la viteſſe $v = 1 : \sqrt[3]{x^{p+2}}$, & le tems périodique $[x : v] =$

TAB. XLVI. *Fig.* 1.

$x\sqrt[3]{x^{p+2}} = x^{(p+5):3}$. Si nous voulons rendre préſentement les tems périodiques conformes à la Règle de KEPLER, il faut que $x^{(p+5):3}$ ſoit $= x^{3:2}$, & partant $(p+5):3 = 3:2$ ce qui donne $p = -\frac{1}{2}$. Donc, afin que cette Règle ait lieu, il faut que la denſité de la matiere du tourbillon ſoit réciproquement comme la racine quarrée des diſtances au centre. Subſtituant cette valeur de $p = -\frac{1}{2}$ dans l'expreſſion de la viteſſe $v = 1 : \sqrt[3]{x^{p+2}}$, nous aurons $v = 1 : \sqrt[3]{x^{-\frac{1}{2}+2}} = 1 : \sqrt[3]{x^{3:2}} = 1 : \sqrt{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$, c'eſt-à-dire que la viteſſe ſera auſſi réciproquement comme la racine quarrée des diſtances, conformément à la Règle de KEPLER. Ainſi la viteſſe & la denſité ſont en même raiſon.

XXXI.

On trouvera peut-être étrange que la matiere ſoit plus denſe près du centre que loin de-là; vû qu'il ſemble, que le fluide du tourbillon étant compoſé de parties héterogènes, les plus denſes, ayant une plus grande force centrifuge, devroient gagner le deſſus, & ſe ranger vers la circonference du tourbillon; mais pour obvier à cette difficulté, on peut concevoir deux ſortes de denſité, l'une qui conſiſte dans une plus grande groſſeur des particules, l'autre dans une plus grande multitude de particules contenuës dans un volume égal, leſquelles, quoique moins groſſiéres, peuvent étre ſi ſerrées que priſes enſemble elles feront une plus grande quantité de matiere. Or il eſt fort probable, que vers le centre du tourbillon, les particules, quoiqu'extrêmement ſubtiles, ſont auſſi beaucoup plus ſerrées que celles qui ſont vers la circonference, leſquelles, quoique plus groſſiéres, ne laiſſent pas d'être beaucoup plus écartées les unes des autres, nageant dans un fluide infiniment ſubtil, qui paſſe librement par les plus petits interſtices des particules du tourbillon; lequel fluide, par conſéquent,

ne

Digitized by Google

ne fait que remplir le vuide, ſans faire aucune réſiſtance aux Corps céleſtes emportés par le tourbillon.

XXXII.

Nous voilà donc enfin débaraſſés de la grande objection, que l'on a fait tant valoir contre le Syſtème des tourbillons. Les Adverſaires ne manqueroient pas, ſans doute, d'y inſiſter perpétuellement, ſi je n'avois pas démontré, une bonne fois, la fauſſeté des deux Propoſitions de M. NEWTON, qui ont fourni la matiere à cette objection. Ainſi on m'accordera que j'ai fait voir par des principes inconteſtables, que l'effet des tourbillons peut conſpirer merveilleuſement avec la Règle de KEPLER, quant à la loi des tems périodiques des Planètes.

XXXIII.

Après tout ce détail, dans lequel il m'a fallu entrer néceſſairement pour mettre les tourbillons à l'abri des objections, & par lequel je ne crois pas avoir fait une choſe inutile, ni déſagréable aux Fauteurs des tourbillons, qui m'en ſauront peut-être bon gré; après ce détail, dis-je, je me ſuis frayé le chemin pour rendre raiſon, avec plus de ſuccès, de ce qu'on demande. C'eſt, ſans doute, une autre difficulté, pour le moins auſſi grande que celles que nous venons de diſſiper, qui eſt de dire pourquoi les Orbites des Planètes ne ſont pas des cercles éxacts, mais des Ellipſes; pourquoi le Soleil, ou le centre des tourbillons, n'eſt pas auſſi le centre de ces Ellipſes: Enfin la plus grande difficulté eſt d'expliquer la cauſe qui fait que les axes de ces Ellipſes ſont mobiles; c'eſt en quoi conſiſte préciſément la queſtion de l'illuſtre ACADE'MIE. Je vais donc ſatisfaire aux deux points de notre ſujet, ſelon l'ordre de diviſion que j'ai faite §. 2, en montrant 1°. que la figure elliptique des Orbites peut fort bien ſubſiſter avec les tourbillons dans toutes les circonſtances qu'on remarque. 2°. Que les Ap-

Digitized by Google

ſides doivent être mobiles, ou ce qui eſt la même choſe, que le grand axe des Orbites elliptiques change de poſition par raport aux étoiles fixes, dont je dois expliquer la cauſe.

XXXIV.

Je ne veux rien changer dans la figure ſphérique des couches du tourbillon ſolaire; je les laiſſe même parfaitement concentriques au Soleil, au moins juſqu'à une vaſte étenduë audelà de Saturne; ce qui rendra entiérement infructueuſe l'objection de M. NEWTON, qui veut prouver que les parties du tourbillon ne peuvent pas décrire des Ellipſes; (voy. le *Scholium* à la fin du ſecond Livre de ſes *Principes*). Sa démonſtration, contre laquelle on pourroit faire bien des exceptions, ne nous touche pas. Il eſt certain qu'une Planète qui ſeroit d'abord placée dans une couche, dont la matiere fût avec elle de la même denſité, ſuivroit éxactement le cours de cette couche, & décriroit par conſéquent un cercle parfait autour du centre du tourbillon. Mais voyons ce qui doit arriver, ſi une Planète au commencement de ſon exiſtence ne ſe trouve pas placée dans une couche qui ſoit également denſe que la Planète. Il eſt naturel que, ſuivant ce que j'ai expliqué ci-deſſus, cette Planète n'étant pas dans ſon point d'équilibre, elle doit ou deſcendre, ou monter, ſelon qu'elle eſt ou plus, ou moins denſe que la matiere du tourbillon qui l'environne. Remarqués que je prends toûjours le mot de denſité dans le ſens que je lui ai donné §. 31. Mais pendant qu'elle change ainſi de place en ligne droite, par raport au centre du tourbillon; elle eſt auſſi emportée autour de ce centre par le mouvement circulaire de la matiere céleſte; il en réſultera donc dans la Planète un mouvement composé, qui lui fera décrire une ligne differente de la circonference d'un cercle. Il s'agit de faire comprendre que cette ligne ſera une Ellipſe, dont le grand axe ne changera ſenſiblement de poſition qu'après un grand nombre de révolutions.

XXXV.

Soit *S* le centre d'un cercle *CAB*, qui repréſente la ſection d'une couche ſphérique, de la même denſité que la Planète *P* placée un peu au-delà de cette couche. Si on fait abſtraction du mouvement circulaire, ou que l'on ſupoſe que la Planète *P* ſoit empêchée d'être emportée par le tourbillon, mais enſorte qu'elle puiſſe pourtant deſcendre, ou ſe mouvoir librement ſur le rayon *PS*; on conçoit aiſément qu'elle deſcendra en effet, avec accélération, pendant qu'elle ſe trouve encore au-deſſus de *C* dans une matiere moins denſe, & qu'étant parvenuë en *C*, elle aura acquis ſa plus grande viteſſe; delà elle continuera de deſcendre, mais avec un mouvement retardé, à meſure qu'elle paſſe par des couches plus denſes, juſqu'à ce que le mouvement de deſcente ſoit entierement détruit en *D* par la réſiſtance de la matiere des couches inférieures. Or la Planète ne pouvant ſubſiſter en *D*, parce qu'elle ſeroit dans une matiere trop denſe; elle ſera obligée de remonter en *P* avec un mouvement, d'abord accéleré, & puis retardé. De *P* elle redeſcendra en *D*, puis remontera, & de cette maniere, il ſe fera une réciprocation comme les oſcillations des Pendules, ou comme les balancemens du vif-argent dans le tuyau du Baromètre, que l'on obſerve quand on le ſecouë un peu. Il faut remarquer que *CD* doit être plus petit que *CP*, parce que les couches inférieures ayant plus de denſité que les ſupérieures, la Planète en deſcendant depuis le point d'équilibre *C*, où elle a acquis ſa plus grande viteſſe, rencontre plus de réſiſtance, qu'en montant du même point *C*, avec la même viteſſe qu'elle avoit acquiſe en deſcendant. TAB. XLVI. *Fig.* 3.

XXXVI.

Donnons à préſent auſſi à la Planète le mouvement translatif; je parle de celui auquel elle s'accommode en entrant ſucceſſivement dans une autre couche qui l'emporte au tour de

de *S* par un petit arc élémentaire. Concevons donc que la Planète, entrainée par le fluide du tourbillon, parte du point de ſa plus grande hauteur *P*, en ſorte que ſi elle ne deſcendoit pas, elle iroit conjointément avec la couche *PHR*, ne faiſant autre choſe qu'obéïr à ſon mouvement & recevoir ſa viteſſe. Mais puiſque la Planète eſt obligée de deſcendre, en même tems qu'elle eſt emportée par le tourbillon, elle quittera à tout moment la couche où elle eſt, pour entrer dans une autre dont elle va prendre le mouvement de circulation. Il eſt manifeſte, comme je l'ai déja inſinué, que la Planète, pour ſatisfaire à ſes deux mouvemens, continuëra ſon chemin ſuivant une courbe particuliére *PLEM*, dont je chercherai la figure.

XXXVII.

Supoſons d'abord, qu'il faille préciſément le même tems à la Planète pour deſcendre de *P* en *D*, qu'il faut à la matiere céleſte pour lui faire décrire la moitié d'une révolution *PLE*; il ſuit de cette ſupoſition, que pour achever l'autre moitié *EMP*, il faut encore le même tems, qui eſt auſſi celui dans lequel la Planète remonteroit de *D* en *P*. Et puiſque les viteſſes accélerées & retardées de *P* en *D* ſont les mêmes, dans un ordre renverſé, que celles de *D* en *P*; il faut que la même choſe ſe faſſe à rebours, lorſque la Planète décrit la moitié *EMP*, qui ſe faiſoit en décrivant la premiere moitié *PLE*. Donc ces deux moitiés *PLE* & *PME* ſont deux courbes égales & ſemblables, ou plûtôt deux branches d'une même courbe: Donc elles font enſemble la courbe entiere *PLEMP*, en forme d'Ellipſe, qui a pour axe la droite *PE*, dont l'extrêmité *P* eſt l'Aphélie & l'autre *E* le Périhélie. Ayant prolongé l'axe *PE*, qui coupera les cercles *PHR* & *CAB* en *E* & *G*, nous aurons $GE = PD$; dont SE ($SG - GE$) $= SP - PD = SD$, c'eſt-à-dire, que la diſtance de l'Aphélie *P* au Soleil *S* ſurpaſſe celle du Périhélie *E*, de

de l'intervalle *PD* entre les deux couches extrêmes, qui ſont les limites de toutes celles que la Planète traverſe, en faiſant chaque révolution.

XXXVIII.

Mais pour connoitre la nature de cette courbe elliptique *PLEM*, & afin d'être aſſuré que c'eſt une véritable Ellipſe, une des ſections coniques, & que le point *S* en eſt le foyer. On voit bien, ſans que je le diſe, que cela dépend en partie de la viteſſe des couches, qui eſt connuë, étant comme $1:\sqrt{x}$, ou en raiſon ſoudoublée réciproque de leurs diſtances au Soleil, & en partie de la viteſſe accélerée & enſuite retardée de la deſcente de *P* en *D*. Or la loi, ſuivant laquelle la variation de cette viteſſe ſe doit faire, afin que ce mouvement, combiné avec la circulation des couches, oblige la Planète de décrire une telle Ellipſe; cette loi, dis-je, ſe découvre, en faiſant attention avec combien de force la Planète eſt pouſſée ou repouſſée, quand elle ſe trouve dans une couche d'une denſité differente de la ſienne. Connoiſſant ainſi les loix de la viteſſe tranſlative, & de celle de la deſcente, on ſera en état de déterminer la nature de l'Ellipſe *PLEM*. Car ſoit *N* un point quelconque, auquel la Planète ſoit parvenuë, & que l'on tire la droite *SN*, & une autre *Sn*, infiniment proche. Soit auſſi décrit du centre *S* l'arc *NI* & ſon plus proche *ni*, qui coupe *SN* au point *e*; il eſt clair que *Ii* ou *Ne* eſt à *ne*, comme la viteſſe acquiſe en *I* ſi la Planète tomboit perpendiculairement de *P* en *I*, eſt à la viteſſe de la couche *IN*. Ainſi le raport de *Ne* à *en* du triangle élémentaire *Nen* étant déterminé; on en trouvera la nature de la courbe *PLM* par la méthode des tangentes inverſe. Ou bien, on pourra proceder ſynthetiquement, en ſupoſant que *PLM* eſt une Ellipſe ordinaire, dont *S* ſoit le foyer, & chercher enſuite par la méthode differentielle directe le raport de *Ne* à *ne*, pour en tirer la viteſſe requiſe en

Digitized by Google

I, afin que nôtre courbe devienne l'Ellipſe ſupoſée. Je n'ajoute pas le calcul, parce qu'il ſeroit long & pénible. Il ſuffit, pour la premiere partie de la queſtion d'avoir indiqué la cauſe qui peut produire la figure elliptique des Orbites des Planètes : les principes d'où je l'ai déduite ſont clairs, intelligibles, & admis de tous ceux qui entendent la Méchanique ; c'eſt, je crois, tout ce qu'on prétend ſur cet article, & je ne penſe pas qu'on trouve la moindre difficulté dans la ſupoſition que je fais, que les oſcillations des Planètes perſévérent ſans être alterées par la réſiſtance externe que leur opoſe la matiere du tourbillon, comme il arrive à un Pendule agité dans notre air groſſier, où nous voyons que l'étenduë des oſcillations diminuë enfin ſenſiblement par la réſiſtance de l'air, juſqu'à l'entiere extinction du mouvement. Car l'énorme groſſeur des Globes des Planètes, jointe à l'extrême rareté de la matiere du tourbillon où elles nagent, fait concevoir aiſément, ſans le ſecours du calcul du M. NEWTON, que dans pluſieurs centaines de ſiécles, il n'arrivera point de changement ſenſible, ni à la durée, ni à l'étenduë des oſcillations que les Planètes ont une fois commencé de faire. Paſſons donc à l'autre partie, où on demande, pourquoi le grand axe de ces Ellipſes change de poſition : c'eſt à quoi il me ſera facile de ſatisfaire ; toute la réponſe pouvant être tirée de mon explication comme un ſimple Corollaire, de la maniere qui ſuit.

XXXIX.

Il eſt viſible que les Apſides *P* & *E* répondroient conſtamment aux mêmes points du Ciel, ſi le tems périodique pour achever une révolution entiere *PLMP* étoit préciſément égal au tems que la Planète employeroit (ſi elle n'étoit point emportée) à deſcendre de *P* en *D* & à remonter de *D* en *P*, pouſſée & repouſſée par la ſeule force qui vient de l'inégalité de denſité, comme je l'ai expliqué ci-deſſus. Mais qu'eſt-ce qui empêche de ſupoſer, que le tems périodique d'une révo-

lution

lution n'eſt pas parfaitement égal au tems des deux oſcillations? d'autant plus que nous ſavons d'ailleurs, que dans la nature des choſes il eſt preſque impoſſible de trouver deux productions d'une égalité parfaite & priſe à la rigueur géométrique. Il nous eſt donc permis de ſupoſer que la Planète fait ſa révolution un peu plûtôt que deux de ſes oſcillations. Ainſi ſupoſons cela comme une choſe fort naturelle, & voyons quel effet il en réſultera.

X L.

La Planète, qui quitte le point *P* & qui, après avoir parcouru tout le Ciel, revient à la ligne *SP*, n'aura pas encore achevé, tout-à-fait, de remonter à la même hauteur *SP*, c'eſt-à-dire, il lui manque encore quelque choſe pour revenir à ſon Aphélie. Donc la Planète, après la premiere révolution, croiſera la ligne *SP* obliquement, quoique bien près, au-deſſous de *P*, & conſumera encore un peu de tems avant que d'atteindre la circonference *PHR* dans un point π, qui ſera le lieu de l'Aphélie après la premiere révolution. On voit donc une raiſon phyſique, déduite du Syſtème des tourbillons, 1°. Pourquoi les Orbites des Planètes ſont des Ellipſes. 2°. Pourquoi le grand axe de ces Ellipſes change de poſition, ou pourquoi leur Aphélie répond ſucceſſivement à differens points du Ciel. Ce ſont les deux articles auſquels j'avois à ſatisfaire.

X L I.

Il faut, ſuivant mon explication, que le mouvement de l'Aphélie ſoit uniforme, & qu'il ſe faſſe d'Occident en Orient ſelon l'ordre des Signes, au moins pour les Planètes principales; mais ce mouvement eſt ſi lent, que le petit arc *P*π, qui eſt parcouru dans le tems d'une révolution, eſt inſenſible, & qu'il ne peut devenir ſenſible qu'après un grand nombre de révolutions. Auſſi cela fait-il que les Aſtronomes ne pouvant pas faire des obſervations aſſés fréquentes ſur ce ſujet, ne ſont

Digitized by Google

pas d'accord combien il ſaut donner de mouvement à l'Aphélie de chaque Planète. M. NEWTON ſupoſe comme vrai, que le progrès de l'Aphélie de Mars, ſuivant l'ordre des ſignes, eſt tel qu'en cent années il n'avance que de 33 min. 20 ſecondes, enſorte qu'il faudroit 648 ſiécles pour une ſeule révolution de l'Aphélie de Mars; d'où il conclut, par ſa Théorie fondée ſur l'attraction mutuelle entre les Planètes, que les Aphélies des autres Planètes inférieures doivent avancer auſſi dans l'ordre des ſignes en raiſon ſeſquipliquée de leurs diſtances au Soleil; enſorte que dans un ſiécle l'Aphélie de la Terre avancera de 17 min. 14 ſec. celui de Venus de 10 min. 53 ſec. & enfin celui de Mercure de 4 min. 16 ſec. Il ſemble qu'il a établi cette proportion ſeſquipliquée ſur une pure aparence & ſans aucun fondement; car je ne vois pas, & je crois que bien d'autres plus clairvoyans que moi ne voyent pas non plus, comment la gravitation de l'une ſur l'autre (quand on l'accorderoit) demande une telle proportion; d'autant plus que, ſelon lui, cette même gravitation produit ſur l'Aphélie de Saturne un effet entierement irrégulier & contre ſa règle; puiſqu'il veut que cet Aphélie ſoit tantôt avancé, tantôt reculé par l'attraction de Jupiter, dans le tems de conjonction de ces deux Planètes. Ne ſemble-t-il pas que M. NEWTON devroit dire la même choſe de chaque Planète inférieure? Car s'il y avoit une telle attraction, la Terre, par exemple, étant dans ſon Aphélie, quand elle précède Jupiter par raport au Zodiaque, en ſeroit retirée; & au contraire elle en ſeroit avancée, quand Jupiter la précède; c'eſt-à-dire, que la même force que Jupiter fait influer ſur la Terre cauſeroit des effets entierement opoſés, avant & après la conjonction de la Terre & de Jupiter. Mais on ne remarque rien de ſemblable, & M. NEWTON lui-même ne l'infere pas de ſon hypothèſe, comme il le devroit faire.

XLII.

XLII.

Quant au mouvement de la Lune, il eſt ſujet à tant d'irrégularités, qu'on a de la peine à le bien mettre en règles. Cela vient de ce que la Lune étant Satellite de la Terre, elle eſt emportée autour de celle-ci par ſon tourbillon particulier, lequel lui-même, envelopé dans le tourbillon ſolaire & entrainé autour du Soleil, ſoufre de grandes variations à bien des égards, auſquelles il ne ſeroit pas ſujet s'il étoit libre & hors d'un autre tourbillon, & que le centre de la Terre fût immobile, comme celui du Soleil ou d'une autre Etoile fixe. D'où il eſt clair 1°. que le tourbillon de la Terre ſerré comme il eſt entre les couches du grand Tourbillon ſolaire, qui le terminent par en haut & par en bas, doit ſe retrécir dans la ligne droite tirée par les centres du Soleil & de la Terre, & s'étendre ſuivant la perpendiculaire à cette ligne, à peu près comme une veſſie preſſée entre deux plans, ſe doit aplatir. 2°. Comme la matiere du tourbillon terreſtre, quand elle eſt entre la Terre & le Soleil, ſe meut à contre ſens du mouvement de la matiere du tourbillon ſolaire ; mais quand elle circule à l'opoſite, où elle eſt le plus éloignée du Soleil, elle va de même côté avec le grand tourbillon ; il eſt viſible que la partie d'en bas du tourbillon terreſtre, trouvant plus de réſiſtance, & partant plus de preſſion que celle d'en haut, il faut que l'interſtice entre la Terre & l'extrêmité inférieure de ſon tourbillon ſoit plus étroit que l'interſtice opoſé, qui eſt entre la Terre & l'extrêmité ſupérieure. D'où il ſuit 3°. que les ſections des couches, qui compoſent le tourbillon de la Terre, ſont d'une figure inégale & differente du cercle, non point pourtant comme les Ellipſes ordinaires, qui ont les concavités opoſées égales, telles que DESCARTES & quelques autres ont conçû l'Orbite de la Lune, en plaçant la Terre dans le centre de cet Orbite. Mais je conçois la choſe à peu près ainſi.

Digitized by Google

XLIII.

TAB. XLVI. Fig. 4. Soit *T* le centre de la Terre (*Fig.* 4) *PTS* la ligne droite tirée vers le Soleil, à laquelle ſoit conçûë la perpendiculaire *ATB*. Du centre *T*, & ſur *AB* comme ſur le grand axe, ſoient décrites deux demi-Ellipſes *ACB* & *AFB*; dont le petit demi-axe ſuperieur *TC* ſoit un peu plus grand que l'autre petit demi-axe inférieur *TF*. La courbe entiere *CAFBC* repreſentera aſſés bien la ſection d'une couche du tourbillon terreſtre; tellement que ſi la Lune étoit de la même denſité que la matiére de cette couche, & qu'elle fût d'abord placée au point *C*, elle ſeroit obligée de ſuivre le cours de la couche, & décriroit par conſéquent la ligne *CAFB*. Mais pour donner une idée générale des principales circonſtances qui accompagnent le mouvement de la Lune, il n'y a qu'à ſupoſer, ſuivant ma Théorie, que la Lune ait été miſe primitivement au delà de *C*, ſavoir en *P* où la matiere du tourbillon de la Terre eſt moins denſe que la Lune, & où les couches commencent à devenir d'une rondeur plus uniforme & plus aprochante de la figure ſphérique (car il eſt à remarquer, qu'à meſure que la matiere du tourbillon eſt plus éloignée du centre de ſon mouvement, par conſéquent moins preſſée par la proximité de la Terre, les couches affecteront plus la figure ſphérique). Cela étant, concevons le cercle *PHGR*, décrit du centre *T* & du rayon *TP*, qu'on pourra nommer la limite des Apogées de la Lune. Soit auſſi *PD* l'intervalle des oſcillations qu'elle feroit, ſi n'étant point emportée par le tourbillon, elle pouvoit deſcendre & remonter, à cauſe de la difference de denſité. Il eſt clair que la couche qui paſſe par *D* ſera la limite des Perigées, qui ſera plus aplati que la couche d'équilibre *CAFB*. Ainſi elle coupera le grand axe aux points *I* & *K* plus près de *A* & *B*, que n'eſt le point *D* du point *C*. C'eſt pourquoy l'intervalle des oſcillations *HI* & *KR* ſera plus petit que l'intervalle *PD*; mais puiſque *CD* eſt

Digitized by Google

eſt un peu plus grand que *FE*, & par récompenſe *FG* un peu plus grand que *FC*, on voit que les deux intervalles *PD* & *GE* doivent être à peu près égaux, comme le ſont exactement les deux autres *HI* & *KR*.

XLIV.

Après tous ces préparatifs, conſiderons la route que doit tenir la Lune dans le tourbillon, & les Phénomènes qui en découlent. Si les oſcillations par *PD* & *GE* étoient parfaitement iſochrones aux oſcillations par *HI* & *KR*, & que le tems de deux oſcillations fût auſſi parfaitement égal au tems périodique de la Lune, on voit bien qu'en combinant le mouvement tranſlatif avec le mouvement d'oſcillation, l'Orbite *PLEM* qui en réſultera, devroit être toûjours la même pour chaque révolution, de ſorte que l'Apogée *P* & le Perigée *E* arriveroient toûjours dans les ſyzygies, & les points de moyennes diſtances dans les quadratures. Mais les intervalles *PD* & *GE* étant plus grands que les intervalles *HI* & *KR*, il eſt raiſonnable de dire, qu'il faut plus de tems pour faire une oſcillation par *PD* ou *GE*, que pour en faire une par *HI* ou *KR*. Voici les conſéquences que j'en tire.

XLV.

Quand la Lune part de ſon Apogée, que je ſupoſe être préſentement dans les ſyzygies, par exemple en *P*, il faudra plus qu'une révolution entiere pour qu'ayant fait deux oſcillations elle ſoit remontée à ſon Apogée, qui ſera par conſéquent avancé en *π*. Après une ſeconde révolution, l'Apogée, ſera avancé d'avantage en *p*, mais non pas autant qu'il l'étoit après la premiere révolution; parce que les tems des oſcillations commencent à diminuer. Et comme ils diminuent juſqu'à ce que l'Apogée ſoit parvenu dans la quadrature, on conçoit que le progrès de l'Apogée doit être retardé juſqu'en *H*; que delà il doit

doit être derechef accéleré juſqu'en *G*; puis retardé juſqu'en *R*, & enfin accéleré juſqu'en *P*. L'avancement moyen ſur chaque révolution de la Lune eſt d'environ 3½ degrés, ce qui fait que l'Apogée principal employe à peu près 9 ans à parcourir tout le cercle *PHGRP*. Je dis le principal, pour le diſtinguer des deux autres Apogées particuliers, qui ſe trouvent toûjours dans les quadratures, aux extrêmités du grand axe *AB* de la couche Elliptique *CAFB*, que l'on peut prendre pour l'Orbite moyenne que la Lune décrit autour de la Terre; de cette maniere la Lune ſera chaque mois deux fois dans l'Apogée, & deux fois auſſi dans le Perigée. De plus, on voit que la Lune doit avoir la plus grande viteſſe dans les ſyzygies, parce que les couches du tourbillon terreſtre, étant le plus ſerrées dans ces endroits, doivent ſe mouvoir plus rapidement qu'ailleurs. Et de ces deux plus grandes viteſſes, celle que prend la Lune, lorſqu'elle eſt pleine, eſt moindre que quand elle eſt nouvelle, parce que le tourbillon eſt plus preſſé entre *TF* qu'entre *TC*. Par la même raiſon, la plus grande excentricité ſe fait lorſque l'Apogée principal ſe trouve dans les ſyzygies. Je pourrois démontrer, par cette Théorie, pluſieurs autres particularités, qui ſont vérifiées par les obſervations. Auſſi le mouvement annuel de la Terre, environnée de ſon tourbillon, autour du Soleil, cauſe de nouvelles irrégularités dans le mouvement de la Lune autour de la Terre: mais toutes ces particularités ſont hors de nôtre ſujet, & on ne prétend pas que je donne ici un Syſtème complet de l'Aſtronomie.

XLVI.

Pour ce qui eſt des Satellites des deux Planètes ſupérieures, je crois que ſi on pouvoit les obſerver de près, & ſur les globes-mêmes de ces deux Planètes, on remarqueroit, ſans doute, dans le mouvement des Satellites, les mêmes inégalités que l'on remarque ici-bas dans le mouvement de la Lune: il n'y auroit de difference que du plus au moins; en ce que le

le tourbillon de Jupiter, par exemple, étant beaucoup plus étendu, plus rapide, & plus fort que celui de la Terre, & au contraire le tourbillon du Soleil à la diſtance de Jupiter étant beaucoup plus foible que dans la région où nage nôtre Terre, il eſt bien naturel que le tourbillon de Jupiter ne ſouffre pas tant de dérangement dans la figure ſphérique de ſes couches, que le tourbillon terreſtre. Il y auroit bien d'autres réfléxions à faire ſur le Syſtème de la Lune, & celui des Satellites; mais puiſque cette matiere me méneroit hors de mon ſujet, qui ne doit regarder, à ce que je crois, que les Planètes principales, je prie mes Lecteurs de prendre le peu que j'ai dit ſur le mouvement de la Lune & des autres Satellites, comme une legére ébauche d'une ample Théorie, qui mériteroit d'être cultivée & perfectionnée. Mon deſſein a été de faire comprendre qu'avec les tourbillons on ſeroit en état d'expliquer encore d'autres Phénomènes que ceux qui font le ſujet de la queſtion propoſée.

XLVII.

Avant que de finir ce Diſcours, je propoſerai ici, par ſurcroit, une maniere de ſe répréſenter en quelque façon à l'œil la génération des Orbites des Planètes, & l'avancement de leur Aphélie, par une expérience, moyennant un Pendule. Par les Théorèmes de M. HUGUENS, qu'il a mis à la fin de ſon excellent Ouvrage *de Horologio oſcillatorio*, & qui ont été démontrés dans ſes Oeuvres poſthumes, & par pluſieurs autres perſonnnes; on ſçait que les Pendules de differentes longueurs, qui font des circulations coniques d'une égale hauteur, achevent leurs circulations en tems égaux; c'eſt-à-dire, que tous ces Pendules circulans ainſi ſont iſochrones; c'eſt le Théorème 7e. Mais par le 9e Théorème, on voit que le tems périodique d'une circulation très petite, qui ſe fait lorſque le fil du Pendule fait un angle fort aigu avec la verticale qui paſſe par le point de ſuſpenſion, & qui eſt l'axe du cone que le

Pendule décrit; on voit, dis-je, que le tems périodique eſt égal au tems d'une double oſcillation laterale très petite, que le même Pendule fait lorſqu'il eſt agité dans un plan vertical qui paſſe par le point de ſuſpenſion.

XLVIII.

TAB. XLVI. *Fig.* 5.

Soit donc le fil du Pendule *AP* ſuſpendu en *A*, faiſant avec la verticale *AC* un angle quelconque *PAC*, & qu'on donne au poids *P* une viteſſe convenable ſuivant la tangente du cercle *PDEF* décrit du rayon *CP*, afin qu'avec cette viteſſe le Pendule *AP* décrive en l'air la ſurface conique, dont la baze eſt le même cercle *PDEF*. Cette viteſſe doit être (ce qu'on déduit aiſément des Théorêmes 5e & 7e de M. HUGUENS) à la viteſſe que le poids *P* pourroit acquerir en tombant de la moitié de la hauteur *AC*, comme le rayon *PC* eſt à la hauteur entiere *AC*. Avec une telle viteſſe une fois imprimée, le poids *P* continuera de circuler toûjours ſur la circonference *PDEF*, ſupoſé que l'air ne faſſe point de réſiſtance. Car dans ces circonſtances, le poids *P* eſt retenu ſur l'Orbite circulaire *PDEF* par deux forces qui ſe contrebalancent, l'une qui eſt la centrifuge du poids *P* cherchant à dilater l'angle *PAC*, & l'autre force eſt ſa propre peſanteur, qui tendant à deſcendre fait effort pour diminuer le même angle *PAC*. Mais dès qu'on donne au poids *P* une viteſſe un peu plus petite, ou qu'il perd quelque choſe de celle qu'on lui avoit d'abord imprimée, il ne circulera plus ſur l'Orbite circulaire *PDEF*, mais il la changera en une autre qui aura la figure d'une Ellipſe *PGEH* décrite ſur la ſurface ſphérique, dont le centre eſt *A*, & le rayon *AP*. Cependant cette Ellipſe pourra être regardée comme plane, pourvû que l'angle *PAC* ſoit médiocrement aigu, par ex. de 12 ou de 15 dégrés.

XLIX.

XLIX.

En obſervant ce mouvement, on verra, avec plaiſir, que le grand axe de cette Ellipſe *PE* change de poſition après chaque révolution; tellement qu'après la premiere les deux extrêmités de l'axe *P* & *E* ſe trouveront avancées en π & ε, en même ſens que ſe fait la circulation, & les avancemens de ces deux points continueront ainſi, juſqu'à ce qu'après pluſieurs révolutions du Pendule ils ayent parcouru toute la circonference *PDEF*; pourvû que durant ce mouvement la réſiſtance de l'air ne trouble pas ſenſiblement cet effet. Ainſi voilà le poids *P* répréſentant une Planète, qui fait ſes révolutions ſur l'Orbite elliptique *PGEH*, dont l'Aphélie *P* ou *E* avance peu à peu, juſqu'à faire tout le tour du cercle *PDEF*, & cela du même côté que ſe font les révolutions; il n'y a guères de difference dans cette comparaiſon avec le mouvement des Planètes, ſinon qu'ici les Apſides *P* & *E* ſont tous deux des Aphélies par raport au centre *C* conſideré comme le Soleil; & la comparaiſon conviendroit parfaitement, ſi les forces centrales, avec leſquelles les Planètes ſont pouſſées vers le Soleil, étoient directement comme leurs diſtances; car les Orbites des Planètes ſeroient des Ellipſes, dont le centre & non pas le foyer feroit la place du Soleil. Quant au reſte, la mobilité & l'avancement de l'Aphélie *P*, dans nôtre expérience, vient évidemment de la cauſe que j'ai indiquée en expliquant la mobilité de l'Aphélie des Planètes.

L.

Pour en être aſſuré, on conſiderera que le poids *P* n'ayant pas aſſés de viteſſe initiale pour décrire un cercle, la force de ſa peſanteur prévaudra à la force centrifuge. Donc il ſera obligé de ſe raprocher du centre pendant qu'il circule en même tems, ce qui lui fait décrire l'arc *PG* entre *PC* & *PD*,

Digitized by Google

juſqu'à ce que la diſtance *EG* ſoit aſſés petite, & la viteſſe aſſés grande, (car il doit s'accélerer à cauſe de ce ſurplus de force qui le pouſſe vers le centre) pour que la force centrifuge reprenant le deſſus, repouſſe le poids à la diſtance *CE* égale à *CP*, & ainſi le poids continuera à décrire l'Ellipſe *PGEH*. Or c'eſt ce ſurplus de force, qui feroit faire au Pendule *AP* des oſcillations laterales très petites dans le plan vertical, & puiſque *AP* eſt plus grande que *AC*, le tems d'une de ces oſcillations doit être un peu plus grand que le tems d'une oſcillation laterale très petite d'un Pendule de la longueur *AC*. Donc le tems d'une circulation conique du Pendule *AP* (lequel tems eſt égal, par le Théorème 9ᵉ, au tems d'une double oſcillation laterale très petite d'un Pendule de la longueur *AC*) ſera un peu plus petit que le double du tems qu'il faut au poids *P* pour parvenir en *G*, où il eſt le plus près du centre *C*, & pour s'en éloigner à ſa plus grande diſtance en *E*.

L I.

D'où il paroit que quand le poids *P* a achevé une révolution entiere ſur l'Ellipſe *PGEH*, il ne ſera pas encore revenu tout-à-fait à ſon premier plus grand éloignement; il ſe trouvera donc un peu plus avant en π, lorſqu'il aura atteint ce point du plus grand éloignement. C'eſt ainſi que le point *P*, qui repréſente un des Aphélies, paroitra parcourir la circonference *PDEF* après un bon nombre de révolutions du Pendule, & cela dans le même ſens que ſe font les révolutions elles-mêmes, tout comme on l'obſerve dans le mouvement des Planètes principales; avec cette difference ſeulement, que les Planètes ne paſſent en chaque révolution qu'une fois par l'Aphélie, & une fois par le Périhélie; au lieu qu'ici le Pendule a deux Aphélies en *P* & *E*, & deux Périhélies en *G* & *H*, par leſquels on le voit paſſer en chaque révolution.

LII.

Digitized by Google

L I I.

Si l'angle *PAC* eſt fort aigu, enſorte que la longueur du Pendule *AP* ne differe pas ſenſiblement de la hauteur verticale *AC*; alors la force centrale, qui pouſſe continuellement le poids *P* vers le centre *C*, eſt par tout proportionnelle à ſa diſtance *PC*, comme il ſeroit aiſé de le prouver; ce qui fait que la courbe *PGEH* devient une véritable Ellipſe, conformément à la Propoſition 10 du premier Livre des *Principes* de M. NEWTON, & l'axe des Aphélies *PE* ne change plus de poſition. En effet, on remarque que le mouvement du Pendule commençant à s'affoiblir par la réſiſtance de l'air, les petites Ellipſes continuent de ſe décrire pendant pluſieurs révolutions, ſans que les Aphélies *P* & *E* avancent ſenſiblement.

N°. CXXXIX.

METHODE

Pour trouver les Tautochrones, dans les milieux réſiſtans comme le quarré des Viteſſes.

Par M. BERNOULLI, Profeſſeur de Mathématiques à *Bâle*.

AVant que d'entreprendre la ſolution generale, voici quelques conſidérations néceſſaires ſur les fonctions ſemblables compoſées d'indéterminées proportionnelles.

Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris 1730. pag. 78. Ed. de Paris, pag. 109. Ed. d'Amſt.

DEFINITION I.

Si l'on forme une fonction quelconque d'une quantité déterminée *a*, & d'une indéterminée *x*, de maniere que *a* & *x* faſſent enſemble le même nombre de dimenſions dans chaque

terme : prenant enſuite une autre déterminée A, & une indéterminée X, proportionnelles aux premieres a & x, c'eſt-à-dire telles que $a : A = x : X$; ſi l'on forme de A & X une nouvelle fonction, pareille à celle qu'on a formée de a & x; j'appelle ces deux fonctions, & les autres de cette eſpèce, *Fonctions ſemblables*. Ainſi, par exemple, $a^3 + faax + gaxx + hx^3$, & $A^3 + fAAX + gAXX + hX^3$ ſont des fonctions ſemblables; de même $\sqrt{}(a^4 + fx^4)$ & $\sqrt{}(A^4 + fX^4)$; $\frac{aa + fax + gxx}{ba^3 + ix^3}$, & $\frac{AA + fAX + gXX}{bA^3 + iX^3}$; $a + \sqrt{}(ax + fxx)$ & $A + \sqrt{}(AX + fXX)$; $\frac{a + x}{axx + f\sqrt{}(a^6 + x^6)}$ & $\frac{A + X}{AXX + f\sqrt{}(A^6 + X^6)}$; & ainſi des autres, prenant toujours f, g, h, i, &c. pour des coëfficiens numeriques.

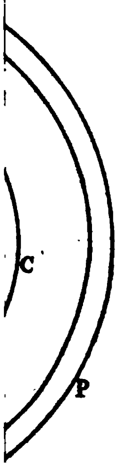
DEFINITION II.

J'appelle auſſi *Fonctions ſemblables tranſcendantes*, celles des précédentes qui ſeroient multipliées par dx & dX, & qui ſeroient ſupoſées intégrées par le ſigne $\int$. Ainſi par exemple, $\int(adx : \sqrt{}(aa - xx))$, & $\int(AdX : \sqrt{}(AA - XX))$ ſont des fonctions ſemblables tranſcendantes, & ainſi des autres.

DEFINITION III.

Les fonctions ſemblables, ſoit algébriques, ſoit tranſcendantes, ſont eſtimées être d'une telle ou telle dimenſion, dont l'expoſant eſt le nombre qui reſte, quand on retranche l'expoſant des termes du dénominateur de l'expoſant des termes du numerateur, en comptant dx ou dX pour une dimenſion; & s'il y a des ſignes radicaux, en diviſant d'abord l'expoſant des termes par l'expoſant du ſigne. Ainſi $\sqrt{}(a^4 + x^4)$ eſt reputé de deux dimenſions; $(a + x) : (axx + f\sqrt{}(a^6 + x^6))$ aura pour dimenſion $1 - 3 = -2$; $\int(adx : \sqrt{}(aa - xx))$ eſt d'une dimenſion, parce que adx eſt de deux dimenſions, &

N°. CXXXVIII



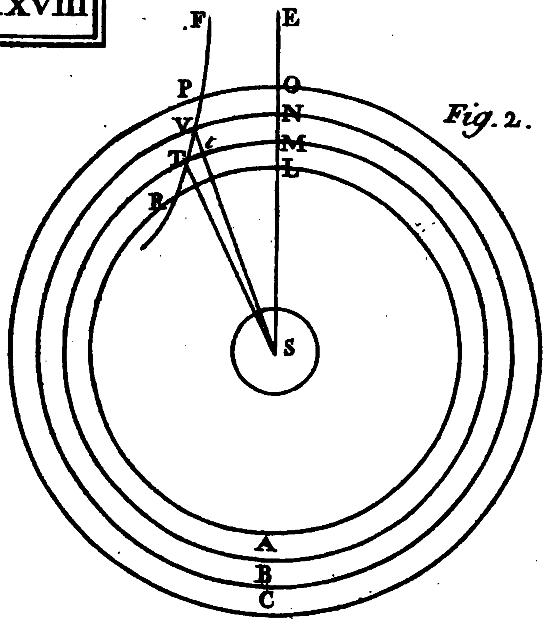


Fig. 2.

ig. 3.



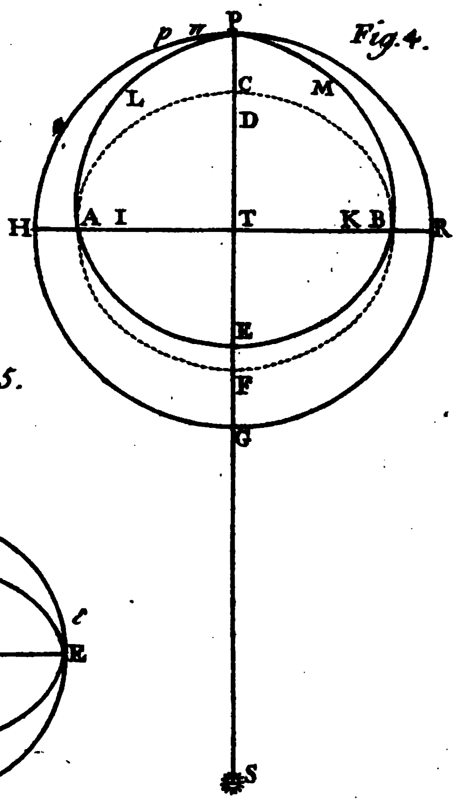
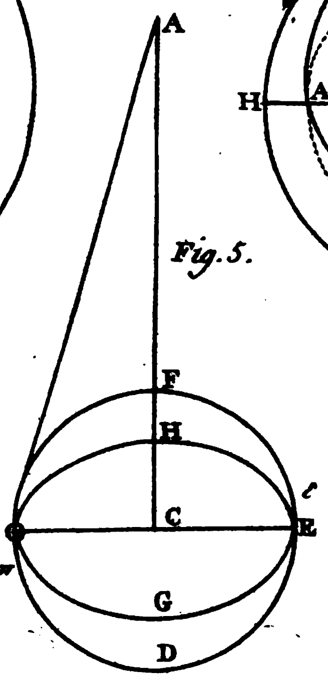


Fig. 4.

Fig. 5.



Digitized by Google

& $\surd(aa - xx)$ d'une ; ainſi cette fonction $\int(adx : \surd(aa - xx))$ a pour expoſant $2 - 1 = 1$; de même $(a^3 + f\,axx) : (gaxx + bx^3)$ & $\int(axdx : (fa^3 + gx^3))$, n'ont aucune dimenſion, parce que $3 - 3 = 0$.

THEOREME.

Toutes les fonctions ſemblables, ſoit tranſcendantes ſoit algebriques, ſont entr'elles comme leurs quantités ſemblables a *&* A, *ou* x *&* X, *élevées au même expoſant que ces fonctions.* Ainſi par exemple, $aa : AA = [xx : XX] = \frac{a^3 + faxx}{gx} : \frac{A^3 + fAXX}{gX} = \int dx = (aa + xx) : \int dX \surd(AA + XX) \surd \int \frac{x^3 dx}{aa + xx} : \int \frac{X^3 dX}{AA + XX}$.
De même $\frac{1}{a} : \frac{1}{A} = [\frac{1}{x} : \frac{1}{X} =] \frac{1}{\surd(aa - xx)} : \frac{1}{\surd(AA - XX)} = \int \frac{adx}{\surd(a^6 - x^6)} : \int \frac{AdX}{\surd(A^6 - X^6)} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a^6 - x^6)}} : \int \frac{dX}{\sqrt[3]{(A^6 - X^6)}}$ & ainſi des autres.

COROLLAIRE.

L'on voit par-là que toutes les fonctions ſemblables, qui n'ont aucune dimenſion, ſont égales entr'elles : car elles ſont comme a^0 a A^0, ou co mme x^0 à X^0. Mais $a^0 = 1 = A^0$ & $x^0 = 1 = X^0$. Ainſi par exemple $\int \frac{adx}{\surd(a^4 - x^4)} = \int \frac{AdX}{\surd(A^4 - X^4)}$; $\int \frac{aadx + xxdx}{a^3 + fx^3} = \int \frac{AAdX + XXdX}{A^3 + fX^3}$; $\frac{a + \surd(aa - xx)}{f\sqrt[3]{axx}} = \frac{A + \surd(AA - XX)}{f\sqrt[3]{AXX}}$; $\frac{a + fx}{a - gx} + \frac{aa + bax}{aa - gxx} = \frac{A + fX}{A - gX} + \frac{AA + bAX}{AA - gXX}$; & ainſi des autres.

SCHOLIE.

J'ai déja traitté ce même ſujet autrefois, dans un Mémoire que donna feu mon Fils *Nicolas*, inſeré dans le VIIe. Tome des *Suppl.* des *Actes de Leipſic* pag. 322 *. La démonſtration ſe

* N°. CXVI. pag. 453. Tom. II.

ſe préſente d'elle-même, pour peu qu'on y faſſe attention, & eſt plus facile à concevoir qu'à expliquer. Cette conſidération eſt le ſeul moyen de ſe bien conduire dans la recherche des Tautochrones, & des autres Courbes, où l'on eſt obligé de conſiderer les fonctions ſemblables, comme l'on verra dans la ſuite.

I.

PROBLEME Ier. ET PRINCIPAL.

Décrire la Courbe, par laquelle un corps, deſcendant par ſa peſanteur, dans un milieu d'une denſité uniforme, de quelque point de la Courbe qu'il commence à deſcendre, parvienne toujours dans un tems égal au point le plus bas; & de là remonte dans le même temps par l'autre branche de la Courbe juſqu'où il pourra remonter; en ſupoſant la réſiſtance comme le quarré des viteſſes.

SOLUTION.

J'appelle *l'Arc total deſcendu*, celui qui eſt compris entre le point le plus élevé d'où le corps commence à deſcendre, & le point le plus bas; *l'Arc total remonté*, celui qui eſt compris entre le point le plus bas que je prends pour le *ſommet* de la Courbe, & le point juſqu'où il peut remonter avec ſa viteſſe acquiſe, juſqu'à ce qu'il ait perdu toute ſa viteſſe; *l'Arc partial*, ſoit deſcendu, ſoit remonté, eſt une partie quelconque indéterminée d'un Arc total quelconque, priſe depuis le ſommet juſqu'au lieu de la Courbe où ſe trouve le Corps, ſoit en deſcendant, ſoit en montant.

II.

Soit maintenant la gravité qui anime les corps $= g$, la viteſſe dans un point quelconque de l'Arc total $= v$, l'Arc partial $= r$. [je l'appelle plutôt r que s, parce que la lettre s ſe confondroit facilement avec le nombre 5] l'Abſciſſe priſe ſur l'axe

l'axe élevé verticalement depuis le ſommet de la Courbe, correſpondante à l'Arc partial, $= x$, l'Appliquée correſpondante au même Arc, $= y$; la réſiſtance qu'on ſupoſe proportionnelle au quarré de la viteſſe, $= vv : n$, où j'entends par $1 : n$ l'intenſité de cette réſiſtance, n étant conſtant pour un arc total quelconque.

III.

Par la décompoſition de la force de la peſanteur en tangentielle & normale, l'on a la force tangentielle $= gdx : dr$, de laquelle ôtant, lorſque le corps deſcend, ou à laquelle ajoutant, lorſque le corps remonte, la force de la réſiſtance $vv : n$, l'on a pour la force accéleratrice ou retardatrice $gdx : dr \mp vv : n$. [NB. le ſigne ſupérieur ayant lieu lorſque le corps deſcend, & l'inférieur lorſqu'il remonte, ce qu'il faudra auſſi toujours obſerver dans la ſuite]. L'on aura donc $(gdx : dr \mp vv : n) \times dr : v = -dv$; d'où l'on tire cette équation $gdx \mp vvdr : n = -vdv$ à laquelle il faut ſatisfaire. En faiſant $dr = dz : z$ il vient $ngzdx \mp vvdz = -nzvdv$, ou $-2gzdx = \mp \frac{2}{n} vvdz + 2zvdv$; diviſant par $z^{\pm 2 : n + 1}$, l'on aura $-2gz^{\mp 2 : n} dx = [\mp \frac{2}{n} vvdz + 2zvdv] z^{\mp 2 : n - 1}$. Pour intégrer cette Equation, il ne ſuffit pas d'écrire $-2g\int z^{\mp 2 : n} dx = vvz^{\mp 2 : n}$ [car cette valeur de $vvz^{\mp 2 : n}$, exprimée par $-2g\int z^{\mp 2 : n} dx$, eſt incomplette, n'apartenant à aucun arc total] mais $2gA - 2g\int z^{\mp 2 : n} dx = vvz^{\mp 2 : n}$; où je prends A pour quelque choſe de conſtant, à quoi $\int z^{\mp 2 : n} dx$ devient égal, lorſque x devient l'abſciſſe correſpondante à quelque arc total, de maniere que A ſoit conſtant pour cet arc total entier, mais different pour un arc total different.

Digitized by Google

I V.

L'on a donc $vv = 2gAz^{\pm 2:n} - 2gz^{\pm 2:n}\int z^{\mp 2:n}dx =$ [à cauſe de $z = c^{r}$; j'entends par c le nombre dont le logarithme eſt l'unité] $2gAc^{\pm 2r:n} - 2gc^{\pm 2r:n}\int c^{\mp 2r:n}dx$. Et ainſi dt, ou le petit tems par l'élement d'un arc total quelconque ſera $= dr : \sqrt{}(2gAc^{\pm 2r:n} - 2gc^{\pm 2r:n}\int c^{\mp 2r:n}dx)$, ou pour abréger, en multipliant par la conſtante $\sqrt{}2g$, l'on aura $dt\sqrt{}2g = dr : \sqrt{}(Ac^{\pm 2r:n} - c^{\pm 2r:n}\int c^{\mp 2r:n}dx)$. Afin donc que le tems, que le corps employe à deſcendre ou à remonter par un arc total quelconque, ſoit toûjours le même ; il faut faire enſorte que la valeur de $\int(dt : 2g)$ qu'on vient de trouver, ſoit égale à quelque fonction ſemblable de dimenſion nulle, comme par exemple $\int(mdP : \sqrt{}(AA - PP))$; où j'entends par m un nombre arbitraire conſtant, & dans laquelle le changement de la lettre A ne change point la valeur de la fonction ; car $\int(mdP : \sqrt{}(AA - PP))$ donne toûjours un angle droit pris autant de fois que m contient d'unités, de quelque grandeur qu'on prenne A, lorſque PP devient $= AA$.

V.

Pour faire donc enſorte que la valeur du tems qu'on vient de trouver $\int(dr : \sqrt{}(Ac^{\pm 2r:n} - c^{\pm 2r:n}\int c^{\mp 2r:n}dx))$ ſoit ſemblable à la ſomme qu'on a choiſie $\int(mdP : \sqrt{}(AA - PP))$ j'écris dans l'expreſſion du tems AA pour A, & je diviſe l'un [illegible] l'autre terme par $c^{\pm r:n}$, & j'ai $\int(c^{\mp r:n}dr : \sqrt{}(AA - \int c^{\mp 2r:n}$ [illegible] que je ſupoſe $= \int(mdP : \sqrt{}(AA - PP))$. La queſ[illegible]e réduit donc à faire enſorte que $c^{\mp r:n}dr = mdP$, & que de plus $\int c^{\mp r:n}dx = PP$; car on tirera de là la rélation entre r & x dans laquelle A n'entrera point, ce que je fais ainſi.

VI.

Digitized by Google

V I.

Par la premiere Equation, l'on a $\frac{1}{m} c^{\mp r:n} dr = dP$; je l'intégre en obſervant la correction néceſſaire, afin que r & P s'évanouïſſant, la valeur de P s'évanouïſſe auſſi, & l'on aura $\mp \frac{n}{m} c^{\mp r:n} \pm \frac{n}{m} = P$; en quarrant, l'on a $\frac{1}{mm}(\mp nc^{\mp r:n} \pm n)^2 = PP$, qui doit être $= \int c^{\mp r:n} dx$; en differentiant le premier & le dernier, l'on aura $\frac{2}{mm} c^{\mp r:n} dr (\mp nc^{\mp r:n} \pm n) = c^{\mp 2r:n} dx$; d'où l'on tire tout d'un coup $dx = \frac{2}{mm} c^{\pm r:n} dr (\mp nc^{\mp r:n} \pm n) = \mp \frac{2n}{mm} dr \pm \frac{2n}{mm} c^{\pm r:n} dr$, ou $mmdx = \mp 2ndr \pm 2nc^{\pm r:n} dr$; en intégrant, & faiſant encore la correction néceſſaire, afin que x s'évanouïſſant, r s'évanouïſſe auſſi, l'on aura $mmx = -2nn \mp 2nr + 2nnc^{\pm r:n}$; qui eſt l'Equation exponentielle en termes finis, qui détermine la Tautochrone que l'on cherche. Si l'on veut avoir une Equation differentielle, ſans quantités exponentielles; on le pourra de la maniere ſuivante : Par l'Equation qu'on vient de trouver, l'on a $2nnc^{\pm r:n} = mmx + 2nn \pm 2nr$; mais par l'Equation differentielle qu'on avoit trouvée auparavant, l'on a auſſi $2nnc^{\pm r:n} = \pm mmndx : dr + 2nn$; donc $mmx + 2nn \pm 2nr = \pm mmndx : dr + 2nn$; qui réduite, donne $mmxdr \pm 2nrdr = \pm mmndx$, ou $\pm mmxdr + 2nrdr = mmndx$.

V I I.

Coroll. I. Lorſque $n = \infty$, c'eſt-à-dire, lorſque $vv : n$, ou la réſiſtance eſt nulle; l'on aura $2rdr = mmdx$, & $rr = mmx$; d'où l'on voit que les abſciſſes ſont proportionnelles aux quarrés des arcs correſpondans, & qu'ainſi la courbe eſt la Cy-

cloïde; comme il doit arriver: car dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne reſiſte point, il n'y a que la Cycloïde qui puiſſe être Tautochrone.

VIII.

Coroll. II. Mais ſi n demeurant finie, l'on prend $m = \infty$, l'on trouve $\mp x\,dr = n\,dx$, qui eſt l'Equation de la *Tractoire* de M. Huigens, dont la tangente eſt par tout $= n$; en ſorte que cette Tractoire eſt une des Tautochrones dans un milieu réſiſtant comme les quarrés des viteſſes: mais comme ici le point le plus bas eſt à une diſtance infinie; car c'eſt le point où la tangente ſe confond avec l'aſymptote horizontale, l'on voit que les tems de chaque deſcente, de quelque point de la courbe qu'on commence à les compter, ſont infinis, mais cependant égaux; car dans certains cas les infinis ont entr'eux une raiſon déterminée; paradoxe qui n'a rien de nouveau pour ceux qui ſont verſés dans le Calcul infinitéſimal.

IX.

Conſtruction de la Tautochrone.

Voici comme on peut conſtruire la Tautochrone, que nous venons de trouver: Puiſque $dx = \mp 2n\,dr : mm \pm 2nc^{\mp r:n}\,dr : mm$, l'on aura dy ou $\sqrt{(dr^2 - dx^2)} = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm r:n} - 4nnc^{\pm 2r:n})} : nm$; & ainſi $y = \int dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm r:n} - 4nnc^{\pm 2r:n})} : mm$. Et comme l'on a de plus $x = (-2nn \mp 2nr + 2nnc^{\pm r:n}) : mm$, l'on aura les deux valeurs de x & y, en ſupoſant les quadratures & les logarithmes, pour une indéterminée r qu'on prendra.

Ayant donc décrit ſur l'axe commun AF les deux courbes AB & CD, telles que prenant l'abſciſſe $AE = r$, l'on ait l'appliquée

pliquée BE $= (\pm n \mp 2nc^{\pm r:n}) : mm$, & l'autre ED $=$ $\surd(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm r:n} - 4nnc^{\pm 2r:n}) : mm$; les aires ABE & ACDE diviſées par une ligne arbitraire L, donneront les coordonnées de la Courbe que l'on cherche; ſavoir ABE: $L = x$, & ACDE: $L = y$. TAB. XLVII. N°. CXXXIX. *Fig.* 1.

X.

SCHOLIE. m marquant un multiplie quelconque arbitraire de l'angle droit, notre ſolution donnera toujours une infinité de Tautochrones particulières, ſelon la diverſité infinie de m: ce qu'on voit aſſez, puiſque dans le cas même, où $m = \infty$, l'on trouve encore une Tautochrone, qui eſt la Tractoire de M. HUIGENS [§. 8.] Au reſte, l'on tire de nôtre Solution generale pluſieurs autres Problèmes utiles & curieux, comme ceux-ci.

XI.

PROBLEME II.

La longueur d'un Arc total quelconque deſcendu, dans l'hypothèſe que nous avons priſe d'une réſiſtance proportionnelle au quarré de la viteſſe, étant donnée; trouver la longueur de l'arc total remonté qui le ſuit immédiatement.

SOLUTION.

Puiſque nous avons trouvé pour la deſcente [§. 4.] $vv = 2gAc^{2r:n} - 2gc^{2r:n}\int c^{-2r:n}dx$, & $\int c^{-2r:n}dx =$ [§. 6.] $\frac{1}{mm}(-nc^{-r:n}+n)^2 = \frac{nn}{mm}(c^{-2r:n} - 2c^{-r:n} + 1)$; l'on aura $vv = 2gAc^{2r:n} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{+r:n} + c^{+2r:n})$. Supoſant maintenant l'Arc total deſcendu $= a$, il faut qu'au commencement de la deſcente, vv ſoit $= 0$; c'eſt pourquoi

Digitized by Google

il faut faire $2gAc^{2r:n} = \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{\mp r:n} + c^{2r:n})$; d'où l'on tire $A = \frac{nn}{mm}(c^{-2r:n} - 2c^{-r:n} + 1) =$ [lorſque r devient $= a$] $\frac{nn}{mm}(c^{-2a:n} - 2c^{-a:n} + 1) = \frac{nn}{mm}(1 - c^{-a:n})^2$. Et puiſqu'au point le plus bas de la deſcente, lorſque $r = 0$, $\int c^{-2r:n} dx$ s'évanouït, l'on aura vv, ou le quarré de la viteſſe finale du mobile deſcendant $= 2gAc^{2r:n} =$ [à cauſe de $r = 0$] $2gA =$ [à cauſe de $A = \frac{nn}{mm}(1 - c^{-a:n})^2$] $\frac{2nng}{mm}(1 - c^{-a:n})^2$. Je trouve par un raiſonnement ſemblable, en prenant les ſignes inférieurs, & nommant l'arc total remonté b, le quarré de la viteſſe initiale du mobile remontant $= \frac{2nng}{mm}(c^{b:n} - 1)^2$. Mais la viteſſe finale du mobile deſcendant eſt la même que la viteſſe initiale du mobile remontant; d'où il ſuit que $1 - c^{-a:n} = c^{b:n} - 1$, & $c^{b:n} = 2 - c^{-a:n} = 2 - 1 : c^{a:n} = (2c^{a:n} - 1) : c^{a:n}$; prenant les logarithmes du premier & du dernier, l'on a $b : n = l(2c^{a:n} - 1) - a : n$; d'où enfin l'on a $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a$.

XII.

SCHOLIE. La valeur de b qu'on vient de trouver, a toujours lieu pour quelque valeur de n que ce ſoit; mais ſi $n = \infty$, c'eſt-à-dire, ſi la réſiſtance eſt infiniment petite ou nulle, l'on devroit trouver $b = a$, parce que le mobile dans le vuide remonte auſſi haut qu'il étoit deſcendu, & l'arc total remonté dans la Cycloïde [qui eſt la Tautochrone dans le vuide,] doit être égal à l'Arc total deſcendu précédent. Cependant nôtre expreſſion ne paroit pas donner $b = a$, car

$nl(2c^{a:n} - 1) - a$ devient $\infty\, l(2c^{a:\infty} - 1) - a =$ $\infty\, l(2c^{0} - 1) - a = \infty\, l(2 - 1) - a = \infty\, l(1) - a =$ $\infty \times 0 - a$, ce qui ne fait rien connoitre de déterminé; puiſque $\infty \times 0$, ou le produit de l'infini par un infiniment petit, peut exprimer une quantité quelconque. Pour réſoudre cette difficulté, j'ai deux moyens, l'un indirect, l'autre direct, de faire voir que $nl(2c^{a:n} - 1) - a$ devient effectivement $= a$, lorſque $n = \infty$. En me ſervant du premier moyen, je ſuposerai $b = a$, & chercherai enſuite ce qu'il faut prendre pour n, afin que la valeur de b, $nl(2c^{a:n} - 1) - a$, devienne $= a$: pour cela je fais $a = nl(2c^{a:n} - 1) - a$; d'où l'on a $2a = nl(2c^{a:n} - 1)$; & paſſant des logarith. aux nombres, j'ai $c^{2a} = (2c^{a:n} - 1)^n$ ou $c^{2a:n} = 2c^{a:n} - 1$, qui eſt une équation quarrée, dont la racine extraite à l'ordinaire, donne $c^{a:n} = 1 \pm \surd(1 - 1) = 1 \pm 0$, & prenant les logarithmes, l'on a $a:n = l\,1 = 0$, donc $n = \infty$: d'où il ſuit que dans le cas où $n = \infty$, l'on aura b ou $nl(2c^{a:n} - 1) - a = a$.

XIII.

Par le moyen direct, voici ce que je fais; de la quantité $nl(2c^{a:n} - 1)$ je fais cette fraction $l(2c^{a:n} - 1):(1:n)$ qui lorſque $n = \infty$ devient $\frac{0}{0}$: c'eſt une fraction dont les deux termes s'évanouïſſent; il faut donc chercher ſa valeur par la régle donnée dans *l'Anal. des Infin. petits*, art. 163 *, en conſiderant n comme variable, & diviſant la differentielle du numerateur par la differentielle du dénominateur; ce qui étant fait, l'on aura $dl(2c^{a:n} - 1)$ diviſé par $d(1:n)$, c'eſt-à-dire $-2c^{a:n}dn.a:(2nnc^{a:n} - nn)$ diviſé par $-dn:nn$; d'où il vient $2c^{a:n}a:(2c^{a:n} - 1) =$ [en ſubſtituant ∞ pour n]

* N°. LXXI. pag. 401. *Tom. I.*

Digitized by Google

n] $2a : (2 - 1) = 2a$; d'où je conclus que lorſque $n = \infty$ l'on aura $nl(2c^{a:n} - 1) = 2a$, & qu'ainſi $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a = 2a - a = a$.

X I V.

P R O B L E M E III.

Trouver le lieu de la plus grande viteſſe dans un Arc total quelconque de deſcente.

S O L U T I O N.

Puiſque [§. 11] $vv = 2gAc^{2r:n} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{r:n} + c^{2r:n}) =$ [ibid.] $\frac{2nng}{mm}(1 - c^{-a:n})^2 c^{2r:n} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{r:n} + c^{2r:n})$; qui étant diviſé par la quantité conſtante $2nng : mm$, donnera $c^{2r:n}(1 - c^{-a:n})^2 - (1 - c^{r:n} + c^{2r:n})$, qui doit être un *Maximum*, il faut donc faire ſa differentielle $= 0$, & l'on aura $\frac{2}{n} c^{2r:n} dr (1 - c^{-a:n})^2 + \frac{2}{n} c^{r:n} dr - \frac{2}{n} c^{2r:n} dr = 0$, ou diviſant par $\frac{2}{n} c^{r:n} dr$, l'on aura $c^{r:n}(1 - c^{-a:n})^2 + 1 - c^{r:n} = 0$, d'où l'on tirera par la réduction & le ſecours des logarithmes, $r = 2a - nl(2c^{a:n} - 1)$. Si donc d'un arc total $= a$, l'on retranche depuis le point le plus bas, une partie $= 2a - nl(2c^{a:n} - 1)$; l'on aura le point de la plus grande viteſſe.

X V.

Coroll. I. L'Arc intercepté entre le commencement de la deſcente & le point de la plus grande viteſſe, $= a - 2a + nl$

$+ nl(2c^{a:n}-1) = nl(2c^{a:n}-1)-a$. D'où l'on voit [§. 11.] que cet arc, depuis le commencement de la deſcente juſqu'au lieu de la plus grande viteſſe, eſt égal à l'arc remonté ſuivant.

X V I.

Coroll. II. Ajoutant l'arc commun compris entre le point le plus bas & le lieu de la plus grande viteſſe, l'on aura l'arc total deſcendu, égal à l'arc compris entre le point de la plus grande viteſſe, & le point où le mobile ceſſe de remonter: c'eſt-à-dire, que le mobile, après qu'il eſt parvenu à ſa plus grande viteſſe en deſcendant, a encore à parcourir juſqu'à-ce qu'il ceſſe de remonter, un chemin égal à celui qu'il a parcouru depuis le commencement de ſa deſcente juſqu'au point le plus bas.

X V I I.

Coroll. III. Puiſque [§. 11] l'arc total remonté, ou $b = nl(2c^{a:n}-1)-a$; l'on aura la ſomme de l'arc total deſcendu & de l'arc total remonté, ou $a+b = nl(2c^{a:n}-1)$ & ſa moitié $(a+b):2 = \frac{1}{2}nl(2c^{a:n}-1)$; on voit de là que le point qui partage en deux également l'arc entier deſcendu & remonté, eſt éloigné du point le plus bas, d'un arc $= a - \frac{1}{2}nl(2c^{a:n}-1)$. Mais puiſque l'arc deſcendu depuis le commencement juſqu'au point de la plus grande viteſſe eſt $= nl(2c^{a:n}-1)-a$, la diſtance de ce point au point le plus bas ſera $= a - nl(2c^{a:n}-1)+a = 2a - nl(2c^{a:n}-1)$; d'où il ſuit que le point de la plus grande viteſſe eſt deux fois plus éloigné du point le plus bas, que ne l'eſt de ce même point, le point qui partage en deux également l'arc compoſé de l'arc deſcendu & de l'arc remonté.

XVIII.

CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DES DEUX PROBLEMES PRECEDENS

TAB. XLVII. N°. CXXXIX *Fig. 2.* Entre deux aſymptotes AB, AC, perpendiculaires l'une à l'autre, ſoit décrite l'Hyperbole équilatére GDH, telle qu'ayant pris $AO = n$, l'apliquée OD ſoit $= 1$. Soient priſes de l'un & de l'autre côté de O, les parties égales OE, OF, & par les points E & F ſoient tirées les apliquées EG, FH, paralleles à l'autre aſymptote AC. Je dis que les Aires ODGE & ODHF ſont proportionnelles aux Arcs entiers deſcendus & remontés, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait $ODGE = a \times OD$, l'aire ODHF ſera $= b \times OD$.

DEMONSTRATION.

D'un point quelconque K, ſoit menée l'apliquée KL, & ſoit apellée OK, z, l'on aura par la nature de l'hyperbole, $KL = n : (n - z)$, & partant l'aire $OKLD = \int(ndz : (n - z)) = nl(n : (n - z))$, & l'aire entiere $OEGD = nl(n : (n - OE))$. L'on trouve de même $OFHD = nl((n + OF) : n)$ Prenant donc l'aire $OEGD = a \times OD = a \times 1 = a$, l'on aura $nl(n : (n - OE)) = a$. De là repaſſant aux nombres, l'on aura $(n : (n - OE))^n = c^a$, ou $n : (n - OE) = c^{a:n}$; d'où l'on tire OE, ou $OF = n - nc^{-a:n}$, qui étant ſubſtitué pour OF dans $nl((n + OF) : n)$, l'on a l'aire $OFHD = nl((2n - nc^{-a:n}) : n) = nl(2 - c^{-a:n}) = nl((2c^{a:n} - 1) : c^{a:n}) = nl(2c^{a:n} - 1) - a$. Or nous avons montré dans l'analyſe précédente [§. 11] que cette expreſſion étoit celle de b; donc l'aire $OFHD = b = b \times 1 = b \times OD$.

XIX.

Digitized by Google

XIX.

LEMME,

Qui ſert à déterminer la plus grande viteſſe.

Si du centre O, *& d'un rayon quelconque* OE, *moindre que* OA, *l'on décrit un demi-cercle* ERF, *à la circonférence duquel l'on prolonge l'ordonnée* LK, *le rectangle* LK × KR *ſera proportionnel à la viteſſe qu'aura le mobile, après qu'il ſera deſcendu depuis le commencement d'un arc total exprimé par l'aire* EGLK.

DEMONSTRATION.

Car ayant pris, comme nous avons fait ci-deſſus, l'aire OEGD, où l'arc total $= a$, l'on a trouvé OE $= n - nc^{-a:n}$ Si donc l'on fait, de la même maniere, l'aire OKLD, ou l'arc qui reſte a parcourir, $= r$, l'on aura OK $= n - nc^{-r:n}$. Et ainſi KL $=$ AO × OD: AK $= c^{r:n}$, & KR $= \sqrt{(OE^2 - OK^2)} = n\sqrt{(2c^{-r:n} - 2c^{-a:n} - c^{-2r:n} + c^{-2a:n})}$: Si l'on multiplie KL par KR, l'on aura LK × KR $= nc^{r:n} \sqrt{(2c^{-r:n} - 2c^{-a:n} - c^{-2r:n} + c^{-2a:n})}$, dont le quarré $= 2nnc^{r:n} - 2nnc^{(2r-a):n} - nn + nnc^{(2r-2a):n}$, diviſé par nn, donne $2c^{r:n} - 2c^{(2r-2a):n} - 1 + c^{(2r-2a):n}$. Mais il eſt facile de voir que cette quantité eſt $= c^{2r:n}(1 - c^{-a:n})^2 - (1 - 2c^{r:n} + c^{2r:n})$, ce que nous avons fait voir dans la ſolution précédente [§. 14] être proportionnel à vv ou au quarré de la viteſſe. Donc LK × KR eſt proportionnel à la ſimple viteſſe.

X X.

L'on voit par-là que pour déterminer le lieu de la plus grande viteſſe, il n'eſt queſtion que de tirer entre l'hyperbole & le cercle, la ligne L K R, enſorte que LK × KR ſoit le plus grand de tous les rectangles pareils: ce qui étant fait, l'arc total deſcendu ſera à l'arc compris entre le point le plus bas & le point de la plus grande viteſſe, comme l'aire EGDO à l'aire KLDO. Or il eſt évident que le plus grand de tous les rectangles LK × KR eſt celui qui ſe fait lorſque la ſoutangente de l'hyperbole pour L & la ſoutangente du cercle pour R ſont égales. Mais la ſoutangente de l'hyperbole eſt égale à l'abſciſſe AK, par la nature de l'hyperbole: Donc la même AK doit être auſſi la ſoutangente du cercle pour le point R. On tire de-là une conſtruction facile & élégante. Du centre de l'Hyperbole A, ſoit tirée AR tangente au cercle, & du point d'attouchement R ſoit abaiſſée la perpendiculaire RKL; elle partagera l'aire EGDO, qui repréſente l'arc total, en deux aires GEKL & LKOD, en même raiſon que le point de la plus grande viteſſe partage l'arc total.

X X I.

Coroll. I. On voit de-là tout d'un coup, ſans aucun calcul, pourquoi, lorſque $n = \infty$, b devient $= a$; c'eſt-à-dire, pourquoi, dans un milieu qui ne réſiſteroit point, l'arc total remonté doit être égal à l'arc total deſcendu. Car n, ou AO, étant infini, l'arc hyperbolique GDH peut paſſer pour une droite parallèle à l'Aſymptote AB, & l'aire ODHF $=$ EGDO; c'eſt-à-dire, $b = a$. L'on voit auſſi que la tangente AR, tirée d'une diſtance infinie, peut paſſer pour parallèle au diamétre du Cercle EF, & que partant RL paſſera par le centre O, & ſe confondra avec OD. D'où l'on voit que, dans ce cas, le lieu de la plus grande viteſſe eſt le point

point le plus bas, comme il doit arriver dans la Cycloïde, qui eſt la Tautochrone dans le vuide.

XXII.

Coroll. II. Puiſque nous avons trouvé ci-deſſus [§. 15] que l'arc deſcendu, pris depuis le commencement juſqu'au point de la plus grande viteſſe, eſt égal à l'arc total remonté; il ſuit de là que l'aire EGLK eſt égale à l'aire DOFH; & qu'ainſi AE : AK = AO : AF. Ce qu'on voit d'ailleurs; puiſque la tangente AR eſt moyenne proportionnelle tant entre AE & AF, qu'entre AK & AO; comme il eſt clair par la nature du cercle.

XXIII.

SCHOLIE. Voici quelque choſe d'utile & de digne de remarque ſur notre Courbe tautochrone: c'eſt de déterminer juſqu'à quelle hauteur elle peut s'élever, ou quel peut être le plus grand arc total deſcendu; car il eſt certain que cette Courbe, à prendre ſon commencement au point le plus bas, loin de s'élever à une diſtance infinie, doit au contraire ſe terminer, & redeſcendre enſuite par une eſpèce de pointe ou point de rebrouſſement, comme on ſait qu'il arrive à la Cycloïde elle même, qui eſt la Tautochrone dans le cas d'une réſiſtance nulle ou infiniment petite. En effet ſi quelque Tautochrone s'étendoit à l'infini, l'on voit aſſez que le tems de la deſcente par un arc infiniment long ne pourroit pas être fini & déterminé, contre l'hypothèſe; car une viteſſe toujours finie dans un tems fini, ne ſauroit faire parcourir un eſpace infini. Afin donc que nous trouvions juſqu'où nôtre Tautochrone doit s'élever, & que nous déterminions le point où commence le plus grand arc poſſible de deſcente, ou le point de rebrouſſement; voici comme je raiſonne: Puiſque l'on a trouvé ci-deſſus [§. 9] $dy = dr \sqrt{} (m^4 - 4nn + 8nnc^{r:n}$

 —

$-4nnc^{2r:n}$): mm, l'on voit d'abord qu'au point le plus bas, lorſque $r=0$, $dy=dr$: ce qui fait voir que l'axe eſt perpendiculaire à la Courbe, comme il doit arriver; autrement ce ne ſeroit pas le point le plus bas: mais enſuite en s'éloignant de ce point, la raiſon de dy à dr décroit juſqu'à ce qu'elle devienne nulle, ce qui arrive lorſque la Courbe eſt perpendiculaire à l'apliquée. Je dis maintenant que la Courbe ne s'étend pas au de-là de ce point, & qu'ainſi c'eſt le point le plus élevé, car ſi la Courbe s'élevoit d'avantage, $4nn-8nnc^{r:n}+4nnc^{2r:n}$ ſeroit plus grand que m^4, & partant dy ou $dr\sqrt{}(m^4-4nn+8nnc^{r:n}-4nnc^{2r:n})$ ſeroit imaginaire ou impoſſible; donc afin que dy ſoit $=0$, ce qui termine le plus grand arc, il faut que m^4 ſoit $=4nn-8nnc^{r:n}+4nnc^{-2r:n}$; ou extrayant la racine, il faut que mm ſoit $=2nc^{r:n}-2n$; d'où l'on tire $(mm+2n):2n=c^{r:n}$, & prenant les logarithmes, $l((mm+2n):2n)=r:n$; c'eſt-à-dire, $r=nl((mm+2n):2n)=$ au plus grand Arc poſſible de deſcente qui termine la Courbe.

XXIV.

Coroll. I. Nous avons trouvé en general [§. 6] pour la deſcente, $mmxdr+2nrdr=mmndx$: donc pour le plus grand arc total, lorſque $dy=0$, & qu'ainſi $dx=dr$, l'on aura $mmx+2nr=mnn$, d'où l'on tire $x=(mmn-2nr)$: $mm=$[ſubſtituant pour r ſa valeur] $n-\frac{2nn}{mm}l(\frac{mm-2n}{2n})=$ la plus grande abſciſſe poſſible.

XXV.

Coroll. II. Si $m=\infty$, mais que n ſoit fini, l'on aura r ou $nl((mm+2n):2n)=\infty$; mais $\frac{2nn}{mm}l(\frac{mm+2n}{2n})=0$. Donc

x ou la plus grande abſciſſe $= n$, ce qui convient à la Tractoire.

XXVI.

Coroll. III. Si au contraire m eſt fini, mais n infini ; ce qui eſt le cas de la Tautochrone ordinaire dans le vuide ; l'on aura $r = \infty \, l \, 1 = \infty \times 0$; ce qui ne donne rien de déterminé : il faut donc encore ſe ſervir ici de la Règle *de l'Anal. des infin. petits*, art 163, en conſidérant $nl((mm+2n):2n)$ ſous la forme de cette fraction $l(\frac{mm+2n}{2n}):\frac{1}{n}$, dont la differentielle du numerateur, diviſée par la differentielle du dénominateur, donne cette autre fraction $mmn:(mm+2n) =$ [lorſque $n = \infty$] $\frac{1}{2}mm$.

XXVII.

Coroll. IV. Dans ce même cas la plus grande abſciſſe $n - \frac{2nn}{mm} l(\frac{mm+2n}{2n})$ devient $\infty - \frac{2\infty^2}{mm} l 1 = \infty - \frac{2\infty^2}{mm} \times 0$; ce qui encore ne détermine rien : il faut donc, afin d'y pouvoir apliquer la règle dont on s'eſt déja ſervi, l'exprimer ſous la forme de cette fraction $(\frac{1}{n} - \frac{2}{mm} l(\frac{mm+2n}{2n})):(\frac{1}{nn})$, & l'on trouve, en operant bien, $x = \frac{1}{4}mm$; enſorte que le plus grand arc eſt double de la plus grande abſciſſe, comme il arrive dans la Cycloïde, où le plus grand arc, depuis le point le plus bas, eſt double du diamétre du Cercle generateur. Ce qui confirme merveilleuſement nôtre Méthode.

XXVIII.

PROBLE'ME IV.

La longueur d'un Arc remonté quelconque étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total deſcendu qui l'a précedé.

SO-

Digitized by Google

SOLUTION.

On peut ſe ſervir ici de la Méthode que nous avons employée dans la ſolut. du *Probl.* 2. [§. 11] en prenant les ſignes inférieurs dans l'expreſſion du quarré de la viteſſe vv, & operant enſuite, comme l'on a fait, avec les changemens néceſſaires. Mais on parviendra plus facilement au but, ſi l'on fait à l'équation que l'on a trouvée pour la longueur de l'arc remonté [§. 11] $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a$, les changemens néceſſaires, afin d'avoir la valeur de a exprimée par b; ce que je fais ainſi. Puiſque $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a$, l'on aura $a + b = nl(2c^{a:n} - 1)$ ou $(a+b):n = l(c^{a:n} - 1)$, & paſſant des logarith. aux nomb. l'on a $c^{(a+b):n} = 2c^{a:n} - 1$; diviſant maintenant par $c^{a:n}$, il vient $c^{b:n} = 2 - c^{-a:n}$ & repaſſant aux logarithmes, l'on aura $b:n = l(2 - c^{-a:n})$ d'où l'on tire $b = nl(2 - c^{-a:n})$, & ainſi l'on trouve b autrement & plus ſimplement que l'on n'a fait [§. 11]. Mais comme c'eſt ici a que l'on cherche, je tranſpoſe $c^{b:n}$ & $c^{a:n}$ en changeant les ſignes, & j'aurai $c^{-a:n} = 2 - c^{b:n}$, & prenant les logarithmes $-a:n = l(2 - c^{b:n})$ d'où l'on tire $a = -nl(2 - c^{b:n})$ ou, ce qui revient au même, $a = nl(1:(2 - c^{b:n}))$.

XXIX.

Puiſque $a = nl(1:(2 - c^{b:n}))$ & $b = nl(2 - c^{-a:n})$, l'on aura $a + b = nl((2 - c^{-a:n}):(2 - c^{b:n}))$; mais par §. 11, l'on a auſſi $a + b = nl(2c^{a:n} - 1)$; donc $2c^{a:n} - 1 = (2 - c^{-a:n}):(2 - c^{b:n})$; & l'on a, en réduiſant, $4c^{a:n} - 2c^{(a+b):n} + c^{b:n} + c^{-a:n} = 4$. L'on peut donc trou-

trouver, en rétrogradant, par cette Equation exponentielle, quoique fort compoſée, a par b, & réciproquement b par a, ce qui ſeroit peut-être fort difficile à trouver à priori.

XXX.

Scholie. Par ce que nous avons démontré [§. 23] l'on pourra encore déterminer le plus grand arc poſſible remonté, comme auſſi la plus grande abſciſſe qui lui convient. Cela ſe peut par le moyen de l'équation trouvée [§. 11] $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a$; ou de cette autre équivalente dont nous venons de parler, $b = nl(2 - c^{-a:n})$, ſubſtituant dans l'une ou dans l'autre pour a ce qu'on a trouvé ci-deſſus [§. 23] $nl((mm + 2n):2n)$ pour le plus grand arc deſcendu; car l'on aura b, ou le plus grand arc remonté [en ſe ſervant de la derniére formule] $= nl(2 - c^{-l((mm+2n):2n)})$. Mais cette expreſſion étant embaraſſée & peu élegante, à cauſe de l'expoſant logarithmique contenu ſous un autre ſigne logarithmique; voici une maniere particuliére de la réduire à une expreſſion logarithmique ſimple & ordinaire. Je fais ... $2 - c^{-l((mm+2n):2n)} = z$, partant $c^{-l((mm+2n):2n)} = 2 - z$, & leurs logarith. $-l((mm+2n):2n) = l(2-z)$ d'où repaſſant aux nombres, à la maniere ordinaire, l'on aura $2n:(mm+2n) = 2 - z$; donc $z = (2mm + 2n):(mm + 2n)$ & $2 - c^{-l((mm+2n):2n)} = (2mm + 2n):(mm + 2n)$, & $nl(2 - c^{-l((mm+2n):2n)}) = nl(\frac{2mm+2n}{mm+2n}) =$ au plus grand arc total remonté.

XXXI.

Coroll. L'on peut par-là trouver la plus grande longueur de toute la Tautochrone, c'eſt-à-dire, celle que le mobile peut parcourir pendant une oſcillation entiere, en deſcen-

Digitized by Google

dant & remontant enſuite. Car le plus grand arc total deſcendu étant $= nl((mm + 2n) : 2n)$, & le plus grand arc total remonté immédiatement aprés, étant $= nl((2mm + 2n) : (mm + 2n))$, leur ſomme $nl((mm + 2n) : 2n) + nl((2mm + 2n) : (mm + 2n))$, qui étant reduite, donne $nl((mm + n) : n)$ ſera égale à la plus grande longueur de la Tautochrone, qui puiſſe être parcourue par le mobile en deſcendant & remontant conſécutivement.

XXXII.

Quant à la plus grande abſciſſe x, qui répond au plus grand arc remonté; il faut remarquer qu'il n'eſt plus permis de ſuppoſer $dx = dr$, comme nous avons fait pour la deſcente [§. 24]: car le plus grand arc remonté n'eſt point abſolument le plus grand, mais ſeulement rélativement au plus grand arc deſcendu, par lequel le mobile parvenant au point le plus bas, remonte enſuite auſſi haut que le lui permet la viteſſe qu'il avoit acquiſe au point le plus bas; mais ce n'eſt pas à dire pour cela que quelque force externe, indépendamment de la force de la chute, imprimant au mobile une plus grande viteſſe que celle qu'il acquiert en deſcendant librement par le plus grand arc de deſcente, ne pût le faire remonter plus haut, & partant ne pût lui faire décrire un arc plus long. Il faut donc diſtinguer le cas où le mobile remonte librement par la ſeule force qu'il a acquiſe en deſcendant, & celui où le mobile remonte pouſſé par quelque force étrangére, qui agiroit ſur lui au point le plus bas de la Tautochrone, quand même il ne ſeroit point deſcendu. Ici donc nous entendons le plus grand arc remonté librement, dont nous cherchons l'abſciſſe x, ou la plus grande hauteur verticale à laquelle le mobile puiſſe s'élever, après être deſcendu par le plus grand arc. Pour cela je prends l'Equation trouvée [§. 6] avec les ſignes inférieurs, $mmx = 2nn + 2nr + 2nnc^{-r:n}$, dans laquelle, à la place de r, j'écris le plus grand arc

arc total remonté librement, qui [§. 30] eſt $= nl((2mm+2n):(mm+2n))$ & j'aurai $mmx = -2nn + 2nnl((2mm+2n):(mm+2n)) + 2nnc^{-l((2mm+2n):(mm+2n))}$ = [parce que comme nous avons vû §. 30. $c^{-l((2mm+2n):(mm+2n))} = (mm+2n):(2mm+2n)$] $= -2nn + 2nnl((2mm+2n):(mm+2n)) + (mmnn+2n^3):(mm+n)$ = [après la réduction] $2nnl((2mm+2n):(mm+2n)) - mmnn:(mm+n)$: donc $x = \frac{2nn}{mm}l((2mm+2n):(mm+2n)) - nn:(mm+n)$.

XXXIII.

Puiſque pour la deſcente, la plus grande abſciſſe [§. 24] $= n - \frac{2nn}{mm}l((mm+2n):2n)$; ſi l'on en retranche la plus grande abſciſſe pour l'aſcenſion libre, le reſte ſera la quantité, dont la hauteur de laquelle eſt deſcendu le corps, ſurpaſſe la hauteur à laquelle il eſt remonté; & cette différence ſera $= (mmn+2nn):(mm+n) - \frac{2nn}{mm}l((mm+n):n)$; qui s'évanouït, lorſque $n = \infty$, comme on le trouve par la régle tirée de l'*Anal. des Infin. petits*; & cela doit être ainſi dans la Tautochrone ordinaire pour le vuide, où le mobile deſcend & remonte à la même hauteur.

XXXIV.

Il nous reſte à déterminer auſſi le plus grand arc remonté par une force imprimée au mobile au point le plus bas, c'eſt-à-dire, juſqu'où la Tautochrone s'étend du côté de l'arc remonté avant que de parvenir au point de rebrouſſement, ſi elle en a un, où la Courbe ſe termine & change ſa courbure, comme font les Courbes rebrouſſantes. Pour cela, il nous faut recourir à l'Equation [§. 9] pour l'arc remonté, qui eſt celle-

Digitized by Google

ci, $dy = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{-r:n} - 4nnc^{-2r:n})}:mm$. Afin donc d'avoir le plus grand arc total remonté par une force étrangére, il faut faire $dy = o$, & par conſéquent $m^4 = 4nn - 8nnc^{-r:n} + 4nnc^{-2r:n} = (2n - 2nc^{-r:n})^2$; & extrayant la racine, $mm = 2n - 2nc^{-r:n}$; d'où l'on tire $c^{-r:n} = (2n - mm):2n$; & prenant les logarithmes $-r:n = l((2n - mm):2n)$; ce qui donne $r = -nl((2n - mm):2n)$ où, ce qui eſt la même choſe, $r = nl(2n:(2n - mm))$ = au plus grand arc total remonté par une force étrangére, au-delà duquel la Courbe ne s'étend plus.

XXXV.

Coroll. I. Si l'on prend $mm = 2n$, l'on aura $r = nl(2n:o) = \infty$: dans ce cas dont l'arc remonté devient infiniment long, d'où l'on voit encore que les Tautochrones ſe varient, ſelon la valeur du nombre arbitraire mm.

XXXVI.

Coroll. II. Le plus grand arc remonté par une force étrangére eſt toûjours plus grand que le plus grand arc remonté librement, quel que ſoit le nombre mm, ce que je démontre ainſi; $2n \times (mm + 2n) = 2mmn + 4nn > 2mmn + 4nn - 2m^4 = (2n - mm) \times (2mm + 2n)$; donc $2n:(2n - mm > (2mm + 2n):(mm + 2n)$; & partant auſſi $nl(2n:(2n - mm))$ ou le plus grand arc remonté par une force étrangére, eſt plus grand que $nl((2mm + 2n):(mm + 2n))$ c'eſt-à-dire, plus grand que le plus grand arc remonté librement. [§. 30].

XXXVII.

Enfin il faut trouver la plus grande abſciſſe pour l'arc remonté par une force étrangére, c'eſt-à-dire, celle qui répond au

au point de rebrouſſement de l'arc remonté. Pour cela je me ſers de l'Equation [§. 61], dont je me ſuis déja ſervi [§. 32] pour trouver le plus grand arc remonté librement; ſavoir $mmx = -2nn + 2nr + 2nnc^{-r:n}$, & maintenant j'y ſubſtitue pour r le plus grand arc total remonté par une force étrangére, qui eſt [§. 33] $= nl(2n:(2n-mm))$; ce qui me donnera $mmx = -2nn + 2nnl(2n:(2n-mm)) + 2nnc^{-l(2n:(2n-mm))} = [c^{-l(2n:(2n-mm))}$ étant $= (2n-mm):2n] - 2nn + 2nnl(2n:(2n-mm)) + 2nn - mmn = 2nl(2n:(2n-mm) - mmn)$, d'où l'on tire $x = \frac{2nn}{mm} l(2n:(2n-mm)) - n =$ à la plus grande abſciſſe pour l'arc remonté par une force étrangére.

XXXVIII.

Si $mm = 2n$, l'on aura $x = nl(2n:0) - n = \infty$; d'où il ſuit que le point de rebrouſſement de l'arc remonté, dans le cas $mm = 2n$, eſt infiniment éloigné de l'horizontale tirée par le point le plus bas, c'eſt-à-dire, que l'abſciſſe devient infiniment longue. Et afin que le mobile puiſſe remonter dans la Courbe à cette hauteur infinie, il faut qu'il ait au point le plus bas une viteſſe initiale infinie, c'eſt-à-dire, plus grande qu'aucune viteſſe donnée.

Digitized by Google

N°. CXL.

JOHANNIS BERNOULLI MEDITATIONES DE CHORDIS VIBRANTIBUS,

cum pondusculis æquali intervallo a ſe invicem diſſitis,

Ubi nimirum ex principio virium vivarum quæritur numerus vibrationum chordæ pro una oſcillatione Penduli datæ longitudinis D*.

Comment. Acad. Petrop. Tom. III. pag. 13. TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 1.

CHorda vibrans ACDEF &c. cui ad diſtantias æquales affixa ſunt pondusſcula æqualia, C, D, E, F, &c. in eam ſe componere debet figuram, ut ſingula pondusſcula ſimul perveniant in ſitum rectilineum AB: unde ſequitur, ſingulorum velocitates, adeoque & vires acceleratrices, proportionales eſſe debere longitudinibus percurrendis Cc, Dd, Ee, &c. Sed per principia ſtatica, tenſio chordæ eſt ad vim qua pondusſculum quodvis, exempli gratia, E, urgetur verſus e, ut ſinus anguli DEe ad ſinum anguli DEF, vel IEF, id eſt, [ob figuram chordæ fere rectam, & pondusſculorum intervalla æqualia] ut ſinus totus ad FI. Ergo, *ex æquo*, diſtantiæ Cc, Dd, Ee, &c. proportionales ſunt ipſis DG, EH, FI, &c. reſpective. Jam DG = Gd — Dd = 2Cc — Dd = $2a - x$; HE = He — Ee = 2Dd — Cc — Ee = $2x - a - y$; FI = If — Ff = 2Ee — Dd — Ff = $2y - x - z$; &c. unde $2a - x : a = 2x - a - y : x = 2y - x - z : y = 2z - y - t : z =$ &c. Hinc ſequentia fluunt Lemmata.

* Confer Num. CXXXVII, pag. 125, 126.

I. Si

TAB. XLVII. Nº. CXL.

I. Si duo ſint ponduſcula, erit $x = a$, $y = 0$, reliqua non conſiderantur.

Fig. 3. *Fig.* 4.

II. Si tria ſint ponduſcula, erit $y = a$, $z = 0$, reliquis non conſideratis; adeoque $2a - x : a = 2x - 2a : x$, unde $2ax - xx = 2ax - 2aa$ & $x = a\sqrt{2}$.

Fig. 5.

III. Si quatuor ſint ponduſcula, erit $y = x$, $z = a$, & $t = 0$, non conſideratis reliquis; adeoque $2a - x : a = x - a : x$; unde $2ax - xx = ax - aa$ & $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

IV. Si quinque ſint ponduſcula, erit $z = x$, $t = a$, $u = 0$; reliquis neglectis; adeoque $2a - x : a = 2x - a - y : x = 2y - 2x : y$; hinc duæ æquationes habentur, $xx = aa + ay$, & $yx = 2ax$. Ex priori æquatione eſt $y = (xx - aa) : a$; ex poſteriori, $y = 2a$; unde $x = a\sqrt{3}$.

V. Si ſex ſint ponduſcula, erit $z = y$, $t = x$, $u = a$, $s = 0$, reliquis neglectis; adeoque $2a - x : a = 2x - a - y : x = y - x : y$. Hinc duæ æquationes, $xx = aa + ay$, & $ay - yx = -ax$. Ex poſteriori æquatione $y = ax : (-a + x)$; ex altera $y = (xx - aa) : a$; unde $aax = x^3 - axx - aax + a^3$, ſeu $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$.

VI. Si ſeptem ſint ponduſcula, erit $t = y$, $u = x$, $s = a$, $w = 0$, non attento ad reliqua. Adeoque $2a - x : a = 2x - a - y : x = 2y - x - z : y = 2z - 2y : z$; & ita tres habentur æquationes $xx = aa + ay$, $xy = ax + az$ & $xz = 2ay$. Ex æquatione ſecunda $z = (xy - ax) : a$, ex tertia $z = 2ay : x$; unde $y = axx : (xx - 2a^2)$, & $z = 2a^2x : (x^2 - 2a^2)$ Eſt vero ex æquatione prima $y = (x^2 - a^2) : a$; igitur $(x^2 - a^2) : a = ax^2 : (x^2 - 2a^2)$ unde $aaxx = x^4 - 3aaxx + 2a^4$; ſeu $x^4 - 4aaxx + 2a^4 = 0$; adeoque $xx = 2aa + aa\sqrt{2}$, & $x = a\sqrt{(2 \pm \sqrt{2})}$; $y = a \pm a\sqrt{2}$; $z = (2a \pm 2a\sqrt{2}) : \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})} = \pm a\sqrt{(4 \pm 2\sqrt{2})}$. Ubi notandum ſigna inferiora huc non quadrare.

PROBLEMA I.

Sit nunc chorda vel filum ALB omnis craſſitiei expers; one-

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 2. oneratum in medio ponduſculo L; ſitque filum tenſum a pondere P; quæritur tempus ſemivibrationis per LC. Eſto LC $= a$, AL vel AC $= b$, erit AL — AC $= (AL^2 - AC^2) : (AL + AC) = LC^2 : 2AC = a^2 : 2b$, & ALB — AB $= a^2 : b =$ deſcenſui ponderis P filum tendentis. Sit $z =$ altitudini verticali per quam grave libere deſcendens acquirit velocitatem æqualem illi quam habet punctum L quando pervenit in C, quæ velocitas adeo erit $= \sqrt{z}$. Erit vis viva pondiuſculi L $= Lz =$ vi vivæ ponderis tendentis $= (a^2 : b) \times P$; unde $z = a^2 \times P : b \times L$. Quia vero vis trahens punctum L verſus C ſemper eſt proportionalis diſtantiæ LC; erit, ſupponendo diametrum circuli ad ejus circumferentiam ut 1 ad p, & v velocitatem puncti L in C, tempus per LC ſeu tempus ſemivibrationis $= ap : 2v = ap : 2\sqrt{z} = p\sqrt{b.L} : 2\sqrt{P}$ & tempus unius ſemioſcillationis penduli datæ longitudinis D, $= p\sqrt{\tfrac{1}{2}D}$. Ergo $p\sqrt{\tfrac{1}{2}D}$ diviſum per $p\sqrt{b.L} : 2\sqrt{P}$, hoc eſt, $\sqrt{2P.D} : \sqrt{b.L}$, dabit numerum vibrationum fili durante una oſcillatione penduli $D = \sqrt{4D.P} : \sqrt{AB.L} = 2\sqrt{(D.P : AB.L)}$.

PROBLEMA II.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 3. Sit nunc filum AFGB tenſum a pondere P, & oneratum duobus ponduſculis æqualibus, quorum unumquodque $= \tfrac{1}{2}L$, & quæ dividant filum in tres partes æquales, AF, FG, GB. Sit iterum FC $=$ GE $= a$, & AC $=$ CE $=$ EB $= b$, erit AF — AC $=$ BG — BE $= a^2 : 2b$; adeoque AFGB — AB $= a^2 : b =$ deſcenſui ponderis P. Sit iterum $\sqrt{z} =$ velocitati puncti F in C, vel puncti G in E; erunt vires vivæ ponduſculorum F & G ſimul $= Lz =$ vi vivæ ponderis tendentis $P = (aa : b) \times P$, unde $z = a^2.P : b.L$. Reliqua ergo inveniuntur ut prius, niſi quod jam ponendum ſit pro numero vibrationum $\sqrt{(2D.P : b.L)} = \sqrt{(2D.P : \tfrac{1}{3}AB.L)} = \sqrt{(6D.P : AB.L)}$.

PRO-

PROBLEMA III.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 4.

Sint jam tria pondufcula ſingula $= \frac{1}{3}$ L, erit rurſus $AF - AC = BH - BI = aa : 2b$. Sed $FG - CE = HG - IE =$ [ex Lemm. 2.] $(3aa - 2aa\sqrt{2}) : 2b$. Hinc $AFGHB - AB = (4aa - 2aa\sqrt{2}) : b =$ deſcenſui ponderis P filum tendentis. Erit nunc, vocata $\sqrt{z}$ velocitate puncti F in C, velocitas puncti G in $E = \sqrt{2z}$; unde quantitas virium vivarum omnium pondusculorum ſimul $= \frac{4}{3} z \times L =$ vivæ ponderis tendentis $= (4aa - 2aa\sqrt{2})\, P : b$, adeoque $z = (6aa - 3aa\sqrt{2})\, P : 2bL = (12aa - 6aa\sqrt{2})\, P : AB \times L$, & ſic $\sqrt{z}$, vel $v = \sqrt{((12aa - 6aa\sqrt{2})\, P : AB \times L)}$ & tempus per FC, ſeu $ap : 2v = p\sqrt{AB \times L} : 2\sqrt{(12 - 6\sqrt{2})P}$. Igitur $P\sqrt{\frac{1}{2}D}$ diviſum per $ap : 2v$, hoc eſt, $2\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})\, P \times D} : \sqrt{AB \times L}$, dabit numerum vibrationum fili in una oſcillatione penduli dati D.

PROBLEMA IV.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 5.

Sint pondufcula quatuor, ſingula $= \frac{1}{4}$ L. Supponendo tantiſper $GE = HI = x$, reliquis ut prius manentibus, erit iterum $AF - AC = BK - BM = aa : 2b$; $FG - CE = KH - MI = (xx - 2ax + aa) : 2b$; unde $AFGHKB - AB = (xx - 2ax + 2aa) : b =$ deſcenſui ponderis P. Vocetur velocitas puncti F in $C = \sqrt{z}$, erit velocitas puncti G in $E = \frac{x}{a}\sqrt{z}$; ac proinde ſumma virium vivarum omnium pondufculorum $= \frac{aa + xx}{2aa} \times z \times L =$ vi vivæ ponderis $P = (xx - 2ax + 2aa)\, P : b$; igitur $z = (2aaxx - 4a^3x + 4a^4)\, P : (aa + xx)\, bL$. Quare $\sqrt{z}$ vel $v = a\sqrt{(2xx - 4ax + 4aa)\, P} : \sqrt{(aa + xx)\, bL}$; atque tempus per $FC = ap : 2v = p\sqrt{(aa + xx)\, bL} : 2\sqrt{(2xx - 4ax + 4aa)\, P}$. Ideoque $p\sqrt{\frac{1}{2}D}$ diviſum per $ap : 2v$, hoc eſt, $\sqrt{(4xx - 8ax + 8aa)\, D \times P} : \sqrt{(aa + xx)\, bL} =$ [quia per Lemma III, $x = \frac{1}{2}a + a\sqrt{\frac{5}{4}}$]

$2\surd(5-\surd 5)D\times P:\surd(5+\surd 5)bL = 2\surd(25-5\surd 5)$ $D\times P:\surd(5+\surd 5)AB\times L$, dabit numerum vibrationum fili ſemel oſcillante pendulo D.

PROBLEMA V.

Sint jam quinque ponduſcula, quorum unumquodque $=\frac{1}{5}L$. Supponendo iterum $GE=KM=x$, reliquis ſemper manentibus, erit HI ſeu y [per Lemma IV] $=2a$ & $x=a\surd 3$, & $AF-AC=BN-BO=aa:2b$, $FG-CE=NK-OM=(xx-2ax+aa):2b=(4aa-2aa\surd 3):2b$; $GH-EI=KH-MI=(yy-2yx+xx):2b=(7aa-4aa\surd 3):2b$; quocirca $AFGHKNB-AB=(12aa-6aa\surd 3):b=$ deſcenſui ponderis P. Eſt autem, ſumta $\surd z$ pro velocitate puncti F in C, velocitas puncti G in $E=\surd 3z$, & velocitas puncti H in $I=2\surd z$. Per conſequens aggregatum virium vivarum omnium ponduſculorum $=\frac{12}{5}z\times L=$ vi vivæ ponderis tendentis $P=(12aa-6a^2\surd 3)P:b$; proinde $z=(10aa-5a^2\surd 3)P:2b\times L=(30a^2-15aa\surd 3)P:AB\times L$; & ita $\surd z$ vel $v=a\surd(30-15\surd 3)P:\surd AB\times L$, unde tempus per FC ſeu $ap:2v=p\surd AB\times L:2\surd(30-15\surd 3)P$. Ideoque $p\surd\frac{1}{2}D$ diviſum per $ap:2v$, hoc eſt $\surd(60-30\surd 3)D\times P:\surd AB\times L$, dabit numerum vibrationum fili durante una oſcillatione penduli D.

PROBLEMA VI.

Sunto ponduſcula ſex, quorum ſingula $=\frac{1}{6}L$. Poſitis nunc $GE=NO=x$, $HI=KM=y$; erit $AF-AC=BR-BS=a^2:2b$; $FG-CE=RN-OM=(xx-2ax+aa):2b$; $GH-EI=NK-OM=(yy-2xy+xx):2b$; propterea $AFGHKNRB-AB=(2xx-2ax+2aa+yy-2yx):b=$ deſcenſui ponderis P. Eſt vero ſumta $\surd z$ pro velocitate puncti F in C, velocitas puncti G in $E=x\surd z:a$, & velocitas puncti H in $I=y\surd z:a$; unde ſumma virium vivarum omnium ponduſculorum $=(aa+xx+yy)z\times L:3aa=$

vi

vi vivæ ponderis tendentis $P = (2xx - 2ax + 2aa + yy - 2yx) P : b$, & ideo $\sqrt{z} = \sqrt{(6aaxx - 6a^3x + 6a^4 - 3aayy - 6aayx)} P : \sqrt{(aa + xx + yy)} b L = v$. Hinc tempus per $FC = ap : 2v = ap\sqrt{(aa + xx + yy)} bL : 2\sqrt{(6aaxx - 6a^3x + 6a^4 - 3aayy - 6aayx)} P$. Idcirco $p\sqrt{\frac{1}{2}} D$ diviſum per $ap : 2v$, hoc eſt $\sqrt{(12aaxx - 12a^3x + 12a^4 + 6aayy - 12aayx)} D \times P : a\sqrt{(aa + xx + yy)} b L =$ [ob Lemma V, ubi $y = ax : (-a + x)$ & $y = (xx - aa) : a$; indeque $yy = xx + ax$] $\sqrt{(18aaxx + 6a^3x + 12a^4 - 12ax^3)} D \times P : a\sqrt{(aa + 2xx + ax)} b L = \sqrt{(126axx + 42aax + 84a^3 - 84x^3)} D \times P : a\sqrt{(a^3 + 2axx + aax)} AB \times L =$ [ob Lemma V, $x^3 = axx + 2aax - a^3$] $\sqrt{(42axx - 126aax + 168a^3)} D \times P : \sqrt{(a^3 + 2axx + aax)} AB \times L = \sqrt{(42xx - 126ax + 168aa)} D \times P : \sqrt{(2xx + ax + aa)} AB \times L$ dabit numerum vibrationum fili oſcillante ſemel pendulo dato D, poſteaquam pro x ſubſtitutus fuerit ejus valor, qui eſt radix hujus æquationis $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$.

Solutiones eorundem Problematum ex principiis Staticis.

LEMMA I.

Sit vis gravitatis naturalis g, qua corpora naturaliter animantur, hoc eſt, ad deſcenſum urgentur. Sit x altitudo per quam deſcendit, v velocitas in fine deſcenſus, t tempus deſcenſus, M maſſa ponderis P; erit $M \times g = P$; $gdx : v = dv$, adeoque $\sqrt{2gx} = v$.

LEMMA II.

$dx : v = dt = dx : \sqrt{2gx}$; adeoque $t = \sqrt{2x} : \sqrt{g}$.

LEMMA III.

Quia alibi demonſtratum, tempus deſcenſus naturalis per diametrum alicujus circuli ad tempus ſemioſcillationis in cycloï-

de æque altæ cum circulo ut $1 : \frac{1}{2}p = 2 : p$; erit tempus ſemi-oſcillationis penduli datæ longitudinis D, $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$; eſt enim per Lemma præcedens, tempus deſcenſus per diametrum $= \sqrt{D} : \sqrt{g}$.

LEMMA IV.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 6. Tendat punctum F ad C, viribus quæ ſunt proportionales diſtantiis FC; demonſtratum eſt, undecunque punctum F incipiat moveri, æqualibus ſemper temporibus percurrere diſtantiam FC. Sit itaque vis qua in qualibet diſtantia urgetur $= f \times FC$ [per f intelligo parametrum illius vis, ut vis abſolute ſumta augeri & minui poſſit]: His poſitis, ſit diſtantia FC a puncto quietis ſumta $= a$, pars quælibet FO $= x$, erit $f \times (a - x)\, dx : v = dv$; adeoque $v = \sqrt{f.\,(2ax - xx)}$ hinc $dt = dx : \sqrt{f(2ax - xx)}$, atque $t = \frac{1}{\sqrt{f}} \int \frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ Ergo tempus per totam FC, $= p : 2\sqrt{f}$.

PROBLEMA I.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 2. Producatur AF in ſecunda figura & ſequentibus. Vis ponderis P eſt ad vim qua punctum F verſus C urgetur, ut ſinus anguli AFC ad ſinum ang. VFB = ſin. ang. AFC : ſin. dupli ang. FAC = [quia FAC pro infinite parvo habetur] AC : 2FC $= b : 2a$, adeoque vis qua punctum F verſus C urgetur $= (2a : b)\,P = 2aMg : b$ [intelligo per M maſſam ponderis P.] Quia vero ponduſculum L, a cujus gravitate nunc abſtrahitur, conſiderando tantum ejus maſſulam, urgeri debet ad C, vi quæ exprimitur per faL, erit $2aMg : b = fa$L, unde $f = 2gM : b$L adeoque per Lemma IV hujus, erit tempus per FC $[p : 2\sqrt{f}] = p\sqrt{b\mathrm{L}} : 2\sqrt{2gM}$ = tempuſculo ſemivibrationis fili: dividendo itaque tempus ſemioſcillationis penduli dati D, quod [per Lemma III] $= p\sqrt{\mathrm{D}} : 2\sqrt{g}$, per tempuſculum ſemivibrationis fili $p\sqrt{b\mathrm{L}} : 2\sqrt{2gM}$; quod provenit $\sqrt{(2\mathrm{D}.\,M : b.\mathrm{L})}$ = [ſubſtituendo pro maſſis ponde-

pondera] $2\sqrt{(D \times P : AB \times L)}$ dabit numerum quæſitum vibrationum fili, prorſus ut in ſolutione præcedente per vires vivas eruta.

PROBLEMA II.

Nunc eſt P ad vim puncti F verſus C ut ſinus AFC ad ſinum VFG ſeu ſin. FAC $= b : a$; unde vis puncti F ad C $= aMg : b = fa \times \frac{1}{2} L$, adeoque $f = 2gM : bL$, & tempus per FC $[p : 2\sqrt{f}] = P\sqrt{bL} : 2\sqrt{2gM}$ = tempuſculo ſemivibrationis fili. Diviſum itaque $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$ per $p\sqrt{bL} : 2\sqrt{2gM}$, dabit $\sqrt{(2D \times M : b \times L)} = \sqrt{(6D \times P : AB \times L)}$ pro numero vibrationum quæſito, ut ſupra. TAB. XLVII. *Fig.* 3.

PROBLEMA III.

Vocetur hic & in ſequentibus ϕ vis puncti F verſus C; erit jam $P : \phi :: ſ AFC . ſ VFG$; [per $ſ$ intelligo ſinum anguli]. Et vero ex Lemmate ſecundo priori methodo præmiſſo, $ſ VFG$ [quia infinite parvus] $= 2a - a\sqrt{2}$, ſumto b pro radio: hinc $\phi = (2a - a\sqrt{2}) P : b = (2a - a\sqrt{2}) Mg : b = fa \times \frac{1}{3} L$, unde $f = (6 - 3\sqrt{2}) Mg : bL$, tempuſque per FC $[p : 2\sqrt{f}] = p\sqrt{bL} : 2\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})} Mg$ = tempuſculo ſemivibrationis fili; adeoque dividendo $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$ per $p\sqrt{bL} : 2\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})} Mg$, quod orietur $\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})} D M : \sqrt{bL} = 2\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})} D \times P : \sqrt{AB \times L}$, dabit quæſitum numerum, ut ante. TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 4.

PROBLEMA IV.

Hic iterum $P : \phi = ſ AFC : ſ VFG$. Eſt autem, ex Lemmate III pro ſuperiori methodo, $ſ VFG$ [quia infinite parvus] $= \frac{3}{2} a - \sqrt{\frac{4}{5} aa} = (3a - a\sqrt{5}) : 2$, ſumto b pro ſinu toto: unde $\phi = (3a - a\sqrt{5}) P : 2b = (3a - a\sqrt{5}) Mg : 2b = fa \times \frac{1}{4} L$, ex quo $f = (6 - 2\sqrt{5}) Mg : bL$; ac tempus per FC $[p : 2\sqrt{f}] = p\sqrt{bL} : 2\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})} Mg$ = tempuſculo ſemivibrationis fili. Hinc dividendo $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$ TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 5.

Digitized by Google

per $p\sqrt{b}L : 2\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}Mg$ acquiritur $\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}DM : \sqrt{b}L = \sqrt{(30 - 10\sqrt{5})}D \times P : \sqrt{AB \times L}$, quod dabit numerum vibrationum conformem ſuperiori, nam $\sqrt{(30 - 10\sqrt{5})}D \times P : \sqrt{AB \times L} = 2\sqrt{(25 - 5\sqrt{5})}D \times P : \sqrt{(5 + \sqrt{5})}AB \times L$.

PROBLEMA V.

Figura in mente concipienda eſt. Hic habemus ex Lemmate IV præliminari, $\int VFG$ infinite parvum $= 2a - a\sqrt{3}$; adeoque $\Phi = (2a - a\sqrt{3})P : b = (2a - a\sqrt{3})Mg : b = fa \times \frac{1}{5}L$; unde $f = (10 - 5\sqrt{3})Mg : bL$, & tempus per FC $[p : 2\sqrt{f}] = p\sqrt{b}L : 2\sqrt{(10 - 5\sqrt{3})}Mg =$ tempuſculo ſemivibrationis fili: quare dividendo $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$ per hoc, prodit $\sqrt{(10 - 5\sqrt{3})}DM : \sqrt{b}L = \sqrt{(60 - 30\sqrt{3})}D \times P : \sqrt{AB \times L}$, pro numero vibrationum quæſito; ut ſupra.

PROBLEMA VI.

Ex Lemmate V præliminari hic erit $\int VFG$ [ob infinite parvum] $= 2a - x$, ubi x eſt radix hujus æquationis $x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0$, eritque $\Phi = (2a - x)P : b = (2a - x)Mg : b = fa \times \frac{1}{6}L$; unde $f = (12a - 6x)Mg : abL$, & tempus per FC $[p : 2\sqrt{f}] = p\sqrt{ab}L : 2\sqrt{(12a - 6x)}Mg =$ tempuſculo ſemivibrationis fili. Dividendo itaque $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$ per hoc, oritur $\sqrt{(12a - 6x)}DM : \sqrt{ab}L = \sqrt{(84a - 42x)}D \times P : \sqrt{a \times AB \times L} = \sqrt{(42xx - 126ax + 168aa)}D \times P : \sqrt{(2xx + ax + aa)}AB \times L$, ut multiplicanti per crucem patebit.

SCHOLIUM.

Res generaliter tractari poteſt pro quocunque numero ponduſculorum: ſit enim numerus ponduſculorum n, & habebitur $\Phi = (2a - x)Mg : b = f \times \frac{1}{n}L$, unde $f = (2na - nx)Mg : abL$, & tempus per FC $[p : 2\sqrt{f}] = p\sqrt{ab}L : 2\sqrt{(2na - nx)}Mg =$ tempuſculo ſemivibrationis fili. Ergo diviſo

diviſo $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$ per hoc, prodibit $\sqrt{((2na - nx)DM} : \sqrt{ab L}] = \sqrt{((n+1)(2aa - nx)D \times P)} : \sqrt{(a \times AB \times L)} =$ numero qui quæritur vibrationum fili oſcillante ſemel pendulo dato D. In qua expreſſione pro x ſubſtituendus eſt ejus valor, qui quæri debet per methodum in Lemmatibus præliminaribus adhibitam. Sic, exempli gratia, ſi ſeptem ſint ponduſcula, in quo caſu $n = 7$, & x [per Lemma præliminare VI] $= a(\sqrt{2} + \sqrt{2})$, erit $\sqrt{((n+1)(2na + nx)D \times P} : (a \times AB \times L) = 2\sqrt{(28a - 14x)} D \times P : \sqrt{a \times AB \times L} = 2\sqrt{(28 - 14\sqrt{(2+\sqrt{2})})} D \times P : \sqrt{AB \times L} =$ numero quæſito vibrationum, qui quam proxime accedit ad $2\sqrt{2} D \times P : \sqrt{AB \times L}$ juſto minorem.

PROBLEMA VII.

Eſto nunc chorda muſica AB uniformiter craſſa, cujus quantitas materiæ $= L$, eaque tenſa a pondere $P = Mg$; quæritur numerus vibrationum in una oſcillatione penduli dati D.

SOLUTIO.

Induat chorda, extra ſitum rectilineum AB figuram curvilineam AEB, quæ ea eſſe debet, ut quodlibet ejus punctum K eodem tempuſculo perveniat ad punctum correſpondens H in ſitu rectilineo, quo punctum medium E pervenit ad C: id quod facit, ut vis acceleratrix, qua punctum K verſus H urgetur, ubique ſit proportionalis diſtantiæ KH. Ductis ergo duabus tangentibus proximis KG, GF; & ex K & S applicatis, KH, SI: erit ex principio ſtatico pondus P ſeu Mg, ad vim qua particula chordæ KS verſus H urgetur, ut ſinus anguli KSO, qui pro recto habetur, ad ſinum ang. GKF, hoc eſt, ut 1 ad FG: KG; poteſt enim KF conſiderari tanquam perpendicularis ad axem CF; erit itaque vis illa in $K = FG \times Mg : KG = f \times KH \times dL$, & inde vis ipſa acceleratrix ſeu $f \times KH = FG \times Mg : KG \times dL$. Ut autem TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 7.

deter-

determinetur FG: KG, notandum eſt, curvam AEB eſſe trochoidis ſociam elongatam, hoc eſt, ejus naturæ, ut deſcripto quadrante circuli EMN, & ducta KR parallela baſi AC, ſit AC: KR $=$ EMN: EM, cujus demonſtrationem infra adjiciemus. Sit nunc EC $= a$, ER $= x$, EM $= s$, EMN $= \frac{1}{2} pa$ [intelligo ſemper 1 ad p ut diametrum ad circumferentiam]; ſit etiam AC: EMN $= n : 1$, erit KR $= ns$, & reperietur ſubtangens RG $= s\surd(2ax - xx) : a$, CG $= a - x + s\surd(2ax - xx) : a$, ejuſque differentialis FG $= - dx + (asdx - sxdx) : a\surd(2ax - xx) + dx = (asdx - sxdx) : a\surd(2ax - xx)$ adeoque FG: KG, vel quod idem eſt FG: KR $= (adx - xdx) : na\surd(2ax - xx)$; ipſum vero elementum KS, quod cenſetur æquale ipſi KO, $= nds = nadx : \surd(2ax - xx)$. Eſt autem AB: HI [KO] $=$ L: dL, unde dL $=$ KO $\times$ L: AB $\times = nadx \times$ L: AB $\surd(2ax - xx)$; quibus ergo ſubſtitutis in vi acceleratrice habetur FG $\times Mg$: KG $\times d$L $=$ AB $\times (a - x) \times Mg$: $n^2 a^2$ L [quia $npa =$ AB] $pp(a - x) Mg$: AB $\times$ L $= pp \times$ KH $\times Mg$: AB $\times$ L $= f \times$ KH; adeoque $f = pp \times Mg$: AB $\times$ L, & tempus per KH [$p : 2\surd f$] $= \surd$ AB $\times$ L : $2\surd Mg =$ tempuſculo ſemivibrationis chordæ muſicæ; diviſo itaque $p\surd$D : $2\surd g$ per $\surd$ AB $\times$ L : $2\surd Mg$ acquiritur $p\surd$DM : $\surd$ AB $\times$ L. $= p\surd$D $\times$ P : $\surd$ AB $\times$ L; numerus vibrationum chordæ durante una oſcillatione penduli datæ longitudinis D; quemadmodum invenit TAYLORUS. Vid. *Meth. Increm.* p. 93. Et ſicuti ego quoque inveni ex principio virium vivarum, ut ſequitur:

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 8.

Sit DN $= x$; NG $= y = n\int(adx : \surd(2ax - xx))$; DG $= s$; DC $= a$. Eſt $ds - dy = (ds^2 - dy^2) : (ds + dy) = dx^2 : 2dy =$ [ob $y = n\int(adx : \surd(2ax - xx))$] $dx^2 : \frac{2nadx}{\surd(2ax - xx)} = dx\surd(2ax - xx) : 2na$; adeoque DA $-$ CA $= \int(dx^2 : 2dy) = \int(dx\surd(2ax - xx) : 2na) = \frac{1}{2}$ CD $\times$ DEF : $2n$ CD $= \frac{1}{4}$DEF : $n =$ DEF : $4n =$ AC^2 : $4n^2 =$ AB : $8n^2$; hinc 2DA $-$ 2CA $=$ ADB $-$ AB $=$ AB : $4n^2 =$ differentiæ inter arcum & chordam. Radius oſculi in G, poſito elemento Gg

vel

vel ds conſtante, eſt generaliter $ds\,dy : ddx$ = [in curvis maxime elongatis ubi $dy = ds$] $dy^2 : ddx$. Ergo in hoc caſu Trochoïdis ſociæ maxime elongatæ, ubi $dy = ds = nadx : \sqrt{(2ax - xx)}$ = conſtanti, erit $naddx \sqrt{(2ax - xx)} - (na^2dx^2 - naxdx^2) : \sqrt{(2ax - xx)} = 0$, unde $ddx = (a - x)\,dx^2 : (2ax - xx)$; adeoque radius oſculi $dy^2 : ddx = \frac{nnaadx^2}{2ax - xx} : \frac{(a-x)dx^2}{(2ax - xx)} = \frac{nnaa}{a - x}$, hoc eſt, radii oſculi ſunt reciproce ut GH. Sit nunc pondus tendens chordam, P; pondus chordæ ipſius AB, L; velocitas puncti D cum vibrando venerit in C $= \sqrt{S}$ [intelligendo per S ſpatium per quod grave libere deſcendens acquirit velocitatem puncti D in C]: erit puncti cujuſlibet G in H velocitas $= GH\sqrt{S} : DC = (a - x)\sqrt{S} : a$, adeoque $\frac{(a-x)^2}{aa} S \times \frac{Hh}{AB} \times L = \frac{(a-x)^2}{aa} \times S \times \frac{dy.L}{AB} = \frac{(a-x)^2}{a} \times S \times \frac{ndx.L}{AB.\sqrt{(2ax - xx)}}$ = vi vivæ particulæ chordæ Gg vel Hh in H $= \frac{nS.L}{a.AB} \times \frac{(a-x)^2.dx}{\sqrt{2ax - xx}}$; id quod integrando habetur $\frac{nS \times L}{a.AB} \times ((a - x)\sqrt{(2ax - xx)} + \int dx\sqrt{(2ax - xx)})$ = [pro tota chorda] $\frac{2nS.L}{a.AB} \times \frac{1}{2}a \times DEF = \frac{nS.L.DEF}{AB} = \frac{1}{2}L \times S$ = quantitati virium vivarum totius chordæ. Hæc autem eſt æqualis vi vivæ ponderis P deſcendentis per $AB : 4n^2 = P.AB : 4n^2$. Ergo $S = P.AB : 2n^2 \times L = 2P.DEF^2 : L \times AB$, & $\sqrt{S} = DEF \times \sqrt{(2P : L.AB)}$. Hinc invenitur tempus per $DC = \sqrt{(L.AB : 2P)}$. Eſt autem tempus ſemioſcillationis penduli ſimplicis cujus longitudo ſit $C = DEF \times \sqrt{2C} : DC$; ut igitur hæc duo tempora ſint æqualia, faciendum eſt $\sqrt{(L.AB : 2P)} = DEF \times \sqrt{2C} : DC$; unde $C = DC^2.AB.L : 4DEF^2.P$. Ergo numerus vibrationum chordæ in tempore unius vibrationis penduli datæ longitudinis D, $= 2DEF \times \sqrt{(D \times P)} : DC \times \sqrt{(AB.L)}$, = [ſuppoſito $2DEF : DC = p$] $p\sqrt{(D.P : AB.L)}$ ut habet TAYLORUS, cui L & N ſunt quod mihi AB & L.

Digitized by Google

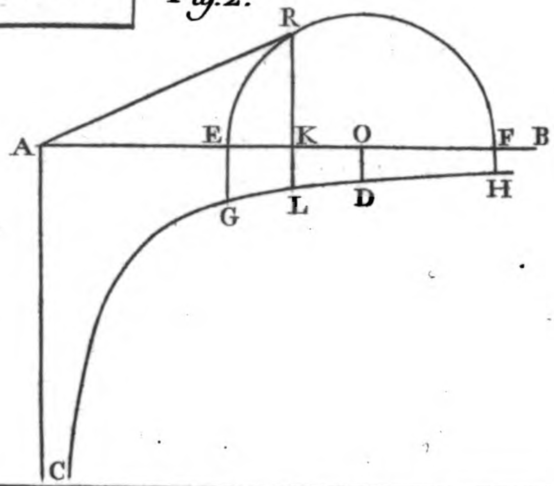
Sequitur demonſtratio ejus, quod ſupra aſſeritur, chordam vibrantem ADB [vid. fig. præced.] induere figuram ſociæ Trochoidis elongatæ.

Oſtenſum eſt in ſuperioribus, ſinum anguli contactus in puncto chordæ quocunque G proportionalem eſſe longitudini percurrendæ GH. Jam retentis iiſdem ſymbolis, quibus ſupra uſi ſumus, erit ſinus anguli contactus $= ddx : ds =$ [ob figuram maxime elongatam & conſequenter $ds = dy$] $ddx : dy$, poſitis nimirum dy conſtantibus: longitudo autem percurrenda $GH = a - x$. Ergo $ddx : dy$ ad $a - x$ in ratione conſtante. Sit illa ratio ut dy ad $nnaa$; eritque $nnaaddx : dy = ady - xdy$, [ſeu divid. per dy] $nnaaddx : dy^2 = a - x$. Multiplicetur utrumque membrum per dx, & habebitur $nnaadxddx : dy^2 = adx - xdx$; ſumtiſque integralibus $nnaadx^2 : 2dy^2 = ax - \frac{1}{2}xx$, ſeu $nnaadx^2 = (2ax - xx)\, dy^2$ unde $nadx : \sqrt{(2ax - xx)} = dy$, & $n\int(adx : \sqrt{(2ax - xx)}) = y$. Eſt itaque y [NG] : $\int(adx : \sqrt{2ax - xx})$ [arc. DE] $= n : 1$; id eſt, applicata NG ad arcum DE in ratione conſtante, eaque valde magna. Eſt enim ratio AC ad CD valde magna [per hyp.] Ergo etiam ratio AC ad quadrantem DEF valde magna erit. Sed AC : DEF $= n : 1$. [*per demonſtr.*] Quare conſtat propoſitum.

DE

N°. CXXXIX.

Fig. 2.



N°. CXL.

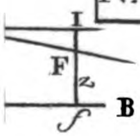


Fig. 2.

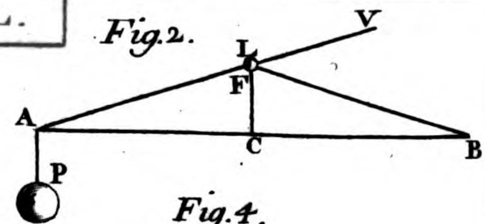
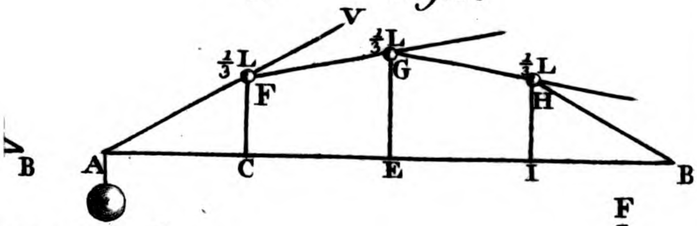
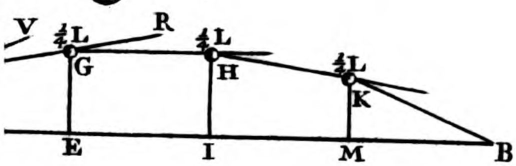


Fig. 4.





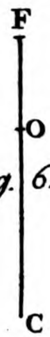
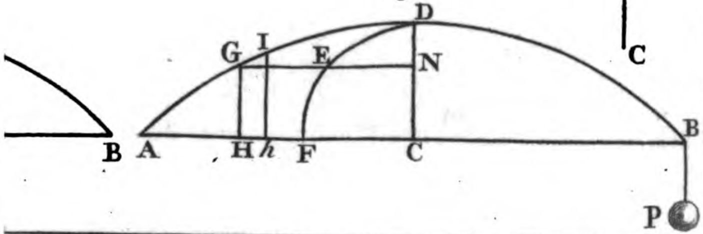


Fig. 6.

Fig. 8.



Digitized by Google

N°. CXLI.

DE EPICYCLOÏDIBUS

In ſuperficie ſphærica deſcriptis.

Autore Jacobo HERMANNO.

TRiginta quatuor jam effluxere anni, ex quo Ænigma geometricum de miro opificio Teſtudinis quadrabilis hemiſphæricæ, Autore *D. Pio Liſci Poſillo Geometra* Florentiæ exiit in publicum. Sub hoc nomine, quod per anagramma ſignificat *Poſtremo* GALILÆI *Diſcipulo*, *Vincentius* VIVIANUS Magni Ducis Hetruriæ Mathematicus latere voluit. Is enim impreſſo Programmate ænigma ſuum peritioribus Analyſtis examinandum commendavit his verbis: „ Cujus [ænigmatis] divinatio a ſecretis artibus „ illuſtrium Analyſtarum vigentis ævi expectatur, quod in Geometriæ „ pura hiſtoria verſatus, ad tam recondita videatur invalidus. *Comment. Acad. Petrop. Tom. I. pag. 210.*

Ipſum vero ænigma ita habebat: „ Inter venerabilia olim Græciæ mo- „ numenta extat adhuc, perpetuo quidem duraturum, Templum auguſ- „ tiſſimum ichnographia circulari ALMÆ GEOMETRIÆ dicatum, quod „ Teſtudine intus perfecte hemiſphærica operitur: ſed in hac feneſtrarum „ quatuor æquales areæ [circum ac ſupra baſin hemiſphæræ ipſius diſpoſi- „ tarum] tali configuratione, amplitudine, tantaque induſtria, ac ingenii „ acumine ſunt exſtructæ, ut his detractis, ſuperſtes curva Teſtudinis ſu- „ perficies, pretioſo opere muſivo ornata, Tetragoniſmi vere geometrici „ ſit capax.

„ Præſentis ænigmatis enodatio, quod ſpectat ad hujus admirabilis for- „ nicis tum conſtructionem expeditiſſimam, tum quadraturam, *Sereniſſ.* „ FERDINANDO *Magno Principi Etruriæ*, ſcientiarum & nobiliorum ar- „ tium Cultori ac Patrono Generoſiſſimo, ab eodem ænigmatiſta oblata „ jam eſt; qui quidem ſimul non dubitat, quin hoc ipſum ænigma a ſin- „ gulis litterario in Orbe degentibus hodie præclariſſimis Analyſtis ſit ſta- „ tim divinandum, proprias quadrationes impertiendo ſingularis Teſtudi- „ nis hujus tetragoniſmicæ ab hemiſphæra diſſectæ, & ipſorum peracutas „ indagines, multipliceſque induſtrias ad hoc unum idemque collimantes „ impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam „ jacere audent, ſilere diſcant, vel potius maxima cum voce exclament: „ Oh! unica verorum ſciſcitabilium ſcientia a Divina in hominum mente

„ infuſa, ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibuſque contemptis, ætern„ na iſta, quæ ſemper & unicuique ſunt eadem, tantum appetat, nihil„ que aliud unquam magis innocuum ſcire perquirat.“ Hucuſque VIVIANUS.

Ex hoc proponendi modo, & ex eo quod ad celeberrimos ævi ſui Geometras Programma ſuum mitti curavit, facile quis in opinionem venerit, hoc ænigma arduum & difficile ſolutu Autori ſuo viſum fuiſſe: verumtamen cum non dubitarit quin recentioribus Analyſtis ſtatim ſit ſolvendum, forte non tam a difficultate quam elegantia Problema hoc ſuum tanti fecit, & credibile quoque eſt, hoc ænigma præclariſſimo Viro in Veterum Geometria innutrito & magna diligentia cuncta excutere ſolito, plus negotii dediſſe quam aliis Analyſtis, qui methodos infiniteſimales magis in promptu habebant. Illuſtris enim LEIBNITIUS eodem die, quo notitiam Problematis nactus eſt, ejus ſolutionem invenit, quam peculiari ſcheda deſcriptam, & *Magno Etruriæ Principi* inſcriptam proximo curſore Florentiam miſerat; & paulo poſt totidem verbis in *Acta Eruditorum* 1692 tranſtulit. Occurrunt quoque quinque ſolutiones diverſæ, quas *Jacob.* BERNOULLI in eodem *Actorum* anno Menſ. Auguſto exhibuit. Dedit quoque WALLISIUS aliquot ſolutiones in Cap. 192 ſuæ *Algebræ*. Sed omnium fere elegantiſſimæ videntur eſſe conſtructiones, quas VIVIANUS ipſe in peculiari opuſculo Italico ſermone, anno 1692, Florentiæ edito, ſed ſine demonſtrationibus, publico impertivit. Vid. *Act. Erudit.* 1694, pag. 207. Demonſtrationes a VIVIANO ſuppreſſas ex propria penu deinceps depromſit & dedit P. Abbas *Guido* GRANDUS in ſingulari opere, quod *Problemata Viviana* inſcripſit. Totius ænigmatis ſolutio eo redit, ut Teſtudo iis feneſtris aperiatur, quibus de ſuperficie tota hemiſphærii detractis, reſidua maneat ſuperficies geometrice quadrabilis; quod infinitis diverſis modis fieri poteſt. Jam olim PAPPUS *Alexandrinus* Collectionum Libr. IV. Prop. 32 oſtendit, portionem ſphæricæ ſuperficiei quadam ſpirali interceptam, dati cujuſdam trianguli octuplam eſſe; & facile fuit poſteris alias in ſphæræ ſuperficie portiones invenire, quæ datis planis rectilineis æquales eſſent.

Sed difficilius videri poterat Problema, ſi loco ſpatiorum in ſuperficie ſphærica quadrabilium, quærerentur lineæ geometrice rectificabiles. Ita ſaltem ſentit *Carol. Erneſtus* OFFENBURGIUS, qui in *Actis Erudit.* 1718, pag. 175, hoc Problema propoſuit: *Teſtudinem hemiſphæricam feneſtris ovalibus perforare, quarum unaquæque peripheriam abſolute rectificabilem habeat.* Utrum hic Autor Problema ſuum ſolverit nec ne, de eo mihi nihil conſtat: hoc ſaltem novi, Problema non eſſe tantæ difficultatis, quantæ illud eſſe Autori videtur: ſolutio enim facilis manat a conſideratione Epicycloïdum ſphæricarum. Quid vero per has Epicycloïdes intellectum velim, explicatur in definitione ſequenti.

DEFINI-

Digitized by Google

DEFINITIO.

Epicyclois ſphærica eſt curva in ſuperficie ſphærica deſcripta a puncto in peripheria baſis alicujus coni recti aſſumto, dum coni hujus perimeter baſis volvitur in circumferentia alicujus circuli immoti, vertice coni in centro ſphæræ [cujus radius æquat latus coni] immoto manente.

Baſis coni dicatur itidem *Circulus generator*, & circulus, ſuper quo circulus generator volvitur, ita ut ſingulæ partes peripheriæ generatoris ſingulis partibus peripheriæ hujus ſucceſſive applicentur, dicatur *Circulus immobilis*. Hoc motu, planum circuli generatoris conſtanter dato angulo ad planum circuli immobilis inclinatum eſt.

Si conus rectus ABC, [*Fig.* 1] cujus baſis eſt circulus AHB revolvatur circa verticem ſuum C, ut circumferentia baſis BAH moveatur in circumferentia BDE alterius circuli BE centro C & radio CB deſcripti; erit circulus AHB *generator*, & circulus BDE is, qui *immobilis* vocatur, & punctum L in perimetro circuli generatoris revolutione hujus circuli ſuper peripheria LDE, deſcribet in ſuperficie ſphærica curvam LFE, quam *Epicycloïdem ſphæricam* appello. TAB. XLVIII. *Fig.* 1.

Radius ſphæræ in cujus ſuperficie Epicyclois ſphærica deſcribitur, eſt ubique æqualis lateri coni CB.

Non autem neceſſe eſt ut circulus immobilis ſit circulus in ſphæra maximus ut *fig.* 1. Poteſt etiam eſſe circulus minor, ut *fig.* 2, circulus ex diametro BS, nam ſi in circumferentia hujus circuli, circulus ex diametro Aβ qui eſt baſis coni recti BAC dicto modo volvatur, ut ſingulæ partes hujus ſingulis partibus peripheriæ circuli immobilis ſucceſſive applicentur, punctum deſcribens etiamnunc incedet in Epicycloide in ſuperficie ſphæræ BAS deſcripta, ſive circulus generator extet ſupra planum circuli immobilis BS, ſive ſubter idem planum depreſſus ſit. TAB. XLVIII. *Fig.* 2.

In omni caſu planum circuli generatoris ad planum circuli immobilis dato angulo inclinatum eſt, in *fig. prima* angulo ABC, in *ſecunda* vero angulo ABR, ſi circulus AB ſit ſuper plano BS, vel ſupplemento anguli ABR, ſi ſit ſubter plano BR. In omni ex hiſce caſibus longitudo Epicycloïdis eſt ad diametrum circuli generatoris in ratione data. Ad id oſtendendum ſequentibus Lemmatibus opus habemus.

LEMMA I.

Datis lateribus trianguli obliquanguli $be\beta$, [*Fig.* 3.] nempe βe & be, & angulo intercepto $be\beta$, invenire tertium latus $b\beta$. TAB. XLVIII. *Fig.* 3.

Dicantur $e\beta = p$, $eb = q$, ſinus anguli $be\beta = g$, ſinus complementi $= b$, ad radium $= 1$, eritque latus quæſitum $b\beta = \sqrt{(pp - 2bpq + qq)}$.

LEMMA II.

TAB. XLVIII. *Fig.* 4. Si arcus BOL [*Fig.* 4] ſemi-circuli BLA, in ſua elementa L*m* diſtributus intelligatur, erit ſumma omnium BL×L*m*, quam ſummam jam uſitato more, per ∫BL. L*m* deſignabo, erit, inquam, ∫BL. L*m* = AB ×BP; facta nempe AP = AL.

Nam triangula ſimilia ABL & *m*L*n*, præbent AB: BL = L*m*:L*n*; ergo BL×L*m* = AB × L*n*; ergo ∫BL × L*m* = ∫AB×L*n*. Atqui ∫AB×L*n* = AB in omnes L*n*; omnes vero L*n* ſunt = AB — AL [conſtr. = AB — AP] = BP, ergo ∫BL×L*m* = AB×BP. *Quod erat demonſtrandum.*

THEOREMA.

TAB. XLVIII. *Fig.* 5. Pars Epicycloïdis ſphæricæ EL [*Fig.* 5] deſcripta a puncto deſcribente L provolutione circuli generatoris ALB ſuper immobili EB ex E ad B, eſt ad 2BP, facta AP = AL, ut $\surd(aa - 2hab + bb)$ ad *a*; ſi nempe radius circuli BE, hoc eſt BC, ſit = *a*, radius BG circuli ALB = *b*, ac coſinus inclinationis circuli hujus ad circulum immobilem = *h*, ad radium = 1.

Per B ducatur tangens BV circuli immobilis BE, & hæc tanget etiam circulum generatorem ALB in eodem puncto B. Intelligantur in circulo generatore & in circulo immobili duo arculi infinite parvi & æquales Bβ & B*b*; ductaque ex *b* in BV normali *be*, jungatur βe; eritque angulus $\beta e b$ menſura inclinationis plani HL ad planum BEC circuli immobilis. His poſitis,

Si circulus generator HL promoveatur, lineola Bβ rotabitur circa punctum B, uſque dum cadat ſuper B*b*: interea vero deſcribet BL ſectorem LB*l* ſimilem ſectori Bβb, in quo ſectore arculus L*l* eſt elementum Epicycloïdis hoc motu genitum; habemus ideo BL : L*l* = Bβ : $b\beta$; vel L*l* × Bβ = BL × $b\beta$.

Jam dicendo radium circuli immobilis BE, qui eſt BC = *a*, radium circuli generatoris BG = *b*, arculum B*b* = B*e* = Bβ = *ds*; erunt $eb = ds^2 : a$; $e\beta = ds^2 : b$, & coſinus anguli $\beta e b = h$; ſurrogatis ergo in Lemm. I. $ds^2 : b$, $ds^2 : a$, pro *p* & *q*, invenietur $b\beta = ds^2 \surd(aa - 2hab + bb) : ab$, & æquatio L*l*×B$\beta$ = BL×$b\beta$ mutabitur in ab×L*l* = ds×BL × $\surd(aa - 2hab + bb)$, hoc eſt = BL×L*m*×$\surd(aa - 2hab + bb)$; ergo ab×∫L*l*, hoc eſt ab×EL = $\surd(aa - 2hab + bb)$ ×∫BL×L*m*, id eſt [per Lemm. II.] = AB×BP×$\surd(aa - 2hab + bb)$ = 2*b*×BP×$\surd(aa - 2hab + bb)$, & dividendo per *b*; habetur *a*×EL = 2BP$\surd(aa - 2hab + bb)$. Quare EL: 2BP = $\surd(aa - 2hab + bb) : a$ *Q. E. D.*

COROLL.

Digitized by Google

N°. CXLI.



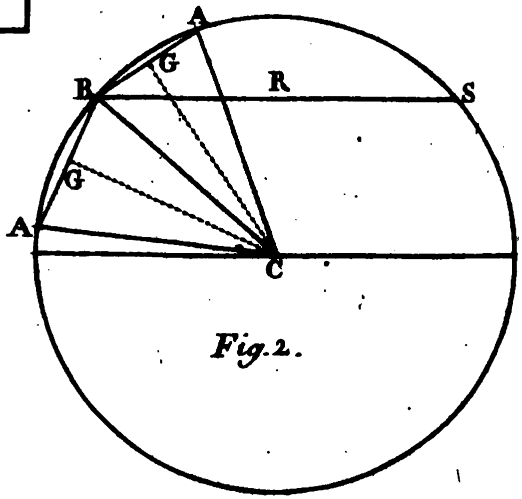


Fig. 2.

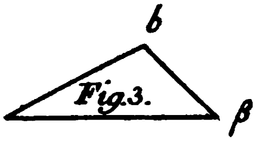
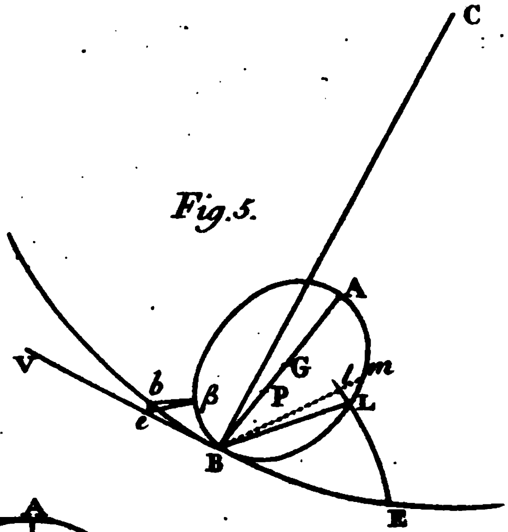
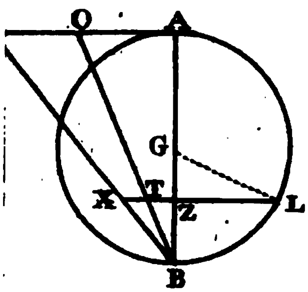


Fig. 3.

Fig. 5.





COROLL. I.

Ergo tota Epicyclois eſt ad duplam diametrum AB circuli generatoris ut $\sqrt{(aa - 2bab + bb)}$ ad a.

COROLL. II.

Si $b = 1$, ſeu ſinui toti, quod contingit, eum ambo plana circuli generatoris & immobilis coincidunt, tunc erit Epicyclois ad duplum diametri generatoris, ut $a - b$ ad a, id eſt ut differentia radiorum circuli immobilis & generatoris, ad radium immobilis.

PROBLEMA.

Invenire in plano ſphæræ ichnographo quotcunque puncta ichnographica Epicycloïdis.

Sit ALB [*Fig.* 6] circulus generator ſeorſim deſcriptus; ad terminum A diametri AB erecta normaliter indefinita AQ, capiantur in eadem partes AO, AQ, quæ ſint ad diametrum AB ut ſinus rectus & ſinus complementi ad radium, & ducantur OB, QB. Poſtea accepto quolibet arcu BL, ductoque ejus ſinu LZ, protendatur hic ſinus uſque ad occurſum X cum recta BQ. Quibus factis, in plano ſphæræ ichnographico ad radium CE fiat angulus ECB qui ſit ad angulum BGL ut radius GB ad CE; capiatur in radio BC portio $Bt = XZ$, & perpendicularis $tu = LZ$ ad radium BC: dico punctum u eſſe punctum optatum Ichnographiæ Epicycloïdis, id eſt, erecta in u ad planum CBE perpendicularis per punctum Epicycloidis tranſibit; diſtantia vero hujus puncti a puncto u, æquat ubique reſpectivam TZ. Hoc pacto tot puncta Ichnographiæ Epicycloïdis invenientur quot quis voluerit: & OFFENBURGI Problema in tota ſua latitudine ſolvitur, deſcribendo ſupra & infra circulum immobilem RS [*Fig.* 2] Epicycloïdes: nam binæ oppoſitæ formabunt feneſtram ovalem, & conſtructio geometrica fiet, ſi in Fig. 6, BG ad BC fuerit ut numerus ad numerum. *Q. E. F.* TAB. XLVIII. *Fig.* 6.

PROBLE-

N°. CXLII.

PROBLÊME

Sur les Epicycloïdes Sphériques ;

Par M. Bernoulli, Profeſſeur de Mathématiques à *Bâle*.

Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris 1732. pag. 237, Ed. de Paris, pag. 316, Ed. d'Amſt.

TAB. XLIX. N°. CXLII. *Fig.* 1.

SOit le Cercle immobile *HBED*, [Fig. 1] dont le centre eſt *C*, & le rayon *CB*. Soit ſur ce cercle un autre cercle mobile *BLA*, qui tourne de *E* par *B* vers *H*, dont le rayon eſt *GB*, & qui conſerve, en tournant, la même inclinaiſon ſur le plan du cercle immobile. Soit le commencement de la rotation en *E*, d'où un point *L*, dans la circonférence du cercle mobile, commence à décrire l'Epicycloïde *ELl*, qui ſera ſur quelque ſuperficie ſphérique. On demande la rectification de l'Epicycloïde *ELl*; la maniere de la déterminer ; &c.

Préparation pour la Solution.

Conſiderons le Cercle mobile dans une ſituation quelconque touchant en *B* le cercle immobile, & prêt à parvenir en *b*, infiniment proche de *B*; pendant que le point décrivant *L*, pris ſur la circonférence du cercle mobile, paſſe en *l*; & l'on aura *Ll* pour l'élément de l'Epicycloïde *ELl*.

Soit donc conçu le point du contact *B* être venu en *b*, & l'arc du cercle mobile *BL*, tranſporté en *bl*, qui ſera augmenté de la particule *Bb*, élément commun aux deux cercles dans lequel ils ſe touchent. On aura donc, par la nature de la rotation, *Bb* = la différence de l'arc *BL*, & partant = l'arc *bl* — l'arc *BL*. Des points *B* & *b* ſoient tirées les tangentes *BS*, *bs*, commu-

communes aux deux cercles : BS ſera la commune interſection des plans du cercle mobile, & de l'immobile pour le point de contact B ; mais bs ſera l'interſection commune des mêmes plans pour le point de contact paſſé en b. D'où l'on voit que BS eſt perpendiculaire aux deux rayons CB & GB, & que l'angle CBG eſt la meſure de l'inclinaiſon mutuelle des plans, qui eſt donnée.

Du point décrivant L, ſoit tirée la perpendiculaire LS ſur la tangente BS, & la perpendiculaire LR ſur le rayon BG du cercle mobile. Soit de même, du point l, tirée la perpendiculaire ls ſur la tangente bs, & la perpendiculaire lr ſur le rayon bg, dans la ſituation prochaine. Si maintenant des mêmes points S & s, on tire dans le plan immobile les droites SO & sO perpendiculaires aux tangentes BS & bs, & qu'on abaiſſe des points L & l du cercle mobile, dans l'une & dans l'autre ſituation, les lignes LN & ln perpendiculaires au plan immobile, le point N ſera dans la droite SO, & le point n dans sO ; & la courbe ENn qui paſſe par tous ces points ſera la projection ichnographique de l'Epicycloïde ELl. Car comme BS eſt perpendiculaire au plan qui paſſe par les droites BC & BG, de même BS eſt perpendiculaire au plan qui paſſe par les droites SN & SL : il faut entendre la même choſe des deux autres plans qui paſſent par bC, bg, & par sn, sl, auxquels plans bs eſt perpendiculaire ; & l'on aura ainſi les angles OSL, CBG, Cbg ; Osl égaux entr'eux, & chacun égal à l'inclinaiſon conſtante des plans du cercle mobile & de l'immobile. Soit mis t au point où sO coupe BS, & l'on aura le triangle SOt ſemblable au triangle BCb, comme on le voit facilement. Enfin, ſoit conçue NP dans le plan immobile parallele à St.

SOLUTION.

Cette préparation faite ; ſoient le rayon du cercle immobile CB ou $Cb = a$, le rayon du cercle mobile GB, ou

$gb = b$, le ſinus droit de l'inclinaiſon des deux plans $= g$; en prenant l'unité pour le ſinus total, ſon coſinus $= \sqrt{(1 - gg)} = h$; l'abſciſſe dans le cercle mobile $BR = x$, ce qui donne RL ou $BS = \sqrt{(2bx - xx)}$, & partant $d(BR) = dx$, & $d(RL)$ ou $d(BS) = (b - x)\,dx : \sqrt{(2ax - xx)}$; d(arc BL) $= bdx : \sqrt{(2ax - xx)}$.

I.

On trouvera le rayon de la ſphére ſur la ſuperficie de la quelle on décrit l'Epicycloïde, en prenant une quatriéme proportionnelle, au ſinus d'inclinaiſon des plans, au ſinus total, & à la diſtance CG des centres des deux cercles; or $CG = \sqrt{(aa - 2hab + bb)}$; on aura donc le rayon de la ſphére $= \frac{1}{g}\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$. La démonſtration en eſt ſi facile, qu'elle ne mérite pas que je la mette ici.

I I.

Puiſque $d(BS)$ ou $(b - x)\,dx : \sqrt{(2bx - xx)} = bs - BS = bB - tS$; & que d(arc BL) ou $bdx : \sqrt{(2bx - xx)} =$ l'arc bl — l'arc $BL =$ l'arc bE — l'arc $BE = bB$, on aura $tS = xdx : \sqrt{(2bx - xx)}$.

I I I.

A cauſe des triangles ſemblables CBb, OSt, on a $Bb\,[bdx : \sqrt{(2bx - xx)}] : St\,[xdx : \sqrt{(2bx - xx)}] = CB\,[a] : OS = ax : b$.

I V.

A cauſe des triangles ſemblables CBb, bst, on a $CB\,[a] : bs\,[\sqrt{(2bx - xx)}] = Bb\,[bdx : \sqrt{(2bx - xx)}] : ts = bdx : a$.

V.

V.

Maintenant, à cauſe de l'angle droit LNS & de $LSN =$ $ABC =$ l'inclinaiſon des deux plans, on aura $1 : h = SL[x] : SN$; d'où l'on tire $SN = hx$; donc $d(SN) = hdx$. Or $d(SN) = sn - SN = sn - tP = st + Pn$: donc $st + Pn = hdx$, & ôtant de part & d'autre st ou $bdx : a$, reſte $Pn = hdx - bdx : a = (ah - b)dx : a$.

VI.

On a $OS\,[ax : b$ par §. 3$] : ON\,[OS - SN$ ou $ax : b - hx]$ $= St\,[xdx : \sqrt{(2bx - xx)}$ par §. 2$] : NP$, & ainſi $NP = (a - hb)\,xdx : a\sqrt{(2bx - xx)}$.

VII.

De plus $1 : g = SL$, ou BR, ou $x : LN$, qui eſt la hauteur du point L ſur le plan immobile; on aura donc $LN = gx$, & $d(LN)$ ou $ln - LN = gdx$.

VIII.

Ayant ainſi trouvé les trois élemens $NP = (a - bh)\,xdx : a\sqrt{(2bx - xx)}$ [§. 6], $Pn = (ah - b)\,dx : a$ [§. 5] & $d(LN) = gdx$ [§. précéd.]; on aura premierement l'élement de la courbe de projection, ou $Nn = \sqrt{(NP^2 + Pn^2)} = dx$ $\sqrt{((a - bh)^2.x : (2aab - aax) + (ah - b)^2 : aa)}$, & enſuite l'élement Ll de l'Epicycloïde $= \sqrt{(Nn^2 + d(NL^2))} = dx$ $\sqrt{((a - bh)^2 x : (2aab - aax) + (ah - b)^2 : aa + gg)} =$ [à cauſe de $bb + gg = 1$] $= \frac{1}{a} dx \sqrt{((a - bh)^2 x : (2b - x) + aa - 2hab + bb)}$, dont l'intégrale donne la longueur de l'arc de l'Epicycloïde EL. Mais $aa - 2hab + bb$ étant $> (a - bh)^2$, on verra avec une légére attention, que cette intégrale en general dépend de la quadrature de l'hyperbole. *C. Q. F. T.*

Digitized by Google

I X.

On voit par-là que Mr. HERMAN ſe trompe, lorſqu'il croit l'Epicycloïde ſphérique rectifiable algébriquement ; ſon paralogiſme ſe trouve dans la ligne pénult. p. 215 *, là où il dit, *interea verò [dum circulus generator rotatur] deſcribet* BL *ſectorem* LB*l ſimilem ſectori* B*βb*. [Voyez ſa Figure 5.] Ce qui n'eſt pas vrai ; car la ligne B*b* n'eſt pas dans le même plan que le cercle generateur BLA, mais B*b* décline de ce plan de la quantité de l'angle de contact *b*B*e* ; d'où il eſt facile de voir que cette déclinaiſon dans la rotation empêche le ſecteur LB*l* d'être ſemblable au ſecteur B*βb*.

TAB. XLVIII. *Fig.* 5.

X.

COROL. I. Si $b = 1$, & par conſéquent $g = 0$, on aura pour l'élement de la courbe cycloïdale $\frac{1}{a} dx \sqrt{((a-b)^2 x : (2b-x) + (a-b)^2)} = \frac{a-b}{a} dx \sqrt{(x : (2b-x) + 1)} = \frac{a-b}{a} dx \sqrt{(2b : (2b-x))}$, dont l'intégrale (en lui faiſant la correction néceſſaire) donne $\frac{2a-2b}{a} \times (2b - \sqrt{(4bb - 2bx)})$; dans laquelle ſi l'on prend $x = 2b$, on aura toute la demi-Epicycloïde $= (4ab - 4bb) : a$. Or $\frac{4ab-4bb}{a} : 4b = a - b : a$; c'eſt-à-dire, toute la demi-Epicycloïde eſt au double du diamétre AB du cercle generateur, comme la différence des rayons de l'un & de l'autre cercle, eſt au rayon du cercle immobile. C'eſt ce que trouve Mr. HERMAN dans ſon ſecond *Corollaire* †, & cela ne doit pas ſurprendre, parce que ſon paralogiſme ceſſe dans ce cas, où la Cycloïde ceſſe d'être ſphérique, & devient plane ; car b étant $= 1 =$ ſinus total

* N°. précédent, pag. 214. lig. 25. † pag. 215. lig. 5.

Digitized by Google

total, l'inclinaiſon des plans s'évanouït, & ils s'apliquent l'un ſur l'autre, de maniere que la petite ligne B*b* ſe trouve dans le plan du cercle mobile, auſſi-bien que dans l'autre; cas dans lequel on peut conclure avec vérité que le ſecteur LB*l* [dans la figure de M. HERMAN] ſera ſemblable au ſecteur B*β b*, ce qui n'eſt pas permis dans les Epicycloïdes ſphériques, à cauſe de la non-coïncidence des plans.

X I.

Il y a encore un autre cas dans lequel la ſimilitude de ces ſecteurs a lieu; c'eſt quand *a*, ou le rayon du cercle immobile eſt infini, & qu'ainſi ſa circonférence dégénére en ligne droite coïncidente avec la tangente, & que par conſéquent la ligne B*b* ſe confond avec B*e*, qui eſt dans le même plan que le cercle mobile. Ainſi dans ce cas, il ſera vrai que toute la demi-cycloïde ſera au double du diamétre AB, comme $\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$ à a, ou ſimplement comme a à a; car $\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$ devient $= a$; à cauſe de a infini par raport à b & hb. On aura donc dans ce cas-là la demi-cycloïde ordinaire, égale au double du diamétre. Ce qu'on ſait, il y a long-tems.

Mais nôtre formule $\frac{1}{a} dx \sqrt{((a - bh)^2 x : (2b - x) + aa - 2hab + bb)}$ le donne auſſi, en effaçant les termes qui s'évanouïſſent devant a & aa; car elle ſe change en celle-ci, $dx \sqrt{(2b : (2b - x))}$ qui étant intégrée, donne $4b - 2\sqrt{(4bb - 2bx)}$ pour la longueur de l'arc de la Cycloïde *EL*; ainſi prenant $x =$ tout le diamétre $2b$, on a la demi-cycloïde $= 4b$, c'eſt-à-dire, égal au double du diamétre.

Mais ces deux cas dans leſquels la ſolution de M. HERMAN eſt bonne, par la raiſon que nous en avons donnée, ne peuvent pas, comme nous avons dit à l'égard du premier ſe raporter à la claſſe des Cycloïdes ſphériques; car en effet ces Cycloïdes ſont toutes deux planes. Ainſi il n'y a pas

Ee 3 une

une ſeule Epicycloïde ſphérique qui ait la longueur que preſcrit la régle tirée de cette ſolution.

X I I.

TAB. XLIX. N°. CXLII. *Fig.* 1.

Coroll. II. Soit maintenant $h = 0$, & par conſéquent $g = 1$; ce qui eſt le cas où les plans des cercles ſont perpendiculaires l'un à l'autre; on aura l'élement de l'Epicycloïde $Ll = \frac{1}{a} dx \sqrt{(aax : (2b - x) + aa + bb)} = \frac{1}{a} dx \sqrt{((2aab + 2b^3 - bbx) : (2b - x))}$ dont l'intégrale, comme on a déja obſervé en général [§. 8], dépend de la quadrature de l'hyperbole. Mais l'élement de la courbe de projection $Nn = \frac{1}{a} dx \sqrt{((2b^3 + aax - bbx) : (2b - x))}$ s'intégre par la quadrature du cercle ſi $a > b$, par la quadrature de l'hyperbole ſi $a < b$, mais algébriquement ſi $a = b$; car on a dans ce cas $\int \frac{b}{a} dx \sqrt{\frac{2b}{2b - x}} = 4bb : a - \frac{2b}{a} \sqrt{(4bb - 2bx)} = 4b - 2\sqrt{(4bb - 2bx)}$. Et ainſi la courbe de projection de toute la demi-épicycloïde $= 4bb : a = 4b$, c'eſt-à-dire, égal au double du diamétre du cercle generateur: ce qu'on peut auſſi déduire d'ailleurs; car cette courbe de projection eſt une Epicycloïde plane, produite par la rotation du cercle ſur un cercle égal dans le même plan, le diamétre de ce cercle étant ſous-double du diamétre du cercle mobile generateur de l'Epicycloïde ſphérique, dont il eſt ici queſtion, & dont la courbe de projection eſt auſſi du genre des cauſtiques.

X I I I.

On a la rectification de la courbe de projection dans le cas $a = b$, non ſeulement lorſque $h = 0$, mais quel que ſoit h; car alors l'élement Nn que nous avons trouvé en general [§. 8] $= \frac{1}{a} dx \sqrt{((a - bh)^2 x : (2b - x) + (ah - b)^2)}$

dans

dans ce cas, ou $a = b$, devient $= (1 - h)\,dx\,\surd(2b : (2b - x))$, dont l'intégrale eſt $(1 - h) \times (4b - 2\surd(4bb - 2bx)) =$ l'arc EN; & lorſque $x = 2b$, on aura la longueur de la demi-projettée, qui répond à la demi-épicycloïde $= 4b - 4bb$.

XIV.

Au reſte dans le cas $h = 0$, lorſque les deux cercles ſont perpendiculaires l'un à l'autre, on trouve le rayon de la ſphére, ſur la ſuperficie de laquelle l'Epicycloïde ELl eſt décrite $= \surd(aa + bb)$. D'où l'on voit qu'aucun des deux cercles ne ſauroit être un grand cercle de la ſphére; car l'un & l'autre de leurs rayons, tant a que b, eſt $< \surd(aa + bb)$.

XV.

Coroll. III. Pour trouver maintenant les cas de rectificabilité de l'Epicycloïde ſphérique; je vois d'abord que ſi dans la formule generale [§. 8] $Ll = \frac{1}{a}\,dx\,\surd((a - bh)^2 : (2b - x) + aa - 2hab + bb)$, on fait $a = bh$, elle ſe change en $Ll = \frac{1}{bh}\,dx\,\surd(bb - hhbb)$, qui à cauſe de $1 - hh = gg$, devient $g\,dx : h$; ainſi donc en intégrant ſimplement, on a la longueur de l'arc de l'Epicycloïde $= gx : h$; ce qui fait voir que chacun de ſes arcs EL, dans le cas $a = bh$, eſt à l'abſciſſe BR en raiſon donnée de g à h, c'eſt-à-dire, comme la tangente de l'inclinaiſon mutuelle du cercle mobile & de l'immobile, au ſinus total; proprieté ſi ſinguliére, que je ne ſai pas ſi aucune autre courbe peut l'avoir, c'eſt-à-dire, s'il y a aucune autre courbe dont l'abſciſſe priſe indéfiniment ſoit en raiſon donnée à ſon arc correſpondant. On a donc dans ce même rapport de g à h toute la demi-épicycloïde, au diamétre du cercle mobile ou generateur; ou, ce qui revient au même, toute la demi-épicycloïde eſt au double du diamé-

diamètre, comme $\frac{1}{2}g$ eſt à h, ce qui s'éloigne beaucoup du raport que donne M. HERMAN dans ſon premier Corollaire *, où il dit, que toute l'Epicycloïde [il entend par-là ſeulement la demi-épicycloïde] eſt au double du diamétre, comme $\surd(aa + 2hab + bb)$ à a, c'eſt-à-dire, [dans le cas $a = bb$] comme g à h, raport deux fois plus grand que le nôtre de $\frac{1}{2}g$ à h.

X V I.

De plus, comme on a trouvé ci-deſſus [§. 8] l'élement de la projection $Nn = \frac{1}{a}dx \surd((a - bh)^2 x : (2b - x) + (ah - b)^2)$, il eſt clair que cette courbe ENn eſt auſſi algebriquement rectifiable, lorſque $a = bb$; car on a alors $Nn = \frac{1}{bb}dx \surd(hbb - b)^2$ ou [à cauſe de $hh - 1 = -gg$] $= \frac{1}{bb}dx \surd g^4 bb = ggdx : h$, dont l'intégrale donne la courbe $ENn = ggx : h$. D'où l'on voit que dans ce cas l'Epicycloïde eſt à la courbe de projection correſpondante, comme $gx : h$ à $ggx : h$, ou comme 1 à g, c'eſt-à-dire, comme le ſinus total au ſinus d'inclinaiſon des cercles: & ces trois lignes, l'Epicycloïde, la Courbe de projection, & l'Abſciſſe correſpondante, ſont entr'elles comme ces trois termes pris dans le même ordre, g, gg, & h.

X V I I.

SCHOLIE I.

Ce cas où $a = bb$, eſt le ſeul qui rend l'Epicycloïde ſphérique algébriquement rectifiable; & ſi de plus les rayons des deux cercles ſont commenſurables entr'eux, c'eſt-à-dire, ſi a ou bb eſt à b, ou h à 1, ou le coſinus d'inclinaiſon des plans eſt au ſinus total comme nombre à nombre, l'Epicycloïde ſera algébrique. Mais c'eſt ici une choſe digne de remarque, qu'ayant pris à volonté pour le cercle immobile, quelqu'un

* N°. précéd. pag. 215. fig. 1.

Digitized by Google

qu'un des petits cercles de la ſphére, le cercle mobile ſera toûjours un grand cercle de la même ſphére: car ces deux cercles en ſe touchant, ont l'inclinaiſon requiſe pour que $a = bb$, comme il eſt facile de voir: car il eſt clair qu'ayant tiré des rayons des deux centres au point commun d'attouchement, on a le rayon du petit cercle, au rayon du grand, comme le coſinus d'inclinaiſon, au ſinus total, c'eſt-à-dire, a à b comme b à 1, & par conſéquent $a = bb$: ce qu'on voit auſſi par le §. 1, où les rayons du cercle immobile & du mobile a & b étant donnés, & l'inclinaiſon de leurs plans, nous avons trouvé en general le rayon de la ſphére $= \frac{1}{g}\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$; car ſi pour a on ſubſtitue bb, on aura $\frac{1}{g}\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$ $= \frac{1}{g}\sqrt{(bb - hbbb)} =$ [à cauſe de $1 - hb = gg$] $\frac{1}{g}\sqrt{(ggbb)} = b$.

SCHOLIE II.

XVIII.

On peut rendre ſenſible la maniere dont cette Epicycloïde ſphérique ſe décrit, par un exemple aſſés élégant. Concevons dans la Sphére céleſte l'Ecliptique, qui dans le point le plus bas touche le Tropique du Capricorne, faiſant avec ſon plan une inclinaiſon de 23 degrés & demi.

Maintenant on peut concevoir de deux manieres la génération de l'Epicycloïde: car, ou l'on peut ſupoſer que la Sphére & le Tropique demeurant immobiles, l'Ecliptique ſe meut en tournant ſur le Tropique, tandis que chacun de ſes points, par exemple, celui qui eſt au commencement du Capricorne, décrit l'Epicycloïde ſphérique qu'on demande: ou bien, ce qui fait le même effet, on peut ſupoſer que la Sphére entiere avec tous ſes cercles conſervant entr'eux la même ſituation, ſe meut d'un mouvement uniforme autour de l'axe du Monde d'Orient en Occident, pendant que quelque point

mobile partant du commencement du Capricorne, ſ'avance d'un mouvement propre & uniforme dans l'Ecliptique d'Occident en Orient, avec une viteſſe uniforme & égale à celle d'un des points du Tropique. Car on voit que par ce moyen le point mobile dans l'Ecliptique décrira la même courbe qui avoit été décrite de la premiere maniere. Cette ſeconde maniere a une certaine analogie avec le mouvement du Soleil, compoſé du mouvement diurne ou commun, & du mouvement propre, ſelon le Syſtéme de Ptolemée ou de Tycho: car en effet ſi le Soleil ſe mouvoit dans l'Ecliptique avec une viteſſe égale à celle qu'a le Tropique pour exécuter le mouvement diurne, & qu'ainſi le tems d'une révolution du Soleil dans l'Ecliptique fût au tems d'une révolution de la Sphére qui fait la longueur du jour naturel, dans le même rapport qu'a le rayon de l'Ecliptique ou le rayon de la Sphére au rayon du Tropique, ou comme le ſinus total au coſinus de 23 degrés & demi, le centre du Soleil décriroit exactement une de nos Epicycloïdes ſphériques algébriquement rectifiables. Mais comme le Soleil a ſon mouvement propre dans l'Ecliptique beaucoup plus lent qu'il ne faudroit pour cela, la ligne que le centre du Soleil décrit entre les deux Tropiques pendant l'eſpace d'une année, par le mouvement combiné du mouvement commun & du mouvement propre, ſera du genre des Cycloïdes allongées comme les Géométres les appellent, plutôt que du genre des Spirales ſous la forme deſquelles TYCHO les a conçues.

SCHOLIE III.

XIX.

Après tout cela, on voit comme il faut ſatisfaire au Problême de Mr. OFFENBURG, dans lequel on demande de faire à une voûte hémiſphérique des fenêtres ovales, dont le contour de chacune ſoit abſolument rectifiable. Car quoique les Epicycloïdes ſphériques, décrites ſelon la condition du Corol-

rollaire 3, n'ayent pas la forme d'ovales: cependant de deux ou pluſieurs de leurs parties jointes & diſpoſées comme il faut, on formera facilement une figure fermée & ovale, pourvu qu'on obſerve, dans la deſcription de nôtre Epicycloïde, de choiſir pour le cercle immobile quelqu'un des petits cercles de la ſphére, dont le rayon ſoit au rayon de la ſphére, comme nombre à nombre; ce qui fera qu'on aura la conſtruction géométrique de l'Epicycloïde, & tout à la fois ſa longueur abſolument rectifiable. *C. Q. F. T.*

SCHOLIE IV.

XX.

Quant à la deſcription ichnographique de l'Epicycloïde ſphérique, c'eſt-à-dire, la maniere de déterminer la courbe de projection dans un plan, en abaiſſant, de chaque point de l'Epicycloïde, des perpendiculaires ſur le plan du cercle immobile, conſideré comme la baſe; voici comment cela ſe fait. Soit décrit ſéparément [*Fig.* 2] un cercle $\alpha\lambda\beta$ égal au cercle mobile, & de quelque point fixe λ, qui répréſente le commencement de la rotation, ſoit pris un arc $\lambda\beta$ à volonté; par le point β ſoit tiré le diamétre $\beta\alpha$, auquel ſoit tirée la perpendiculaire $\lambda\tau$; enſuite du point *E* du cercle immobile, qui ſoit l'origine commune de l'Epicycloïde & de la courbe projettée qu'on veut conſtruire, ſoit pris l'arc $EB =$ l'arc $\lambda\beta$, ce qui ſe peut toûjours faire algébriquement, puiſque, comme on le ſupoſe, les rayons des cercles ſont commenſurables: enſuite du point *B* ayant mené la tangente $BS = \tau\lambda$, ſoit élevée au point *S*, dans le plan du cercle immobile, la perpendiculaire *SN* qui ſoit à $\beta\tau$, comme *h* à 1, c'eſt-à-dire, comme le ſinus du complément d'inclinaiſon des deux cercles, au ſinus total. Cela fait, le point *N* ſera dans la Courbe *ENn* de projection qu'on cherche, & ainſi on aura tant de ſes points qu'on voudra. La démonſtration eſt claire d'elle-même.

TAB. XLIX. N°. CXLII. *Fig.* 1 & 2.

Digitized by Google

REMARQUE.

XXI.

Quoique, dans la Figure qui ſert à ce Mémoire, on ſuppoſe aigu l'angle CBG qui marque l'inclinaiſon des plans, & que le calcul ait été fait pour cette ſupoſition; il faut cependant avertir, que tout ce qui en réſulte ſe peut facilement accommoder à l'hypothèſe de l'angle CBG obtus, en changeant par-tout le ſigne de la lettre h d'une ſeule dimenſion, puiſque le coſinus de l'angle obtus devient négatif, ſi auparavant on avoit ſupoſé dans l'analyſe l'aigu poſitif. D'où l'on voit que de toutes ces Epicycloïdes ſphériques, dans leſquelles l'angle d'inclinaiſon eſt obtus, il n'y en a aucune qui ſoit algébriquement ou abſolument rectifiable; car on auroit $a = -hh$, c'eſt-à-dire, le rayon du cercle mobile ſeroit négatif, & par conſéquent impoſſible: ce qui paroit auſſi, parce que le cercle mobile qui doit être un grand cercle de la ſphére [§. 17] fait toûjours néceſſairement l'angle d'inclinaiſon aigu avec les petits, pourvû que ces deux cercles ſe touchent, comme font, par exemple, l'Ecliptique & les Tropiques.

XXII.

Il faut encore remarquer que la méthode que nous venons de donner, s'aplique auſſi facilement aux Epicycloïdes ſphériques allongées & raccourcies, c'eſt-à-dire, lorſque le point décrivant L, au lieu d'être pris ſur la circonférence du cercle mobile, eſt pris au dedans ou au déhors; ou, ce qui revient au même, ſi l'on conçoit le cercle mobile ALB gliſſer au lieu de rouler, de maniere qu'un de ſes points B, pris à l'extrémité du diamétre AB, raſe continuellement la circonférence du cercle immobile EBH, pendant que quelque point L de la circonférence du cercle mobile, ſe meut d'un mouvement uniforme de B vers A paſſant par L, & avec une viteſſe qui ſoit à la viteſſe du

point

point raſant B, qui s'avance de E vers H par B, comme 1 à n, ce qui fait que [prenant le point E pour l'origine commune de l'un & l'autre mouvement & de l'Epycicloïde qu'on décrit] l'arc BL eſt à l'arc EB dans le même raport de 1 à n. Car par ce mouvement composé, le point L décrira une Epicycloïde ſphérique, allongée ſi n eſt plus grande que l'unité, & raccourcie ſi n eſt moindre ; & ſi n eſt égale à l'unité, ce ſera l'Epicycloïde ordinaire, dont nous avons parlé juſqu'ici.

XXIII.

Je dis donc que, par des calculs ſemblables aux précédens, on trouvera l'élement Nn de la courbe de projection $= \frac{1}{a} dx \sqrt{((nab - ab + ax - nbhx)^2 : (2bx - xx) + (ah - nb)^2)}$ & l'élement de l'Epicycloïde $Ll = \frac{1}{a} dx \sqrt{((nab - ab + ax - nbbx)^2 : (2bx - xx) + aa - 2nhab + nnbb)}$. Je n'entre point dans le détail des cas particuliers, on voit ſeulement qu'il n'y a rien qui puiſſe faire conclure qu'aucune de ces Epicycloïdes, ſoit allongées, ſoit raccourcies, ſoit abſolument ou algébriquement rectifiable. Pour leur conſtruction, on l'a par la maniere même dont elles ſe décrivent.

Digitized by Google

N°. CXLIII.

SUR LES COURBES ALGE'BRIQUES ET RECTIFIABLES TRACE'ES SUR UNE SURFACE SPHERIQUE.

PROBLÊME.

Décrire ſur une ſurface ſphérique une Courbe algébrique qui ſoit rectifiable.

SOLUTION.

I.

TAB. XLIX. N°. CXLII. & III. *Fig.* 3 & 4.

SOIT *RST* [*Fig.* 3 & 4] un grand Cercle de la ſphère ſupoſé parallele à l'horiſon, pour aider l'imagination, dont le centre eſt *C*. De chaque point *a*, *b*, *e*, *d*, de la courbe cherchée, ſoient conçus abaiſſées ſur le plan du cercle *RST* les perpendiculaires *aA*, *bB*, *eE*, *dD*, qui forment la courbe de projection *ABED*, dont il faut maintenant chercher la nature, & qu'il faut décrire, parce qu'on décrira enſuite facilement la courbe cherchée, en élevant perpendiculairement ſur le plan du cercle de chaque point *B* les droites *Bb* qui rencontrent la ſuperficie ſphérique dans les points *b*. Pour cela, ſoit conçue la courbe de projection *ABD* étendue ſéparément en ligne droite *αβδ*, qui ſoit comme l'axe des apliquées *αa*, *βb*, *εe*, *δd*, égales reſpectivement aux droites *Aa*, *Bb*, *Ee*, *Dd*, prenant $\alpha\beta = AB$, $\alpha\varepsilon = AE$, &c. D'où réſulte une nouvelle courbe *abed*, dont les parties *ab*, *ae*, &c. ſeront reſpectivement égales aux arcs *ab*, *ae*, &c. de la courbe ſur la ſuperficie ſphérique.

II.

II.

Cela ſupoſé, je change le Problême propoſé en celui-ci: Transformer l'axe rectiligne $\alpha\beta\delta$ en un curviligne *ABD*, de maniere qu'ayant pris un arc quelconque *AB* égal à une abſciſſe quelconque $\alpha\beta$, la hauteur *Bb* du point *b* ſur le point *B* de la projection, ſoit égale à l'apliquée d'une ligne donnée *abd*. Si donc *abd* eſt algébrique, & de plus algébriquement rectifiable, comme le ſont les droites & une infinité de Paraboles; de plus, ſi parmi toutes les lignes *abd*, il s'en trouve quelqu'une qui admette un axe courbe *ABD* conſtruſible algébriquement, l'on voit que cette courbe décrite ſur la ſurface de la ſphére, dont *ABD* eſt la projection, ſera algébrique, & algébriquement rectifiable, comme ayant chacun de ſes arcs égaux à chaque *ab*.

III.

Prenons donc la plus ſimple de toutes les lignes algébriques rectifiables *abd*, ſavoir la ligne droite [que je trouve très propre à nôtre deſſein, car une autre, comme la ſeconde Parabole cubicale, qui eſt auſſi rectifiable, ne réuſſit pas]. Ayant tiré *df* parallele à l'axe $\delta\alpha$, ſoit la raiſon de *af* à *fd* comme 1 à *n*, & ainſi $fa : da = 1 : \sqrt{(nn+1)}$, ou [faiſant $nn+1=mm$] $af : da = 1 : m$. Maintenant, pour changer l'axe rectiligne $\alpha\beta\delta$ dans le curviligne *ABD*, ayant tiré du centre *C* les rayons infiniment proches *CS*, *CT*, qui coupent la courbe *ABD*, dans les points *B*, *E*, & prenant *R* pour le commencement des arcs variables *RS*, *RT*, &c. ſoit fait $RS=x$, $CB=y$, le rayon $CS=1$, $ST=dx$, $FE=dy$; ayant décrit le petit arc concentrique *BF* qui ſera $=ydx$, on aura $BE=\sqrt{(yydx^2+dy^2)}=\beta\epsilon$, la hauteur du point *b* ſur le plan du cercle, c'eſt-à-dire $bB=\sqrt{(1-yy)}$, & ſa différence $d(bB)=-ydy:\sqrt{(1-yy)}$.

IV.

Puiſque donc $d(bB) : BE = af : df = 1 : n$, l'on aura $\frac{-ydy}{\sqrt{(1-yy)}} : \sqrt{(yydx^2 + dy^2)} = 1 : n$; & $\sqrt{(yydx^2 + dy^2)} = -nydy : \sqrt{(1-yy)}$, ou $yydx^2 + dy^2 = nnyydy^2 : (1-yy)$. Donc $yydx^2 = nnyydy^2 : (1-yy) - dy^2 = ((nn+1)yydy^2 - dy^2) : (1-yy)$, & par là on aura $dx = dy\sqrt{((nn+1)yy-1)} : y\sqrt{(1-yy)} =$ [à cauſe de $nn+1 = mm$] $dy\sqrt{(mmyy-1)} : y\sqrt{(1-yy)} = (mmyydy - dy) : y\sqrt{((1-yy).(mmyy-1))} = mmydy : \sqrt{((1-yy).(mmyy-1))} - dy : y\sqrt{((1-yy).(mmyy-1))}$.

V.

La premiere partie s'intègre comme il ſuit. Soit fait $yy = 2z$, & l'on aura $mmydy : \sqrt{((1-yy).(mmyy-1))} = mmdz : \sqrt{((1-2z).(2mmz-1))} = mmdz.\sqrt{(-1+(2mm+2)z - 4mmzz)} = mmdz : \sqrt{((mm-1)^2 : 4mm - (2mz - (mm+1) : 2m)^2)} = \frac{2m^3dz : (mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{4mm}{mm-1}z - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ [en ſubſtituant pour $2z$ ſa valeur yy] $\frac{2m^3ydy : (mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}} = \frac{\frac{1}{2}m \times 4mmydy : (mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$: Donc $\int \frac{mmydy}{\sqrt{((1-yy)\times(mmyy-1))}} = \frac{1}{2}m\int \frac{4mmydy : (mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ c'eſt-à-dire, = à un arc de cercle pris $\frac{1}{2}m$ fois, dont le rayon $= 1$, & le ſinus droit $= \frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1}$: ſoit apellé cet arc A.

VI.

Digitized by Google

VI.

L'autre partie $-dy : y\sqrt{((1-yy)\times(mmyy-1))}$ s'intégre de cette maniere: ſoit diviſé chaque terme par y^2, l'on a $\frac{-dy:y^2}{\sqrt{((1:yy-1)(mm-1:yy))}} =$ [faiſant $1 : yy = 2z$] $dz : \sqrt{((2z-1)(mm-2z))} = dz : \sqrt{(-mm+(2mm+2)z-4zz)} = dz : \sqrt{(\frac{1}{4}(mm-1)^2-(2z-\frac{1}{2}(mm+1))^2)}$ $= \frac{2dz:(mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{4}{mm-1}z-\frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ [en ſubſtituant pour $2z$ ſa valeur qui eſt ici yy] $\frac{-2dy:y^3(mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2}{(mm-1)yy}-\frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ $= \frac{\frac{1}{2}\cdot -4dy:y^3(mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2}{(mm-1)yy}-\frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$. Donc $\int(-dy : y\sqrt{((1-yy)}:$ $(mmyy-1)) = \frac{1}{2}\int\frac{-4dy:y^3(mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2}{(mm-1)yy}-\frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ c'eſt-à-dire = à la moitié d'un arc de cercle dont le rayon $= 1$ & le ſinus droit $= 2:(mm-1)yy-(mm+1):(mm-1)$; Soit apellé cet arc B.

VII.

Nous avons donc, par les §. 5 & 6, $\frac{1}{2}mA+\frac{1}{2}B = \int(mmydy : \sqrt{((1-yy)(mmyy-1))} - dy : y\sqrt{((1-yy)(mmyy-1))})$ $=$ [§. 4] $\int(dy\sqrt{((mm+1)yy-1)} : y\sqrt{(1-yy)}) = \int dx$, ou $mA+B = 2\int dx = 2x$.

VIII.

Pour la conſtruction de cette Equation, voici comme il faut s'y prendre. Soit SLM [Fig. 5.] encore un grand cercle de la ſphére, dont le rayon $CL = 1$; ſoit pris dedans le ſinus MN TAB. XLIX. Nº CXLII. & CXLIII. Fig. 5.

 =

Digitized by Google

$= (2mmyy - mm - 1) : (mm - 1)$, & encore l'autre ſinus SR $= (2 : yy - mm - 1) : (mm - 1)$, l'on aura l'arc $LM = A$ & l'arc $LS = B$. Si donc on prend l'arc LM, m fois, & qu'on lui ajoute l'arc LS, la moitié de la ſomme des deux arcs donnera l'arc cherché x, ou [dans la *Fig.* 3] l'arc RS pour un y quelconque, ou CB.

I X.

Pour avoir une équation algébrique entre y & le ſinus de l'arc x qui détermine la nature de la courbe de projection ABD [*Fig.* 3] & la courbe algébriquement rectifiable ſur la ſurface ſphérique, il faut choiſir pour m quelque nombre rationel [car on aura différentes courbes ſelon la diverſité du nombre m]. On ſait que le ſinus d'un arc A étant donné, l'on a algébriquement le ſinus d'un arc mA multiple ou ſoûmultiple, & que les ſinus des arcs mA & B étant donnés, l'on a algébriquement le ſinus de la ſomme des arcs $mA + B$, & le ſinus de la moitié de cette ſomme. Car faiſant le rayon, ou ſinus total $= 1$, le ſinus de l'arc $mA = S$, & le ſinus de l'arc $B = T$, l'on trouve le ſinus de la ſomme $mA + B = T \times \sqrt{(1 - SS)} + S\sqrt{(1 - TT)}$.

Ainſi donc ſi l'on apelle v le ſinus de l'arc indéterminé x; l'on aura le ſinus de l'arc double $2x = 2v\sqrt{(1 - vv)}$; puiſque donc les arcs $mA + B$ & $2x$ doivent être égaux, il faut que leurs ſinus ſoient auſſi égaux; d'où l'on tirera l'Equation algébrique entre les fonctions de y & v, qui déterminera la nature de la courbe de projection, & la courbe que l'on cherche ſur la ſurface de la ſphére, & qui ſera celle-ci, $T \times \sqrt{(1 - SS)} + S \times \sqrt{(1 - TT)} = 2v\sqrt{(1 - vv)}$; S & T étant données par y. Donc, &c. *C. Q. F. T.*

X.

Exemple. Soit pris le nombre $m = 2$, & par conſéquent $n =$

$n = \sqrt{(mm - 1)} = \sqrt{3}$; l'on aura le ſinus de l'arc A, ou $(2mmyy - mm - 1) : (mm - 1) = (8yy - 5) : 3$; le ſinus de l'arc B, ou $(2 : yy - mm - 1) : (mm - 1) = (2 - 5yy) : 3yy$; le ſinus de l'arc mA, ou $2A = \frac{16yy - 10}{3} \sqrt{\frac{-16 + 80yy - 64y^4}{9}}$, & partant le ſinus de la ſomme des arcs $2A + B = \frac{2 - 5yy}{3yy} \times \sqrt{\left(1 - \frac{(16yy - 10)^2 \times (-16 + 80yy - 64y^4)}{81}\right)} + \frac{16yy - 10}{3} \times \sqrt{\frac{-16 + 80yy - 64y^4}{9}} \times \sqrt{\left(1 - \frac{(2 - 5yy)^2}{9y^4}\right)} = 2v\sqrt{(1 - vv)}$; ou, parce que la derniére partie du premier membre a deux côtés commenſurables, on peut abréger l'équation de cette maniere $\frac{2 - 5yy}{27yy} \times \sqrt{(81 - (16yy - 10)^2 \times (-16 + 80yy - 64y^4))} + \frac{32yy - 20}{27yy} \sqrt{(-4 + 20yy - 16y^4)} = 2v\sqrt{(1 - vv)}$, & cette équation eſt celle qui exprime la nature de la courbe de projection, de tous les points de laquelle ſi l'on éléve les droites $= \sqrt{(1 - yy)}$ perpendiculaires au plan ſur lequel elle eſt décrite, ces perpendiculaires rencontreront la ſurperficie de la ſphére dans les points de la courbe qu'on cherche, qui ſera algébriquement rectifiable, auſſi-bien que ſa projettée; car la différence de la hauteur de deux perpendiculaires, dont chacune eſt exprimée par ſon $\sqrt{(1 - yy)}$, eſt à l'arc de la courbe de projection intercepté entre ces deux hauteurs, comme 1 à n, c'eſt-à-dire, [à cauſe de $n = \sqrt{(mm - 1)}$] comme 1 à $\sqrt{3}$; & cette même différence de hauteurs eſt à l'arc de la courbe décrite ſur la ſuperficie ſphérique, interceptè entr'elles, comme 1 à $\sqrt{(1 + nn)}$, c'eſt-à-dire, dans cet exemple, comme 1 à 2. Ainſi chaque arc de la projettée eſt à ſon arc correſpondant ſur la ſuperficie ſphérique, comme $\sqrt{3}$ à 2, ou comme la hauteur du triangle équilateral à ſon côté. L'on aura donc entre l'arc ſur la ſuperficie ſphérique, l'arc correſpondant de la projection, & la différence des hauteurs perpendiculaires, les raports qui ſont entre 2, $\sqrt{3}$, & 1.

Scholie. L'on voit par-là que les courbes que nous venons de trouver par la méthode analytique, ſont les mêmes que les Epicycloïdes ſphériques, décrites par un grand cercle de la ſphére qui tourne ſur un petit; car j'ai fait voir dans le §. 16 *, des Epicycloïdes ſphériques, que ces ſortes d'Epicycloïdes ont chacun de leurs arcs aux arcs correſpondans de la courbe de projection en raiſon donnée de 1 à g, ou comme le ſinus total eſt au ſinus de l'inclinaiſon du cercle mobile ſur l'immobile. Si donc nous voulons conſtruire ſur la ſuperficie de la ſphére une courbe dont la longueur ait une raiſon donnée à la longueur de ſa projettée, par exemple, de 2 à $\sqrt{3}$, il faut ſeulement pour le cercle immobile, prendre celui qui fait avec un grand cercle mobile, un angle d'inclinaiſon, tel que 1 à g ſoit dans le raport de 2 à $\sqrt{3}$, ou de 1 à $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Or c'eſt l'angle que forment deux côtés d'un triangle équilateral, ſavoir, $\frac{2}{3}$ d'un angle droit, ou l'angle de 60 degrés. Concevons donc, dans la Sphére, un Tropique éloigné de l'Equateur de 60 degrés, & faiſant tourner ſur lui l'Ecliptique, un point pris dans ſa circonférence décrira la courbe qu'on cherche, qui ſatisfait à cette prolixe équation que nous avons trouvée ci deſſus, $\frac{2-5yy}{27yy}\sqrt{(81-(16yy-10)^2\ \&c)}+\frac{32yy-20}{27yy}\sqrt{(-4+\&c)}=2v\sqrt{(1-vv)}$. Et il paroit preſque incroyable qu'on puiſſe conſtruire une équation ſi compoſée par un mouvement ſi ſimple.

Au reſte, l'on voit que dans cette ſuppoſition, l'Ecliptique ſera double du Tropique, & que par conſéquent il devra le parcourir deux fois, avant que le point décrivant revienne au point d'où il eſt parti; & la longueur de la demi-Epicycloïde ſera double de la plus grande hauteur ou de la diſtance entre les Tropiques, & par conſéquent la longueur de l'Epicycloïde entiere ſera égale à quatre fois cette diſtance. Cette courbe [comme il eſt facile de le voir par la maniere dont elle ſe produit] a quatre parties ſemblables & égales, terminées aux quatre points qu'on apelle Cardinaux; la 1e. compri-

* N°. preced. pag. 224.

Digitized by Google

compriſe entre le point du Solſtice d'Hiver [ſi l'on ſupoſe que la rotation de l'Ecliptique ſe fait d'Orient en Occident] & le point équinoxial d'Automne; la 2e. entre ce point & le Solſtice d'Eté; la 3e. entre le Solſtice d'Eté & l'Equinoxe du Printems; la 4e. enfin entre l'Equinoxe du Printems & le Solſtice d'Hiver: & ainſi la longueur de chacune de ces parties eſt égale à l'intervalle entre les Tropiques; c'eſt-à-dire, à la corde de 120 degrés; en ſupoſant toûjours, comme nous avons fait dans cet exemple, le Tropique éloigné de l'Equateur de 60 degrés.

Cet Exemple, qui paroit le moins compliqué de tous, me fait tellement craindre les autres, qui ſans doute demanderoient un travail immenſe, pour trouver l'équation algébrique des courbes de projection, que j'aime mieux les laiſſer chercher à d'autres: Il me ſuffit d'avoir trouvé la méthode, & de l'avoir indiquée.

Nº. CXLIV.

EXCERPTUM

EX

THEORIA GENERALI MOTUUM,

Auctore *Jac.* HERMANNO.

EX ſimilibus principiis varia alia Problemata facilem ſolutionem admittunt. Ut *ſi corpus B in curva quacunque CB gravitate ſua deſcendat, poſt ſe tamen trahens alterum minus corpus A filo ACB ſuper trochleam C mobile annexum, quodque aſcendere cogatur in altera curva AC, & quærantur celeritates horum corporum ubivis acquiſitæ:* analyſis inſtitui poteſt ut ſequetur, poſtquam lineis & lineolis ad rem facientibus nomina dederimus. Sint ergo CB $= x$, EB $= y$, elem. curvæ Bb $= ds$, Bn $= dx$, & BO $= dy$, celeritas in curvæ puncto B $= u$, celeritas corporis A in directione AC $= v$; item am $= dp = dx$; al $= dq$ & Aa $= dr$.

Comment. Acad. Petrop. Tom. II. pag. 168. §. 31. TAB. XLIX. Nº. CXLV. *Fig.* 3.

Sunt vero A m & *b* n arculi centro C deſcripti, & A l ac b o lineolæ horizontali D E parallelæ. His poſitis, ita argumentor.

1. Inquiro in potentiam qua corpus B propter gravitatem urgetur ſecundum directionem bB: ad id, dico ut B b [ds] ad Bo [dy], ita pondus B ad $Bdy : ds$, & hæc eſt potentia qua gravitas corpus B urget ſecundum bB: ſed nondum eſt tota vis accelerans; nam corpus A gravitate ſua ipſi reſiſtit.

2. Propter ſimilem rationem $Ady : dr$ eſt potentia quæ corpus A propter gravitatem ſuam urget juxta A a, & ſi fiat A a [dr] : m a [dp] $=$ $(Adq : dr) : (Adpdq : dr^2)$, hoc exponet potentiam qua filum Ca vel BC trahitur ex B in C. Dicatur præterea Bb [ds] : B n [dx] $= (Adpdq : dr^2) : (Adqdpdx : dr^2 ds)$, & hæc ultima fractio exponit reſiſtentiam, quam deſcendens corpus B ab altero A in directione bB ſubit. Hanc ob cauſam potentia mobile B accelerans reperitur $= Bdy : ds - Adpdqdx : dr^2 ds$.

3. Incrementum celeritatis in A C vel C D eſt $= dv$, adeoque incrementum celeritatis corpori A competentis in directione b B $= dxdv : ds = vdv : u$, quia $u : v = ds : dx$; ergo quantitas motus in utroque corpore geniti $= Bdu + Avdv : u$.

4. Cum potentia accelerans ducta in tempuſculum $ds : u$, producat motus quantitatem $Bdu + Avdv : u$, habebimus $Bdy : u - Adpdqdx : udr^2$ $= Bdu + Avdv : u$, atque adeo $Bdy - Adpdqdx : dr^2 = Budu + Avdv$, & ſumtis integralibus $By - \int(Adpdqdx : dr^2) = \frac{1}{2} Buu + \frac{1}{2} Avv$ [vel propter $v = udx : ds$] $= \frac{1}{2} Buu + \frac{1}{2} Auudx^2 : ds^2$. Atque hinc elicitur $uu = (2By - 2\int(Adp^2 dq : dr^2))\, ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$. Quare ſi fiat $TV = (By - \int(Adp^2 dq : dr^2))\, ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$, & grave libere cadat ex hac altitudine T V, in V acquiret tantam celeritatem, quantam corpus B acquiſivit in curva CB.

Si curva C A fiat linea recta verticalis parallela ipſi E B, ſingulæ dp, dq, & dr fient $= dx$, & habebimus hoc caſu $TV = (By - Ax)$ $ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$.

Hoc unum eſt ex Theorematis illis, qua Vir Celeb. *Joh.* BERNOULLI literis XI Octob. 1727 datis, ſine demonſtratione miſit *, & ex conſervatione virium vivarum ipſe deduxit.

* Supra N°. CXXXVII. pag. 125.

D E

N°. CXLV.

DE VERA NOTIONE VIRIUM VIVARUM EARUMQUE USU IN DYNAMICIS,

Oſtenſo per exemplum, propoſitum in Comment. Petropolit. *Tomi II.* pag. 200.

DISSERTATIO;

Autore *Joh.* BERNOULLI.

I.

POſtquam Geometræ vidiſſent Diatriben meam *de Motu*, A. 1726 Gallice editam *, in eaque explicationem claram naturæ virium vivarum, non defuerunt, qui, præjudiciis depoſitis, ſtatim tranſirent ad noſtra caſtra. Vis viva non conſiſtit in actuali exercitio, ſed in *facultate agendi* : ſubſiſtit enim, etiamſi non agat, neque habeat, in quod agat. Sic, exempli gratiâ, Elaſtrum tenſum, vel etiam corpus in motu conſtitutum, habet in ſe agendi facultatem, etiamſi extra ſe nihil inveniat, in quod ſuam facultatem exercere poſſit, &, quamdiu nihil adeſt cum quo illam communicet, retinet utique totam, tamdiu ſubſiſtens, & non efficiens quod efficere poſſet, ſi agendi occaſionem haberet. *Acta Erud. Lipſ.* 1735. Maj. pag. 210.

II.

Elaſtrum quippe tenſum, quamdiu tenſum eſt, vel corpus in motu æquabili poſitum, quamdiu nulli alii externo occurrit,

* Supra N°. CXXXV. pag. 1.

Digitized by Google

rit, non poſſunt dici agere; nam nihil aliud faciunt, quam perſeverare in ſuo præſenti ſtatu: jam vero omnis actio ſupponit mutationem ſtatus in agente, & perſeverare in ſtatu ſuo non eſt mutari. Adeoque elaſtrum tenſum, quamvis continuum habeat niſum ſe ſe expandendi, nihil tamen agit, quia irritus redditur conatus; donec demum vinculo ſoluto effectus ſubſequatur, per amolitionem corporis quod, ſe ſe dilatando, in motum concitat. Ita quoque corpus viciſſim, data velocitate motum, nondum agit, quia in eo nulla fit mutatio ſtatus, atque in ſe retinet omnem ſuam agendi facultatem, ſeu omnem ſuam vim vivam; donec vel in elaſtrum tendendum incurrat, vel habeat occaſionem, occurſu in alia corpora, mutandi illam ſuam vim; quod fit vel transferendo in hæc alia corpora, ſeu totam, ſeu partem; vel accipiendo ab his majorem, quam habuerat, pro diverſitate circumſtantiarum.

III.

Hinc patet, *vim vivam* [quæ aptius vocaretur *facultas agendi*, Gallice le *pouvoir*] eſſe aliquid reale & ſubſtantiale, quod per ſe ſubſiſtit, &, quantum in ſe eſt, non dependet ab alio. Unde concludimus, quamlibet vim vivam habere ſuam determinatam quantitatem, de qua nihil perire poteſt, quod non in effectu edito reperiatur. Hinc ſponte fluit, vim vivam ſemper conſervari; adeo ut quæ ante actionem reſidebat in uno pluribuſve corporibus, nunc poſt actionem reperiatur neceſſario in alio, vel aliis pluribus corporibus, niſi quid in prioribus remanſerit. Atque hoc eſt, quod vocamus *conſervationem virium vivarum.*

IV.

Vis mortua nihil aliud eſt, quam ſolicitatio, qua corpus ad motus accelerationem vel retardationem urgetur; ſicuti gravitas, quæ incitat corpora ad deſcenſum & deſcendentia accelerat, aſcendentibus vero reſiſtit eorumque motum retardat.

In

Digitized by Google

In genere vis mortua vocari poteſt *preſſio*. Differunt autem toto genere vis viva & vis mortua. Illa, ceu vidimus, exiſtit & ſubſiſtit independenter ab omni alio corpore, ita ut nihil requirat extra ſe ad exiſtentiæ ſuæ continuationem, vel perſeverantiam. Eſt igitur vis viva aliquid abſolutum & ſine correlato. Altera vero, nempe vis mortua, ſeu preſſio, eſt relativum quid, quod ſupponit duo a ſe invicem diverſa, ſcilicet cauſam prementem, undecunque illa veniat, & deinde corpus quod premitur. Ceſſante cauſa premente, ceſſat & ipſa preſſio; perit enim effectus cum cauſa, niſi quatenus corpus cedit prementi, & ſucceſſive in motum concitatur, quo ipſo generatur vis viva in corpore aliquandiu preſſo, quæ ſemel generata fit ſubſtantialis, ac perire vel diminui nequit, quin tantundem, quantum periiſſe viſum eſt, in aliud vel alia corpora tranſierit.

V.

Confundunt Adverſarii ambo genera virium; quia vident ex libera actione vis mortuæ generari in corpore [actionem iſtam in ſe recipiente] vim vivam, dum ex quiete in motum perducitur, majorem vel minorem, prout cauſa premens fortius & diutius, vel debilius & brevius in illud agit. Sed perinde faciunt ac ſi vellent confundere lineam cum ſuperficie, ideo quia per motum lineæ deſcribitur ſuperficies. Vis mortua libere agere dicitur, quando corpus, quod ab ea premitur, preſſioni obſequitur, & præter inertiam ſuam prementi nihil opponit.

VI.

Corpus continuo preſſum, & a quiete ad motum accelerando perductum ope elaſtri, donec hoc per ſui dilatationem omnem ſuam vim exhauſerit, atque gradatim in corpus propulſum tranſtulerit, merito dicitur corpus in tali vel tali motu uniformi finaliter acquiſito conſtitutum, quod ab initio quieverat, poſſidere ſolum omnem vim vivam, quam ab elaſtro [cui

[cui nihil amplius remanet virium,] accepit. Dictat hoc clarus conceptus, quem habemus de perfecta æqualitate inter cauſam efficientem atque effectum plenum & adæquatum. Extrinſecus enim nihil aliud datur, ut ſupponimus, præter corpus, quod partem aliquam virium elaſtri in ſe recipiendo inſumat.

VII.

Hæc ipſa perfecta æqualitas inter cauſam & effectum porro confirmatur, ſi attendimus, quid fiat, ſi, jam mutato effectu in cauſam, corpus cum acquiſita ſua velocitate in directionem contrariam vertatur, ita ut in elaſtrum laxatum recurrat. An non vel ſolo rationis lumine percipimus, elaſtrum in priſtinum tenſionis ſtatum reſtitutum iri, poſtquam omnis motus in corpore ab elaſtri reſiſtentia abſumtus fuerit? atque ita alternatim accipere poſſunt reddereque viciſſim.

VIII.

Quod ſi elaſtrum aliquod per ſui dilatationem duo plurave corpora in motum dederit, quocunque id fiat modo, ſive ſimul, ſive unum poſt alterum; dicendum eſt omnino, omnium iſtorum corporum vires vivas junctim ſumtas æquivalere vi toti, quæ in elaſtro reſidebat, adeoque & ei vi corporis unici, in quo ſolo movendo elaſtrum ſuam vim totam exhauſiſſet. Hoc verum eſſe ſuadet axioma de æqualitate inter totum & partes omnes ſimul ſumtas. Diſtribuit enim pluribus, quod uni ſoli dare potuiſſet.

IX.

Poteſt motus in quolibet corpore conſiderari tanquam productus ab actione alicujus elaterii, quod vim ſuam in movendo corpore conſumſit. Quare, ſi corpora perfecte elaſtica & in motu conſtituta ſibi mutuo quomodocunque occurrant,

eorum velocitates poſt occurſum ita mutabuntur, ut vires vivæ omnium ſimul ſumtæ fiant æquales illis aliis ſimul ſumtis, quas eadem corpora ante occurſum habebant, atque in hoc conſiſtit conſervatio virium vivarum. Si corpora non ſunt perfecte elaſtica, aliqua pars virium vivarum, quæ periiſſe videtur, conſumitur in compreſſione corporum, quando perfecte ſe non reſtituunt; a quo autem nunc abſtrahimus, concipientes, compreſſionem illam eſſe ſimilem compreſſioni elaſtri, quod poſt tenſionem factam impediretur ab aliquo retinaculo, quo minus ſe rurſus dilatare poſſet, & ſic non redderet, ſed in ſe retineret vim vivam, quam a corpore incurrente accepiſſet; unde nihil virium periret, etſi periiſſe videretur.

X.

Qui ex non intellecta vera natura virium vivarum earundem theoriam rejiciunt, hoc unico nituntur fundamento, quod in æſtimatione earum virium nulla habeatur ratio temporis ab illis, qui per effectus homogeneos de quantitate virium judicandum eſſe contendunt. Sed ineptum eſt, aliter judicare de quantitate alicujus rei per ſe actu exiſtentis, quam per determinatam menſuram, quæ aliquoties ſumta totum exhaurit; neque attinet, quo tempore durante illa menſuratio perficiatur, neque qualis adhibeatur menſura, major an minor; ſufficit ex partibus notis ſimul ſumtis colligi poſſe totum ignotum.

XI.

Finge, ut aptiſſimo ſimili utar, agi de inveſtiganda capacitate crateris aqua pleni: diceres ſane, & recte quidem, metiendam eſſe quantitatem aquæ in cratere contentæ per datam quandam menſuram. Quid ſi autem alius tibi diceret, cognoſci prius debere, quanto tempore canalis aquam ſuppeditans impleverit craterem, aut quantæ ſit amplitudinis epiſtomium, per quod, obturato jam canali, aqua emitti debeat, aut ſi

Digitized by Google

aliam ejuſmodi circumſtantiam, quæ ad rem nihil facit, urgeret, rideres profecto objectionem riſu digniſſimam. Jam enim non agitur de modo, quo crater fuerit impletus, utrum citius hoc factum per canalem ampliorem, an tardius per anguſtiorem, neque an prompte emittatur aqua per largiorem effluxum, an lentius per epiſtomium anguſtius effluendo. Obſtrue modo canalem, & adeſt præſens aquæ copia in cratere; hanc ergo metire, prompte an tarde, nihil intereſt; invenies ſemper eandem aquæ quantitatem. Modus impletionis repræſentat modum generationis vis vivæ in corpore; modus vero depletionis, metiendi gratia inſtitutæ, haud male refert modum qualemcunque transferendi vim vivam ex uno corpore in alia æqualia inter ſe, & æquali celeritate donanda, tanquam ad menſuras æquales, ex quarum numero judicare poſſis de quantitate totius.

XII.

Dubitasne unum eundemque effectum, plenum & adæquatum, variis modis produci poſſe, ſive reſpexeris ad tempus, ſive ad alias circumſtantias modales? Idem ſane manebit effectus ratione quantitatis, ſi nimirum ab eadem vel æquali cauſa fuerit productus, hæcque in producendo ſe totam exhauſerit. Etenim tum demum dici poteſt, jam eſſe in effectu quicquid fuerat in cauſa. Ex partium quarumdam menſura nondum judicari poteſt de quantitate totius, ſed tum demum, quando certum eſt, omnes haberi partes, & nullam de toto remanſiſſe, quæ non ſubierit menſuram. De hoc ſi conſtat, nihil amplius pro vera exigitur menſura. De modo & tempore menſurationis, non eſt cur ſis ſollicitus; hoc quippe in eventu nec auget nec minuit quantum ipſum. De opulentia hominis male judicares ab ejus expenſis quotidianis; prodigus quippe largiori manu expendit, quam alius multo opulentior, qui parſimoniæ ſtudet. De eorum ergo opulentia ut recte judices, oportet noſſe & in numerato habere utriuſque facultatum ſummas totales.

XIII.

Digitized by Google

XIII.

Claram ideam habebimus de viribus vivis æſtimandis, ſi commodum aliquod exemplum eligamus. Concipe igitur quatuor elaſtra perfecte æqualia, & æqualiter tenſa; haud utique negabis, ſingula ſeorſim præſtare poſſe quartam partem ejus, quod poſſunt omnia junctim ſumta. Unum quodque enim tantundem contribuit ad totalem effectum, quantum quodlibet ex reliquis, nempe ſuam ſymbolam, quæ eſt quarta pars totius; poſito ſcilicet, unumquodque id unicum agere, ut vim ſuam exhauriat in promovendo aliquo corpore. Hoc corpus proinde ab initio ſine motu exiſtens, nunc motum habens ab elaſtris, habebit vim, quæ viva dicitur, conſiſtens in facultate reddendi elaſtris id quod ab iis accepit, nimirum vim, qua rediguntur ad priſtinum tenſionis gradum. Fateberis ergo mecum, ſingula elaſtra participare pro quarta parte effectus totius, quem omnia junctim produxerunt: quid clarius? Si hoc negas, contra diem loqueris.

XIV.

Videamus autem, quam diverſis modis, quamque diverſo tempore, hic idem effectus produci poſſit. Sint primo quatuor illa elaſtra ordine collocata in una recta linea, unum ante alterum, [Fig. 1. n°. 1.] ita ut extremitas ſiniſtra fulciatur in obice fixo L, dextra vero ad corpus quieſcens A, mox movendum ab actione elaſtrorum. Deinde ſint illa quatuor elaſtra poſita, ut videre eſt n°. 2. ubi nimirum duo tantum in recta linea unum ante alterum, ſed duo hujuſmodi paria juxta ſe invicem, a ſiniſtro extremo in obicem firmum M, a dextro in corpus B æquale ipſi A, nituntur. Denique quatuor noſtra elaſtra n°. 3 diſponantur ſingulatim juxta ſe mutuo, habeantque crura ſiniſtra ſuffulta ab obice immobili N, dextra antea ſimul omnia innixa corpori C æquali ipſi B vel A.

TAB. XLIX. N°. CXLV. Fig. 1.

Digitized by Google

X V.

His ita poſitis, concipe porro, ſolvi elaſtra, ita ut eorum preſſiones continuo exerantur, ſive mediate, ſive immediate, in corpora A, B, C; hæcque proinde moveri incipiant, & accelerando pergant; donec, peracta omnimoda dilatatione elaſtrorum, corpora accelerari ceſſent, ac, maxima acquiſita velocitate, in motu ſuo uniformi continuent. Quid nunc cenſes de quantitate virium vivarum in iſta corpora translatarum? erunt utique in ſingulis tribus caſibus æquales; & quidni eſſent? quandoquidem unumquodque corporum A, B, C, in ſe recipit effectum quatuor elaſtrorum, quorum unum nec plus nec minus poteſt quam alterum, & ſingula vim ſuam integram transmiſerunt ad movenda ſua reſpective corpora: nihil enim, præter corpora, adeſt, cui aliquid impertiri poſſit. Abſtrahimus ſcilicet a materia ipſa elaſtrorum, quæ quidem etiam movenda eſt, ſed quam tanquam nullam vel admodum parvam ſupponimus, ita ut nihil in illis præter eorum virtutem elaſticam conſideremus. Elaſtra itaque æqualia, & ad æqualem gradum tenſa, ſumi poſſunt pro menſura communi virium vivarum in corporibus generatarum, vel adhuc generandarum.

X V I.

Quod nunc attinet ad velocitates corporum in triplici noſtro caſu expoſito, illæ profecto non poſſunt non eſſe æquales, ob æqualitatem, tam corporum, quam virium ab æquali numero elaſtrorum impreſſarum. Interim tempora, in quibus illæ vires ſunt productæ, ſunt valde inæqualia; habent enim rationem inter ſe, ut 4, 2, 1, hoc eſt, corpus A acquirit ſuam vim & maximam velocitatem tempore duplo longiori quam corpus B, & hoc duplo longiori quam C. Cujus veritas demonſtrari poteſt per vulgaria principia dynamica, ab ipſis quoque Adverſariis recepta.

Digitized by Google

XVII.

Sunt etiam preſſiones inæquales, quibus corpora A, B, C, continuo urgentur. Sunt namque, quod manifeſtum eſt, in ſingulis dilatationibus ſimilibus elaſtrorum reciproce, ut 1, 2, 4. Corpus enim A in caſu primo haud aliter premitur, quam n°. 4. corpus D premeretur ab unico elaſtro, a quo unico reciperet vim vivam, quæ tantum quartam partem conſtitueret ejus, quam recipit A a quatuor elaſtris; id quod ex dictis ſatis ſuperque patet. TAB. XLIX. N°. CXLV. *Fig.* 1.

XVIII.

Igitur, non obſtante diverſitate cum temporum, tum preſſionum, corpora noſtra A, B, C, æqualia eandem vim vivam, eandemque proin velocitatem acquirunt; adeo ut vi viva ſemel transfuſa in corpus, verbi gratia, A, amplius non quæri debeat quomodo, vel quanto tempore fuerit generata; an primo, an ſecundo, an tertio modo:

Unde habeat, quærat nemo; ſed oportet habere.

Id duntaxat conſiderari debet, quot requirantur elaſtra datæ tenſionis ad hunc vel illum motum excitandum in dato corpore; nec refert, quo ordine, qua arte, qua lege, elaſtra diſponantur, modo agant tantum in corpus promovendum, eique unico vires ſuas largiantur, & nihil aliorſum prodigant. Vis elaſtri tenſi eſt aliquid reale, quod ſubſiſtit, quod permanet, quamdiu vinculo coercetur; modus vero elaſtra applicandi, & tempus, quod in agendo inſumitur, dependent ab arbitrio applicantis, & ſunt mere accidentalia, quæ ad rem ipſam non pertinent, & quæ poſt peractam motus generationem pereunt, nullaque ſui veſtigia relinquunt. Verumenim vero, quod eſſentiale eſt, nempe vis viva in corpore genita, non perit, ſed permanet, donec tranſeat in aliud, vel tota, ut nihil ſibi relinquatur, vel in tantum, ſi nimirum pars ſolummodo tranſit; hæc cum reliqua, quæ ſupereſt in priori, ſemper conficiet totum.

XIX.

X I X.

Hinc in communicatione motus corporum in ſe invicem impingentium, vel etiam in varia modificatione motus partium unius ejuſdemque corporis à vi propria pendente, ubi nihil perire poteſt ſine æquali effectu, pro fundamento & principio univerſali poni debet *conſervatio virium vivarum*, hoc eſt, illius facultatis agendi, quæ ſola eſt interna, realis, & perſeverans in exiſtentia ſua, ac quæ habet determinatam ſuam quantitatem vel menſuram independentem ab omni modificatione externa, ut ſunt tempora & preſſiones: ſicuti vidimus, æqualem vim datam eſſe tribus corporibus A, B, C, ideo tantum, quia æqualis cauſa illam in ſingulis produxit, nempe vis quatuor elaſtrorum, licet id factum ſit tribus diverſis modis, ratione tam temporis quam preſſionis. Quod ſi præterea aliud quæris, næ! idem facis, ac ſi ad æſtimandam aquæ quantitatem in cratere contentam, præter actualem menſuram, attendere velles ad amplitudinem canalis, qui craterem implevit, vel ad tempus quod in implendo fuit inſumptum. Deſine igitur quærere nodum in ſcirpo.

X X.

Reſtat tandem, ut explicemus, quantam habeant vim vivam corpora, quæ diverſa velocitate moventur. Nam ea, quæ habent velocitates æquales, palam eſt & extra controverſiam gaudere viribus vivis in ratione maſſarum; ſed ſi velocitates ſunt inæquales, erit in quolibet corpore vis viva, ſeu, quæ in illo eſt, facultas agendi, [quamvis actu ipſo non agat,] in ratione compoſita maſſæ & quadrati velocitatis, non ſimplicis velocitatis, ut contendunt Adverſarii, qui non intelligunt, vel qui, neſcio quo contradicendi pruritu, intelligere nolunt diſcrimen inter vires vivas & mortuas.

X X I.

Digitized by Google

XXI.

Propoſitionem autem iſtam de viribus vivis, quæ in corporibus æqualibus ſe habent in duplicata ratione celeritatum, multis adeo demonſtrationibus invictis munivi in Diſſertatione mea *De Motu* ſupra allegata, ut actum agerem, ſi eas omnes hic repeterem. Lubet tamen unam referre, quæ præ cæteris brevis eſt & non minus clara, eoque lubentius, quod, quæ in præcedentibus diſſerui, mirifice conſpirant ad ejus dilucidationem & confirmationem. Sint duo corpora inæqualia *A* & *B*, [*Fig.* 2] quibus quieſcentibus, interpoſita concipiatur ſeries elaſtrorum æqualium & æqualiter tenſorum. Finge jam relaxari elaſtra, ut hinc inde corpora ab illis preſſa gradatim in motum concitentur, unum dextrorſum, alterum ſiniſtrorſum; donec, omnimoda dilatatione peracta, utrumque eam velocitatem acquiſiverit, quæ moli ſuæ convenit, & qua poſtea uniformiter moveri perget. Ubi ſequentia ſunt notanda, 1°. Corpus majus *A*, & corpus minus *B*, quolibet momento preſſiones patiuntur ſibi mutuo æquales. Hinc 2°. incrementa velocitatis corporis *A* erunt ad incrementa velocitatis corporis *B*, reciproce ut maſſa corporis *B* ad maſſam corporis *A*, per receptum ubique principium dynamicum. 3°. Erunt ergo in eadem quoque ratione velocitates totales, ſeu ultimæ poſt peractam dilatationem acquiſitæ, hoc eſt, dicendo velocitatem corporis $A = a$, & velocitatem corporis $B = b$, erit $A : B = b : a$. Quare 4°. erit $aA = bB$, quod monſtrat, quantitatem motus utrobique eſſe æqualem, in qua æqualitate falſo putarunt antagoniſtæ, ut mox patebit, conſiſtere æqualitatem virium vivarum. Tempus 5°. quo utrumque corpus ad ultimam ſuam celeritatem pervenit, eſt utrobique æquale, quod ſane nulla probatione indiget; preſſio enim in utroque corpore ſimul incipit, & ſimul deſinit. Denique 6°. quod ſummam meretur attentionem, ex eo quod tam accelerationes corporum, quam eorum celeritates ultimæ, ſunt maſſis reciproce proportionales, clariſſime ſequitur, commune centrum

TAB. XLIX. N°. CXLV. *Fig.* 2.

gravitatis *C* conſtanter quieſcere, interea dum corpora a ſe invicem recedunt; ac proin, totam ſeriem elaſtrorum ita dividi in puncto *C*, ut pars una eorum inter *C* & *A*, ſit ad alteram inter *C* & *B*, ut maſſa *B* ad maſſam *A*, ſeu ut velocitas *a* ad velocitatem *b*.

XXII.

Hoc igitur centrum *C* erit inſtar obicis immobilis, cui hinc inde elaſtra innituntur, atque ſe ſe in utramque partem expandendo, transfundunt vires ſuas in corpora *A* & *B*. Ea proin vis viva, quam accipit corpus *A* ab elaſtris inter *C* & *A* contentis, erit ad alteram, quam ſortitur *B* ab elaſtris inter *C* & *B*, pariter ut *a* ad *b*. Dicantur itaque f & φ vires illæ duæ; illæ, inquam, facultates reales, quas nunc corpora poſſident, & in quibus unice generandis elaſtra utrinque ſuas vires penitus impenderunt; dicatur nempe vis viva corporis $A = f$, & altera corporis $B = \varphi$; habebimus $f : \varphi = a : b$, modo autem demonſtratum eſt $aA = bB$; adeoque multiplicando analogiæ terminos *a* & *b* per hos alteros æquales aA & bB; erit ſane $f : \varphi = a \times aA : b \times bB = aaA : bbB$; hoc eſt, in compoſita ratione maſſarum, & duplicata velocitatum. Quod erat demonſtrandum.

XXIII.

Non capio, quid pertinaciſſimus adverſarius, ſi vel ſcepticus eſſet, huic evidentiſſimæ demonſtrationi opponere queat; negaveritne, ex numero elaſtrorum, vires ſuas in corpore movendo prorſus exhaurientium, determinandam eſſe vim totalem in eodem productam? annon, quantum poteſt unum ex elaſtris, tantundem poteſt alterum quodlibet? Video clariſſime, ſi, exempli gratia, corpus *A* fuerit duplo majus corpore *B*, fore vice verſa duplo plura elaſtra corpus *B* pellentia, quam ſunt quæ pellunt corpus *A*: accepit igitur corpus *B*, licet duplo minus, tamen duplo majorem vim quam corpus *A*. Quod nunc Adverſariii tantopere urgent, habendam eſſe ratio-

nem

nem temporis, quo durante motus fuerit productus, eo facilius admittere debent, quod motus in utroque corpore, adeoque etiam eorum vires, eodem tempore, non diverſis temporibus, generatæ ſunt. Vis viva igitur in corpore, cujus maſſa ut 1 & celeritas ut 2, cum ſit dupla alterius vis in corpore, cujus maſſa ut 2 & celeritas ut 1; ſi poſterioris maſſæ ſumamus dimidium, habemus maſſam prioris ut 1 cum celeritate ut 2, vim vivam habentis quadruplo majorem, quam habet corpus æquale cum celeritate ut 1.

XXIV.

Poſtquam ita directe demonſtratum eſt, corporum in motu conſtitutorum vires vivas, ſeu facultates agendi, eſſe in ratione duplicata velocitatum, ſi corpora ſint æqualia, & in compoſita ex ratione illa duplicata velocitatum & ſimplici maſſarum, ſi corpora ſunt inæqualia; jam nulla ſupereſt difficultas circa veritatem Principii *Leibnitiani*, de corporum viribus æſtimandis per altitudines, ad quas adſcendendo ſuas velocitates amittunt, vel, per quas deſcendendo ex quiete eaſdem acquirunt. Etenim, cum conſtet, ex *Galilaanis*, altitudines illas eſſe in duplicata ratione celeritatum, quam convenire probavimus rationi virium; quidni ergo adſcenſus vel deſcenſus gravium rectiſſime pro virium menſura ſumerentur?

XXV.

Hinc intelligis, quamlibet corporis gravis particulam elementarem, cum deſcendit vel aſcendit per datam altitudinem, tantam acquirere vel amittere vim vivam ab actione gravitatis, quantam acquireret vel amitteret ab actione ſeriei elaſtrorum, datæ altitudini æqualis; poſito, ſcilicet, elaſtra vi eadem premere qua urget gravitas; ſive id fiat deorſum trudendo particulam elementarem, per modum accelerationis gravium deſcendentium, dum elaſtra ſe dilatant, ſive eidem particulæ elementari reſiſtendo, per modum retardationis gravium

Digitized by Google

adſcendentium, dum elaſtra ab occurſu particulæ comprimuntur. Quare corpus grave cujuſcunque figuræ, vel integrum Syſtema plurium corporum, ſi a ſolo gravitatis effectu quomodocunque deſcenderit, eam vim vivam in omnibus partibus collectim ſumtam acquiſiviſſe cenſendum eſt, cujus menſura habetur capiendo aggregatum productorum partium ſingularum per ſuas cujuſque deſcenſus altitudines. Ex Staticis autem patet, aggregatum illud eſſe æquale unico producto totius Syſtematis maſſæ per altitudinem deſcenſus communis centri gravitatis. Hinc colligitur, ex conſervatione virium vivarum, commune centrum gravitatis, ſi acquiſita ſua velocitate ſurſum dirigatur, ad priſtinam altitudinem, unde deſcenderat, eſſe adſcenſurum; idque ſive integrum ſyſtema indiſſolutum aſcendat, ſive, ſolutis vinculis quibus partes inter ſe cohærebant, ſingulæ ſeorſim ſuis acquiſitis velocitatibus adſcendant: utroque quippe modo conſervari debet eadem quantitas virium, utpote effectus unius ejuſdemque cauſæ, nempe dilatationis & ſubſequentis compreſſionis determinati numeri elaſtrorum. Rem fuſius expoſui in Opuſculo *De motu*.

XXVI.

HUGENIUS uſum hujus Theoriæ eleganter primus applicuit ad inveſtigandum centrum oſcillationis in pendulis compoſitis. Neſcius tamen eo tempore naturæ & conſervationis virium vivarum, principium illud ſuum, de æquali deſcenſu & adſcenſu communis centri gravitatis, haud aliter quam pro Axiomate aſſumſit, veram ejus rationem nondum perſpiciens. Quare a multis tanquam poſtulatum nimis temerarium fuit impugnatum, donec rei veritas, primo per experientiam confirmata, dein etiam ex intervallo per principia ordinaria ab omnibus admiſſa directe demonſtraretur, qualem demonſtrationem ego dedi univerſaliſſimam in *Actis Lipſ.* A. 1714 *, omni ſane exceptione majorem. Nunc vero ipſius quoque Axiomatis *Hugeniani* ſoliditatem ex theoria virium vivarum demonſtrative

* N°. XCVI. pag. 168. *Tom.* II.

ve probatam & corroboratam arbitror, ut in poſterum inter propoſitiones dynamicas æque recipi mereatur, quam quæ ſunt certiſſimæ.

XXVII.

Fortaſſis invita rationum allatarum evidentia, ne nunc quidem obtineri poteſt, ut, qui Theoriam virium vivarum hucuſque pertinaciter repudiarunt, poſthac ſe illi favorabiliores præbeant. Certe in noſtra poteſtate non eſt, aliquem eo adigere, ut fateatur dieſcere, quando videt Solem horizontem aſcendere, tametſi ſe ſentiat agnoſcere veritatem rite demonſtratam; ſed poſſunt etiam internam ſuam convictionem & agnitionem diſſimulare, mutare; præſertim ſi ſibi probro ducant eam tamdiu ignoraſſe, aut quod primæ inventionis gloria non ſibi, ſuiſve, ſed exteræ nationi debeatur. Quis ſcit, ſi magnus NEWTONUS hanc Theoriam eruiſſet, an non univerſa Magna Britannia, ut probabile eſt, ei jamdudum applauſiſſet?

XXVIII.

Si NEWTONUS perſpectam habuiſſet veram virium vivarum naturam; ſane non ſtatuiſſet duo diverſa principia, unum ad movenda corpora, alterum ad motum eorum conſervandum. Unum idemque enim principium, quo motus communicatur, facit etiam ut conſervetur, non in quantitate motus, ſed in quantitate virium vivarum, quo ipſo luculenter patet, motum in rerum natura nunquam perire poſſe, ut NEWTONUS, vano terriculamento perterritus, metuiſſe videtur. Vide ejus *Optices* Edit. ſecundam Lat. A. 1719, *Londini* impreſſam, pag. 404, ubi ſequentem in modum [ridiculum dicerem, ſi a tanto Viro non ſcripta eſſent,] ratiocinatur. „Alio „aliquo, *inquit*, principio [præter vim inertiæ] omnino opus „erat ad movenda corpora; & jam, cum moventur, alio „itidem principio opus eſt, ad motum ipſorum conſervandum. „Nam ex variis binorum motuum compoſitionibus, manifeſtum „eſt, non ſemper eandem eſſe in mundo quantitatem motus.

 „Etenim,

„ Etenim, ſi duo globi, virgula tenui conjuncti, motu uni-
„ formi circa commune ſuum gravitatis centrum revolvantur,
„ interea dum centrum illud motu uniformi feratur in linea recta,
„ ducta in plano motus ipſorum circularis, utique ſumma motuum
„ binorum illorum globorum, quoties illi erunt in linea recta a
„ communi ſuo gravitatis centro deſcripta, major erit, quam
„ ſumma motuum ipſorum, tum cum erunt illi in linea, quæ ſit
„ ad lineam illam rectam perpendicularis. Quo quidem exem-
„ plo apparet, motum naſci poſſe & perire &c.

XXIX.

Dudum quidem obſervatum eſt a multis, præſertim ab HUGENIO, [vid. *Opuſc. poſthuma De vi percuſſionis* in fine,] motus quantitatem, etiam in corporibus perfecte elaſticis, in immenſum poſſe augeri & minui: ſed nemini in mentem venit, præterquam NEWTONO, inde conſequentiam eſſe formandam, quod ideo motus omnino perire vel annihilari poſſit. At hoc potius NEWTONUS, ex eo quod motus quantitas, licet nulla nova cauſa ſupperaccedat, ſit tamen ex ſe ipſa variabilis & mutabilis, concludere debuiſſet in quantitate motus non conſiſtere quantitatem virium, utpote quæ eſt conſtantiſſima, nullique mutationi obnoxia; quod non tantum in exemplis *Hugenianis*, ubi tam ingens eſt quantitatis motus mutatio, eleganter demonſtrari poteſt per calculum, ſed & in ipſiſſimo exemplo *Newtoniano*, duorum globorum virgula tenui conjunctorum & combinato motu uniformi rotatorio ac progreſſivo latorum, luculentiſſime & ſine magna difficultate probare poſſumus, globis illis duobus eandem ſemper ineſſe ſummam virium vivarum, quocunque in ſitu verſentur; hoc eſt, ſi globus uterque, non per velocitatem, ſed per quadratum ſuæ velocitatis actualis, multiplicetur, fore productorum ſummam conſtanter eandem atque invariabilem. Quo ipſo conſervatio virium vivarum mirifice adſtruitur; tantum abeſt metum ſubeſſe, ne aliquando motus omnis in rerum natura pereat, indeque totum univerſum in chaos duriſſimum & immobile

Digitized by Google

bile relabatur. Dormiamus ergo ſecure, res eſt in ſalvo. Quod autem ex concurſu corporum mollium, vel imperfecte elaſticorum ubi ſecundum ſenſus noſtros aliquid de viribus videtur perire, allegari poſſet contra virium conſervationem, ad hoc jam ſupra reſpondimus, nec hujus loci eſt ei diutius inhærere.

XXX.

Ne vero diſputando militare pergamus, lubet nunc urgere conſenſum, quem generaliſſime deprehendimus in ſolutionibus Problematum ad hanc materiam pertinentibus, quotieſcunque ea duplici modo ſolvere inſtituimus, nempe via indirecta [ſed plerumque commodiori, ac magis compendioſa] per Theoriam virium vivarum; altera directa & petita ex notiſſimis atque a nemine non conceſſis principiis ſtaticis. Audebitne aliquis duram ſatis habere frontem, ut, viſa harmonia conſtantiſſima in omnibus exemplis per utramque viam ſolutis, etiamnum tamen dubitet de probitate prioris methodi, aut, quod magis foret abſonum, ne dicam impudens, ut dicat conſenſum iſtum caſui fortuito deberi, etiamſi talis caſus ſit moraliter impoſſibilis: ſiquidem ex centenis & pluribus exemplis, quæ hactenus tractavimus, ne unicum quidem occurrit, cujus non perfectiſſimum conſenſum exitus probaverit?

XXXI.

Præter exemplum Centri oſcillationis in pendulis compoſitis feliciſſime determinati per utramque methodum, indirectam & directam, quædam alia Problemata huic fini inſervientia propoſueram in *Comment. Petropol.* Tom. II. pag. 200 *, ſuppreſſis tunc quidem ſolutionibus, viſurus, num qui forent ex Eruditis, qui vadum tentare vellent. Inter memorata Problemata occurrit quæſtio de chordarum vibrationibus definiendis per oſcillationes pendulorum datorum. Hujus Problematis ſingulos caſus [nam varii erant propoſiti] poſtea ſolutos dedi in eorundem Comment. Tom. III. pag. 13 & ſeq. † & quidem

* Supra, N°. CXXXVII. pag. 124. † N°. CXL. pag. 198.

Digitized by Google

dem ita ut præcederent ſolutiones erutæ ex doctrina conſervationis virium vivarum, haſque ſtatim exciperent alteræ ex vulgaribus principiis ſtaticis petitæ, quæ cum prioribus ſingulis ad amuſſim conſpirare deprehenduntur. Quod idem non ſine jucunda animi voluptate [ſaltem pro virium vivarum fautoribus,] obſervare eſt in ſubjuncta ſolutione Problematis de chordæ muſicæ vibrationibus determinandis per utramque methodum exhibita, quæ non abludit à *Tayloriana*, per viam longe diverſam inventa. Vide *Method. Increm.* pag. 93. Quo conſenſu TAYLORUS forſan, ſi viveret, & tantillum ingenuitatis haberet, permoveretur ad amplectendam virium vivarum Theoriam.

XXXII.

Conſtitui hoc loco ulterius monſtrare mutuum iſtum conſenſum inter utramque methodum per enodationem alterius alicujus Problematis Dynamico-Mechanici, quod ibidem cum reliquis propoſueram; ſed cujus ſolutionem legitimam nemo hucuſque in lucem emiſit. Senſus Problematis talis erat.

TAB. XLIX. N°. CXLV. *Fig.* 3. *Sit curva data* CGB, *per quam deſcendat pondus* B, *poſt ſe trahens ſurſum aliud minus pondus* A, *per aliam curvam datam* FAC *adſcenſurum ope funiculi* ACB, *trochleam* C *ambientis, & binis ponderibus alligati. Quærantur velocitates ponderum in quibuslibet locis* B & A?

I. SOLUTIO INDIRECTA,

Deducta ex Theoria virium vivarum.

Intelligatur tranſire per trochleam C recta horizontalis MCE, habeatque funiculus ſitum quemcunque ACB, eique proximum aCb. Ex punctis B & A ducantur verticales BE, AD; atque centro C & radiis Cb, CA, deſcripti ſint arculi bn, Am. Denique per puncta b, A ducta intelligantur elementa horizontalia bo, Al, occurſura elementis verticalibus Bo, al. Dicantur $CB = x$, $Bn = am = dx$, $Bo = dy$, $bB = ds$; ſitque

que $z =$ rectæ verticali TV, ex cujus altitudine pondus aliquod libere cadens acquirat velocitatem æqualem illi, quam pondus B acquirit in curvæ puncto B. Quæritur itaque altitudo z?

Hoc ſine dicatur porro $Aa = dr$, & $la = dq$. Atque cum velocitas in B ſit proportionalis radici quadratæ altitudinis TV, ponatur hæc velocitas $\sqrt{z}$; erit [ob bB ad aA, ut velocitas in B ad velocitatem in A] ipſa hæc velocitas in $A = dr\sqrt{z} : ds$. Nunc, quia, ex conſervatione & natura virium vivarum in ponderibus deſcendentibus & aſcendentibus, ſumma productorum ex ponderibus per deſcenſus, demta ſumma productorum ex ponderibus per adſcenſus, debet æquari ſummæ acquiſitæ virium vivarum in univerſis ponderibus, hoc eſt, ſummæ productorum, quæ fiunt multiplicando ſingula pondera per quadratum ſuarum reſpective velocitatum; vel, ut ad ſenſum *Hugenianum* loquar, quod eodem recidit, quia commune centrum gravitatis duorum ponderum per funiculum colligatorum tantum deſcendit, quantum poſtea [ſi utrumque pondus ſua acquiſita velocitate ſeparatim ſurſum dirigatur] adſcendere poteſt; habebimus hic [ſupponendo G eſſe initium deſcenſus ponderis B, & F initium adſcenſus ponderis A, ducendoque verticalem FM, cui occurrat horizontalis AR, ſicuti ipſi BE occurrit ducenda horizontalis GS, ita ut SB ſit $= y$ & $FR = q$] habebimus, inquam, $SB \times B - FR \times A = z \times B + \frac{dr^2}{ds^2} z \times A$; unde $z = (B \times SB - A \times FR)\, ds^2 : (Bds^2 + Adr^2)$, vel ſcribendo y pro SB, & q pro FR, erit $z = (By - Aq)\, ds^2 : (Bds^2 + Adr^2)$. *Q.E.I.*

II. SOLUTIO ALTERA DIRECTA

Ex principiis pure Mechanicis.

Ut ponderum in ſe mutuo agentium & reſiſtentium vires commode determinentur, in auxilium voco vim tenſionis funiculi ACB, quam voco T, quæ renititur conatui quo pondus B ſuper bB deſcendit, dum eidem T renititur pondus A, quod ab ea ſuper aA adſcendere cogitur. Sit nunc g vis gravitatis, ſeu acceleratrix naturalis, qua nimirum corpora gravia ad deſcenſum

Digitized by Google

verticalem animantur. Adeoque, ſi jam B & A deſignent maſſas corporum, erunt eorum pondera abſoluta exprimenda per gB & gA, quorum vires ſeu conatus deſcendendi ſi deriventur ad directiones obliquas bB & aA, habebitur vis ſuper bB a gravitate oriunda $= gBdy : ds$, & ea ſuper aA $= gAdq : dr$. Similiter vis tenſionis T [quæ in utrumque pondus oblique agit,] derivanda eſt ad directiones obliquas bB & aA, prodibitque vis ſuper bB a tenſione oriunda $= Tdx : ds$, priori $gBdy : ds$ a gravitate derivatæ contraria; & altera ſuper aA, quæ eſt $= Tdx : dr$, [ſunt enim incrementa & decrementa nB & ma partium funiculi CB, CA, æqualia,] alteri illi vi a gravitate oriundæ $gAdq : dr$ pariter contraria. Proinde $gBdy : ds - Tdx : ds$ dabit vim motricem, qua corpus B ſuper bB deorſum urgetur, & $Tdx : ds - gAdq : dr$ vim motricem, qua corpus A ſuper aA ſurſum trahitur. Ibi enim ſupponitur vis obliqua a gravitate derivata prævalere alteri a tenſione derivatæ, hic vero obtinet contrarium.

Unde, ſi utrobique vires iſtæ motrices dividantur per ſuas reſpective maſſas corporum B & A, emerget $gdy : ds - Tdx : Bds$ pro vi acceleratrice corporis B, nec non $Tdx : Adr - gdq : dr$, pro vi acceleratrice corporis A.

Jam autem, poſito receptiſſimo principio dynamico, $PdS = VdV$ [ubi R denotat vim acceleratricem, dS elementum ſpatii percurrendi, & V velocitatem,] de cujus veritate nemo dubitat, habebimus [nominando u velocitatem in B, & v velocitatem in A,] has duas æquationes $(gdy : ds - Tdx : Bds)$ ds, ſeu $gdy - Tdx : B = udu$, & $(Tdx : Adr - gdq : dr)$ dr, ſeu $Tdx : A - gdq = vdv$. Utrobique integrando, erit $gy - \frac{1}{B}\int Tdx = \frac{1}{2}uu$, & $\frac{1}{A}\int Tdx - gq = \frac{1}{2}vv$. Ex priori elicitur $\int Tdx = gBy - \frac{1}{2}Buu$, atque ex altera $\int Tdx = gAq + \frac{1}{2}Avv$, adeoque $gBy - \frac{1}{2}Buu = gAq + \frac{1}{2}Avv$.

Sed per hypotheſin, z deſignat altitudinem, ex qua grave libere delapſum acquirit velocitatem u; erit ergo, per principium dynamicum, ab omnibus conceſſum, $gdz = udu$, indeque $gz = \frac{1}{2}uu$; &, quia præterea $uu : vv = ds^2 : dr^2$, habe-

habetur $\frac{1}{2} vv = \frac{dr^2}{2ds^2} uu = \frac{gdr^2}{ds^2} z$. Subſtitutis his valoribus pro $\frac{1}{2} uu$ & $\frac{1}{2} vv$, ac diviſo per g, dabit inventa æquatio $gBy - \frac{1}{2} Buu = gAq + Avv$, hanc alteram $By - Bz = Aq + \frac{dr^2}{ds^2} Az$, quæ rite reducta dat quæſitam $z = (By - Aq) ds^2 : (Bds^2 + Adr^2)$; omnino uti per priorem ſolutionem ex viribus vivis elicuimus. *Q. E. I.*

COROLL. I. Per hanc methodum directam determinantur eadem opera [quod per indirectam fieri nequit,] vis tenſionis T, quam patitur funiculus, dum eo mediante pondera in ſe invicem agunt. Quoniam enim $\int T dx = gBy - \frac{1}{2} Buu = gBy - gBz$ erit differentiando, & per dx dividendo, $T = gB(dy - dz) : dx = gBd(y - z) : dx =$ [ſubſtituto pro z ejus valore] $\frac{gB}{dx} \times d(y - \frac{Byds^2 - Aqds^2}{Bds^2 + Adr^2}) = \frac{gB}{dx} \times d(\frac{Aqds^2 + Aydr^2}{Bds^2 + Adr^2})$ $=$ [omittendo g, vel ſumendo pondus B pro ipſo gB, hoc eſt, pro maſſa B multiplicata per vim gravitatis g, atque evolvendo A] $\frac{A.B}{dx} \times d(\frac{qds^2 + ydr^2}{Bds^2 + Adr^2})$. Et ſic habentur z & T in quantitatibus finitis. Nam, ob datas curvas CGB & CAF, datamque longitudinem funiculi totius ACB, dabitur utique relatio inter dx, ds, & dr, ac proin quoque relatio inter ds^2 & dr^2; unde ambo valores ipſorum z & T reſultabunt in terminis finitis.

COROLL. II. In caſu ſpeciali, cujus ſolutionem in *Comment. Petropolit.* ſine demonſtratione expreſſeram, ubi recta verticalis pro linea CAF ponitur, propterea dr, dq, dx, ſeu elementa A*a*, *la*, *am*, B*n*, ut & FR, ſeu $q = x$, fiunt æqualia, ſumto initio deſcenſus G in ipſo C; nulla alia mutatio prodibit in generali valore ipſius z, quam ut pro dr^2 ſcribi poſſit dx^2, ac pro q etiam x; quo facto erit $z = (By - Ax) ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$ & ipſa $T = \frac{A.B}{dx} \times d(\frac{xds^2 + ydx^2}{Bds^2 + Adx^2})$.

SCHOLIUM.

Noſter quondam HERMANNUS viderat hunc a me inventum valorem ipſius z, pro hoc ſpeciali caſu, æqualem $(By - Ax)$ ds^2:

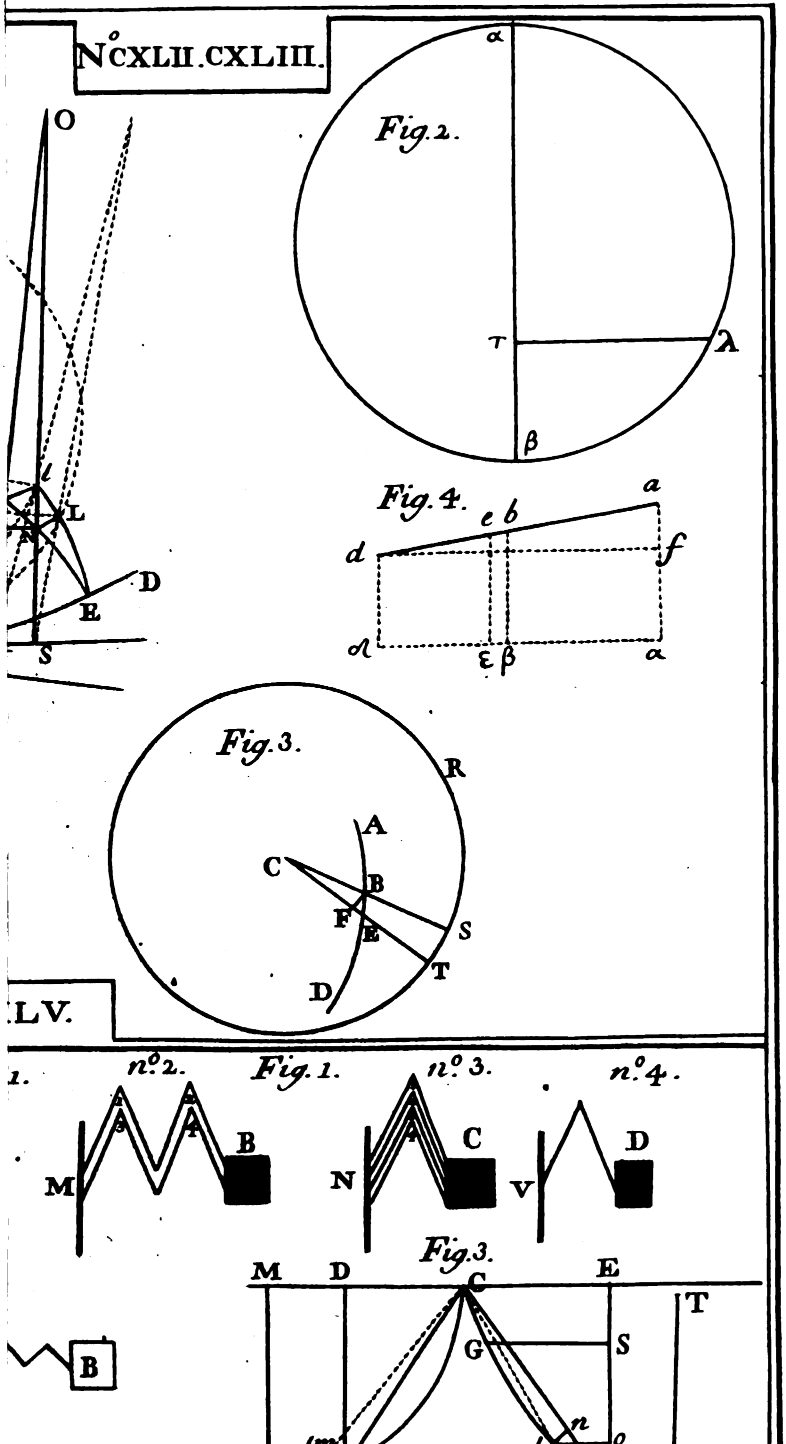
$ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$ in Epiſtola mea coram Academia *Petropolitana* prælecta *. Ille igitur, volens generalem exhibere ſolutionem pro linea non tantum recta, ſed pro qualibet data curva CAF, occaſionem arripuit hanc materiam tractandi in fine ſuæ *Theoriæ generalis motuum*, Comment. Tom. II, ad Menſem Junii A. 1727 inſertæ; quod autem additamentum non niſi diu poſt Octobr. ejus anni Theoriæ ſuæ accedere potuit, ſiquidem hoc demum tempore Theoremata iſta a me *Petropolin* dimiſſa fuere. Quod ideo monendum duxi, ne Lectori mirum videatur, unde venerit, ut proponantur Theoremata & Problemata tanquam aliquid novi, quorum tamen [ſaltem nonnullorum] ſolutiones tempore priores [etſi revera poſteriores] fuerint inventæ.

Sed aliud majoris momenti non eſt diſſimulandum, quod Lectori ſcrupulum injicere poſſet, quando obſervabit, præſentis Problematis ſolutionem *Hermannianam*, loco citato pag. 170 † traditam, in terminis generalibus diſcrepare ab ea, quam in hoc Schediaſmate duplici modo inventam exhibui. Ut diſcrepanti exponatur diſtinctius, invenit Cel. HERMANNUS, TV vel $z = (By - \int(Adp^2 dq : dr^2)) ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$, ubi notandum eſſe $dp = dx$. A me vero aliud diverſum & ſimplicius inventum habetur, nempe $z = (By - Aq) ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$. Conveniunt hi duo valores in ſolo caſu, ubi linea CAF eſt recta, quod forſan fraudi fuit HERMANNO, ut, conſenſum animadvertens in hoc caſu ſpeciali, tanto minus dubitaret de bonitate ſolutionis ſuæ generalis; at differunt ſane in omnibus cæteris caſibus. Qui ambas meas methodos, indirectam & directam, tam egregie conſpirantes, probe examinaverit, non poterit ambigere de ſolutionis meæ veritate; neceſſe eſt igitur errorem ineſſe in *Hermanniana*. Obſervari reapſe Virum bonum, hic & alibi Dynamica verſantem, ſæpe hallucinatum fuiſſe; quod non ideo dico, ut ipſius meritis aliquid detraham, ſed ut diſcant alii hanc materiam, denſa adhuc caligine obſeptam, cautius tractare, cum viderint magnos quoque Viros in ea frequenter ceſpitaſſe. Habet certe HERMANNUS hac in re ſibi comparem in NEWTONO, qui & ipſe aliquando ſuos manes paſſus eſt, ceu ſupra oſtendi & alibi ſæpius.

ESSAI

* N°. CXXXVII. † N°. præced. pag. 237, 238.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

N°. CXLVI.

ESSAI

D'UNE

NOUVELLE PHYSIQUE CELESTE,

Servant à expliquer les principaux Phenomènes du Ciel, & en particulier la cauſe phyſique de l'inclinaiſon des Orbites des Planetes par raport au plan de l'Equateur du Soleil.

PIECE

DE

M. JEAN BERNOULLI,

DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, & de celles de Londres, Petersbourg, &c. Et Profeſſeur de Mathematique en l'Univerſité de Bâle.

Qui a partagé le Prix double de l'année 1734.

Imprimée

A PARIS

1735.

Kk 3

Digitized by Google

Digitized by Google

ESSAI
D'UNE
NOUVELLE PHYSIQUE
CELESTE,

Servant à expliquer les principaux Phenomènes du Ciel, & en particulier la cauſe phyſique de l'inclinaiſon des Orbites des Planetes par raport au plan de l'Equateur du Soleil.

Felices animæ, quibus hæc cognoſcere primum,
Inque domos ſuperas ſcandere, cura fuit.

Ovid. Faſtor. lib. 1.

DISCOURS PRELIMINAIRE.

I.

L'Academie Royale des Sciences, ſelon ſon noble deſſein de faire fleurir les Sciences & les beaux Arts, invite les Savants de toutes les nations ſans diſtinction,

à

Digitized by Google

à travailler ſur les ſujets qu'elle leur propoſe tous les ans, avec un prix deſtiné à celuy qui aura le mieux réuſſi. Le ſujet pour l'année 1732 n'ayant point été traité à la ſatisfaction de l'illuſtre Academie, elle l'a remis ſur le tapis une ſeconde fois pour l'année 1734, & pour encourager davantage les curieux, elle a trouvé bon d'en doubler le prix.

La queſtion eſt conçûë en ces termes : *Quelle eſt la cauſe phyſique de l'inclinaiſon des Plans des Orbites des Planetes par raport au plan de l'Equateur de la revolution du Soleil autour de ſon axe, & d'où vient que les Inclinaiſons de ces Orbites ſont differentes entr'elles.* C'eſt, ſans doute, une matiere très-importante, & très-digne d'être aprofondie avec une ſérieuſe aplication.

II.

Il n'y a eu juſqu'ici que deux ſyſtèmes de Phyſique, qui ayent fait grand bruit, & partagé les opinions des Phyſiciens : l'un eſt le fameux ſyſtème des *Tourbillons*, introduit par M. DESCARTES ; l'autre eſt celui de M. NEWTON, qui ſe ſert du *Vuide* & des *Attractions*, fondé d'ailleurs ſur deux loix que la Nature ſuit dans le mouvement des Planètes, & de leurs Satellites.

L'un & l'autre de ces deux ſyſtèmes eſt très-bien imaginé, & chacun a ſes beautez ; mais auſſi faut-il convenir qu'il y a de part & d'autre de grands défauts, & des difficultés que perſonne n'a encore entierement levées : de ſorte que je ne m'étonne point que les pieces données pour le dénouëment de nôtre queſtion, n'ayent pas eu le bonheur de contenter le goût exquis de M^rs^. les Juges : c'eſt aparemment que les Auteurs des pieces ont donné avec trop de déference dans l'un ou l'autre de ces deux ſyſtèmes, ſans aſſés de diſcernement du bon d'avec le mauvais. Car encore un coup, il faut demeurer d'accord que chacun a ſon mauvais côté, par lequel il faudroit l'enviſager auſſi, avant que de s'y livrer entierement.

III.

M. de MAUPERTUIS, dans l'excellent Diſcours ſur les differen-

Digitized by Google

differentes figures des Aſtres, qu'il donna au public vers la fin de l'année derniere, expoſe très-diſtinctement toutes les difficultés auſquelles les deux ſyſtèmes ſont ſujets, quoiqu'en qualité de Géométre, il admette celui de M. NEWTON, à cauſe de l'exactitude avec laquelle la plûpart des Phénomènes celeſtes s'expliquent dans ce ſyſtème, & non point à cauſe de l'évidence des principes qu'on y adopte. Il a raiſon de dire, que tout effet reglé, nonobſtant que ſa cauſe ſoit inconnuë, peut être l'objet des Mathématiciens; témoin GALLILE'E, qui, ſans connoitre la cauſe de la peſanteur des corps vers la terre, n'a pas laiſſé de nous donner ſur cette peſanteur, une Théorie très-belle & très-ſûre, & d'expliquer les phénomènes qui en dépendent; témoin auſſi lui-même, qui dans le chapitre penultiéme nous donne en habile Mathématicien la ſolution de deux problêmes difficiles, ſur les figures que doivent prendre les fluides qui tournent autour d'un axe, & ſur la nature d'un torrent de matiere fluide circulant autour d'un axe hors du torrent: où il ſupoſe la peſanteur du fluide comme une attraction, ſans avoir beſoin d'en indiquer la cauſe, ni de dire en quoi elle conſiſte. Il remarque fort bien que M. NEWTON avoit aſſés de candeur, pour ne regarder jamais l'attraction comme une explication de la peſanteur des corps les uns vers les autres, & pour advertir qu'il n'employoit ce terme que pour déſigner un fait, & non point une cauſe.

Il n'en eſt pas autrement du Vuide parfait que M. NEWTON ſupoſe; il lui eſt permis de le ſupoſer, tant qu'il ne s'en ſert que comme d'un milieu ou d'un fluide ſans réſiſtance, ſe mettant peu en peine ſi un tel milieu ou un tel vuide peut exiſter, ou non. Un Géométre, entant que tel, n'eſt pas obligé d'expliquer l'origine des faits: il peut les ſupoſer, pourvû que, pour en découvrir les proprietés, il raiſonne juſte ſur les hypothéſes établies. Il ſeroit à ſouhaiter que les partiſans de M. NEWTON euſſent ſuivi l'exemple de leur maître, & qu'au lieu de prétendre que le vuide & l'attraction ſont des

Digitized by Google

réalités dans la nature des choſes, & que ce ſont des principes d'exiſtence, ils les euſſent ſeulement enviſagés comme des manieres de concevoir.

I V.

C'eſt donc au Phyſicien, qui veut chercher les cauſes des faits, à établir des principes d'exiſtence, & ces principes doivent être clairs & intelligibles, ſi bien que leur poſſibilité ſe manifeſte d'elle-même. Je ne penſe pas que le principe d'attraction ait autant d'évidence que celui d'impulſion : je vois, par exemple, avec une évidence entiere, qu'un corps en mouvement, qui en rencontre un autre en repos, doit le mouvoir auſſi, non-ſeulement parce que les corps ſont impénétrables, mais parce que le choc eſt une action, & que toute action doit avoir ſon effet, qui produit un changement dans l'état de celui qui le reçoit : mais il n'y a point d'autre changement d'état dans le corps choqué, que celui de quitter l'état de repos où il étoit, pour ſe mouvoir ; car c'eſt une loi generale reçûë dans la Statique & la Méchanique, que les corps preſſés plus d'un côté que de l'autre doivent céder vers où ils ſont le moins preſſés. Or le choc ſe fait par preſſion ; c'eſt donc une action dont il réſulte un effet. Qui veut concevoir une action ſans effet, il veut concevoir une chimére.

Tout au contraire, un corps ſans mouvement ne peut pas agir, puiſque l'action d'un corps dépend uniquement de ſon mouvement ; ainſi je ne vois pas comment deux corps éloignés & en repos peuvent s'attirer mutuellement, c'eſt-à-dire, ſe mettre en mouvement d'eux-mêmes ; ce feroit un effet ſans cauſe, & une action ſans principe d'agir. Vouloir recourir à la volonté immédiate de Dieu, & dire que Dieu les pouſſe l'un vers l'autre avec une certaine force, lorſqu'ils ſont à une certaine diſtance de l'un à l'autre, ce feroit bannir les cauſes ſecondes de la Nature ; il vaudroit autant dire que tous les phénomènes, & tout ce qui arrive dans l'univers, s'exécute

immé-

immédiatement par la cauſe premiere, je veux dire, par la volonté divine, & que les cauſes ſecondes n'y contribuent que comme des occaſions qui déterminent l'Etre ſouverain à agir d'une telle ou telle maniere ſelon les diverſes contingences: mais ce ſeroit introduire de nouveau le ſyſtème des cauſes occaſionnelles, qui n'a guères contenté les Philoſophes de bon goût.

V.

Les inconvenients qui réſultent de ces deux principes incompréhenſibles pour un Phyſicien, je parle du Vuide & de l'Attraction, ne ſont pas les ſeuls qui empêchent d'admettre dans la Phyſique le Syſtème de M. Newton: il y en a d'autres, par raport à quelques phénomènes, qui reſtent inexplicables, quand même on accorderoit ces principes; ce ſont, par exemple, la rotation des Planètes autour de leur axe; comme auſſi la direction commune de leur revolution autour du Soleil, ſe faiſant chacune ſous le Zodiaque d'Occident en Orient, ainſi que ſe fait auſſi la revolution du Soleil ſur ſon axe; item, les mouvements irréguliers des Cométes, dont preſque chacune a ſa direction particuliere, & ſouvent contraire l'une à l'autre. Il ſemble que le Vuide parfait, tel que M. Newton le ſupoſe, devroit permettre aux Planètes, auſſi-bien qu'aux Cométes, de ſe choiſir chacune une route particuliere, & indépendante de la régularité de direction. M. Newton a ſi bien ſenti cette difficulté, qu'il avouë que ce phénomène eſt quelque choſe de ſurnaturel.

VI.

Le ſyſtème des Tourbillons imaginé à la maniere de M. Descartes ne laiſſe pas d'être expoſé auſſi à de grandes objections: on ſait que la gravitation des Planetes vers le Soleil, attribuée à l'effet de la force centrifuge de la matiere du Tourbillon, ne devroit pas ſe faire directement au centre

Digitized by Google

du Soleil, mais perpendiculairement vers l'axe du Tourbillon; de même que les corps graves ſur la Terre devroient avoir une tendance perpendiculaire à l'axe, & ne point tendre au centre de la Terre. Il ſemble auſſi que les Planètes principales, ſi elles étoient ſimplement entrainées par le courant de la matiere du Tourbillon ſolaire, devroient avoir la même viteſſe & la même denſité, qu'ont les couches du Tourbillon dans la région ou elles nagent; tout comme un vaiſſeau, abandonné au courant d'un fleuve, acquiert enfin une viteſſe commune avec l'eau qui l'emporte; de ſorte que la force centrifuge des Planètes deviendroit préciſément égale à celle qu'auroit un égal volume de matiere du Tourbillon aux endroits où nagent les Planètes: donc à cauſe du parfait équilibre entre ces deux forces centrifuges, les Planètes, n'ayant point de gravitation plus ou moins grande dans un temps que dans un autre, ne varieroient jamais de diſtance au Soleil. Il eſt vrai qu'on a propoſé différens moyens, pour faire voir comment les Planètes peuvent s'aprocher & s'éloigner du Soleil, pendant que le Tourbillon les entraine: mais tous ces moyens, quelque vraiſemblables qu'ils ſoient d'ailleurs, ne m'ont jamais paru aſſés naturels.

Il y a encore dans le Tourbillon à la Cartéſienne une difficulté, qui conſiſte en ce que les viteſſes de ſes couches ſont beaucoup trop grandes, par raport à celle de l'Equateur du Soleil, pour que la circulation de cet aſtre & celle de ſon Tourbillon dépendent d'un même principe. Cela eſt ſi vrai, que KEPLER avant la découverte des taches ſur le diſque du Soleil, ſoupçonnoit qu'il devoit avoir un mouvement de rotation, dont la période étoit de 3 jours, au lieu de 25 jours & demi, comme les obſervations des taches l'ont montré dans la ſuite.

VII.

Mais ce qu'il y a de plus fort contre le ſyſtème des Tourbillons, comme le remarque très-à-propos M. de MAUPERTUIS,

Digitized by Google

TUIS, réſulte de l'incompatibilité pour ce ſyſtème entre les deux loix de KEPLER, qui s'obſervent pourtant generalement dans le cours des Planétes tant principales que ſecondaires. En vertu de la premiere de ces loix, les ſecteurs de l'Orbe elliptique d'une Planète, formés autour du foyer qu'occupe le Soleil, ſont conſtamment proportionnels aux temps qu'elle employe a parcourir les arcs de l'Ellipſe, compris dans ces ſecteurs. Par la ſeconde loi, il faut que les temps périodiques de différentes Planètes ſoient en raiſon ſeſquipliquée de leurs diſtances moyennes au Soleil, ce qui s'étend auſſi aux Satellites par raport à la Planète principale autour de laquelle ils font leurs revolutions.

Si donc, ſelon l'hypothèſe commune des Tourbillons, la viteſſe des Planètes ſe regle ſur celle des couches de la matiere du Tourbillon, il faudroit, ſuivant la premiere loi des ſecteurs proportionnels aux temps, que les viteſſes réelles des couches fuſſent en raiſon inverſe des diſtances au centre, c'eſt en quoi conſiſte la circulation harmonique de M. LEIBNITS. Mais en conſéquence de la ſeconde loi, qui veut que les temps périodiques de différentes Planètes ſoient en raiſon ſeſquipliquée des diſtances au centre, il faudroit que ces mêmes viteſſes réelles des couches fuſſent en raiſon ſoûdoublée réciproque de leurs diſtances. Les viteſſes des couches auroient donc en même temps deux différentes raiſons par raport aux diſtances, ce qui impliqueroit une manifeſte contradiction.

Pour la ſauver, on pourroit peut-être inventer un nouveau Tourbillon qui ſatisfit à une des loix, pendant que l'autre ſatisferoit à l'autre; & chacun de ces deux Tourbillons devroit circuler ſuivant ſa propre regle, ſans s'interrompre mutuellement en ſe traverſant, à peu près comme M. BULFINGER a voulu expliquer (d'une maniere plus ingénieuſe que vraiſemblable) l'effet de la peſanteur & ſa tendance vers le centre de la Terre, en multipliant les Tourbillons. Mais c'eſt ici où l'on pourroit demander, ſi la ſimplicité des operations de la nature permet de prodiguer ſi liberalement *des*

matieres & des mouvements, ſans autre raiſon que le beſoin qu'on en a. Il eſt vrai que c'eſt une liberalité qui ne coûte rien, mais auſſi peu pardonnable que celles des anciens Aſtronomes, qui, pour ſupléer à l'inſuffiſance de leurs hypothèſes, n'ont point fait ſcrupule de créer de nouveaux cieux cryſtallins, des épicycles, & d'autres ouvrages de cette nature, à meſure qu'on en avoit beſoin pour expliquer de nouvelles irregularités qui ſe découvroient dans le mouvement des Aſtres, ſans ſe mettre en peine ſi tous ces embarras étoient convenables à la ſimplicité, à la beauté, & à la ſymmétrie de l'Univers. Que n'auroient-ils pas encore fait, ces mêmes Aſtronomes, ſi déja de leur temps on eût connu les merveilles du ciel, découvertes dans ces derniers ſiécles; que n'auroient-ils pas fait, dis-je, pour les expliquer à leur maniere: on ne verroit, je crois, qu'un labyrinte d'une infinité de cercles nouveaux.

VIII.

Je reviens à nos deux ſyſtèmes donnés par DESCARTES & par M. NEWTON: de quelque côté que je me tourne, je rencontre dans chacun des difficultés preſque inſurmontables. J'ai donc cru qu'en voulant ſe dévouer aveuglément à l'un ou à l'autre de ces deux ſyſtèmes, on ne pourroit pas répondre d'une maniere ſatisfaiſante à la queſtion propoſée. Un juſte milieu entre les deux m'a paru le plus ſûr: pour cette fin, j'ai choiſi de l'un & de l'autre ce qu'il y a de plus naturel & de plus ſimple; j'ai abandonné dans chacun ceux des principes qui choquent ou la raiſon ou le bon ſens, ne me ſervant que de ceux qui ſont clairs & intelligibles; j'en ai tiré des conſéquences, qui en découlent naturellement ſans les forcer. De cette maniere, j'ai tâché de concilier enſemble les deux ſyſtèmes par leur beau côté, pour en former un nouveau. J'admets dans ce nouveau ſyſtème les Tourbillons des deux eſpeces, tant ceux du Soleil & des Etoiles fixes, que les par-

ticuliers

Digitized by Google

ticuliers autour des Planètes principales. Je ne leur donne point d'autre mouvement que celui qu'ils ont reçu du même principe qui a fait tourner les Aſtres ſur leur centre qu'ils environnent. C'eſt la maniere la plus ſimple de concevoir la circulation d'un Tourbillon.

La gravitation des Planètes vers le centre du Soleil, & la peſanteur des corps vers le centre de la terre, n'a pour cauſe ni l'attraction de M. NEWTON, ni la force centrifuge de la matiere du Tourbillon ſelon M. DESCARTES; mais l'impulſion immédiate d'une matiere, qui ſous la forme d'un Torrent, que je nomme *central*, ſe jette continuellement de toute la circonférence du Tourbillon ſur ſon centre, & imprime par conſéquent à tous les corps, qu'il rencontre ſur ſon chemin, la même tendance vers le centre du Tourbillon. Delà je rends raiſon de la proprieté de cette gravitation des Planètes, néceſſaire pour qu'elles décrivent des Ellipſes autour du foyer, qui eſt le centre des tendances. Et tout ce qu'en déduit M. NEWTON par ſes attractions, ſe déduit naturellement de ma Théorie des impulſions du Torrent central.

Cependant mes principes ayant entr'eux une liaiſon étroite, je ne pourrois pas commodément raiſonner ſur le ſujet en queſtion, ſans faire préalablement une deſcription de mon ſyſtème: ce que je fais d'autant plus volontiers, que j'aurai occaſion d'expliquer en même temps les cauſes des principaux phénoménes du ciel, & de donner ainſi une idée generale d'une nouvelle Phyſique celeſte.

Je partage mon ouvrage en quatre parties; les trois premieres ſeront employées à l'expoſition du nouveau ſyſtème, & à l'explication des faits; & la quatrieme partie traitera en particulier de la Queſtion propoſée, où je ferai voir que la cauſe, qui fait que la route des Planètes principales s'écarte du plan de l'Equateur du Soleil, eſt ſemblable à celle qui détourne les Vaiſſeaux ſur mer de la direction de la quille, ce que l'on apelle la *Dérive des vaiſſeaux*.

PRE-

Digitized by Google

PREMIERE PARTIE.

IX.

IL y a long-temps que l'on a remarqué, que ſuivant l'idée que DESCARTES donne pour expliquer la cauſe de la peſanteur par l'action de ſes Tourbillons, les corps graves ne devroient pas tendre directement au centre, mais perpendiculairement à l'axe de ces mêmes Tourbillons; les expériences faites depuis ont confirmé cette objection, en ce qu'on a vû qu'une ſphére de verre remplie d'eau juſqu'à une partie qui contenoit de l'air, ou une matiere liquide de moindre denſité que l'eau, étant tournée rapidement ſur ſon axe, cet air, ou cette matiere moins denſe, ſe rangeoit, non point autour du centre en forme de globe, mais plûtôt le long de l'axe, & formoit un noyau allongé, aprochant de la figure cylindrique, conformément à la nature des forces centrifuges, qui veut que les parties qui en ont moins, comme ſont les moins denſes, cedent aux plus denſes, qui ont plus de force centrifuge, & tendent par conſéquent vers le centre du cercle parallele à l'équateur de la ſphére, c'eſt-à-dire, perpendiculairement à ſon axe. Qu'on liſe pour cela le diſcours de M. BULFFINGER.

M. HUGUENS voulant obvier à cet inconvenient, a imaginé une autre ſorte de Tourbillon, dont la matiere ſe meut en tout ſens ſur la ſurface ſphérique de chaque couche dont il conçoit compoſé ſon Tourbillon; de-là il prétend faire voir pourquoi les corps peſants tendent directement au centre du Tourbillon: mais ce mouvement prétendu ſouffre de très-grandes difficultés, parce qu'on ne ſauroit dire ce qui peut entretenir ce mouvement; d'autant qu'il ſemble que chaque particule du Tourbillon, étant rencontrée par une autre de maſſe & viteſſe égale directement opoſée, toutes les deux devroient s'arrêter tout court, à moins qu'on ne veuille ſupoſer un reſſort parfait dans ces corpuſcules élementaires, qui les repouſſe, ſans pouvoir

Digitized by Google

pouvoir dire d'où leur vient ce reſſort, & partant plus difficile à expliquer que la cauſe de la peſanteur elle-même.

X.

Selon mon ſyſtème, il faut concevoir deux ſortes de matiere, comme auſſi deux mouvements principaux, dans un Tourbillon celeſte; l'une de ces ſortes de matiere, eſt celle que je conçois comme parfaitement liquide, je veux dire, non ſeulement diviſible à l'infini, ce qui eſt commun à tous les corps, mais diviſée réellement à l'infini & ſans bornes, ou plûtôt c'eſt un fluide uniforme, qui n'eſt pas compoſé de corpuſcules élementaires, comme on conçoit les fluides ordinaires, qui ſelon la multitude & groſſeur de ces corpuſcules plus ou moins ſerrés, ſont conçûs être plus ou moins denſes, & faire une plus ou moins grande réſiſtance aux corps ſenſibles qui y nagent: au lieu que nôtre matiere parfaitement liquide, entant qu'elle eſt deſtituée de corpuſcules élementaires, eſt ſans réſiſtance, comme nous verrons plus amplement ci-après.

M. DESCARTES paroit avoir ſupoſé quelque choſe d'aprochant, par ſa matiere qu'il apelle du *premier élement*, mais mais il y a une très-grande difference entre nos deux manieres de concevoir la nature & l'origine de cette matiere: la voici.

XI.

On ſait que ce Philoſophe prétendoit, que lorſqu'un Tourbillon celeſte devoit ſe former d'une maſſe de matiere, au commencement en repos & diviſée en petits corpuſcules qui ſe joignoient exactement les uns aux autres, ne laiſſant aucun vuide entr'eux; que toute cette grande maſſe ayant pris par la volonté de Dieu, un mouvement de circulation autour d'un centre, ces corpuſcules ont dû quitter leurs places, & ſe choquer de toutes parts; d'où il eſt arrivé, ſelon lui, que par la fréquente attrition de leurs angles & prominences avan-

Digitized by Google

cées ils ſe ſont enfin écornés, juſqu'à s'arrondir parfaitement en petits globules très-ſolides, & deſtitués de pores; car DESCARTES croit que la ſolidité ou la dureté des corps n'a point d'autre cauſe que le repos relatif de leurs parties entr'elles.

C'eſt l'amas de tous ces petits globules qu'il a voulu nommer la matiere du ſecond élement, & qui, par la continuation de ſon mouvement circulaire une fois imprimé, forme un des Tourbillons celeſtes. Le déchet, ou la raclûre provenuë après l'arrondiſſement des globulés, eſt ce que DESCARTES a nommé matiere du premier élement, dont les particules, incomparablement plus petites que les globules, n'ont aucune figure réguliére ni déterminée, mais ſervent en partie à remplir les interſtices triangulaires des globules, & en partie à s'amaſſer autour du centre du Tourbillon, dans l'eſpace qui ſeroit reſté vuide par la formation & diminution des globules, leſquels par leur force centrifuge ſe ſont éloignés du centre. Cet amas de matiere du premier élement qui occupe la region centrale du Tourbillon, eſt, ſelon DESCARTES, la ſubſtance du Soleil, ou d'une autre étoile.

XII.

Je ne veux pas m'amuſer à faire l'hiſtoire de toutes les conſéquences que ce grand Philoſophe a tirées de cette hypothèſe, pour en compoſer tout ſon ſyſtème du monde. Il me ſuffit de faire voir que ſa matiere du premier élement n'eſt pas actuellement diviſée à l'infini, puiſqu'il veut que chacune de ces particules ait été ſéparée d'une plus grande, dont elle faiſoit partie; elle eſt donc encore un corpuſcule entier & indiviſé, quoique ſujet à des changements infinis de grandeur & de figure. De-là il ſuit que nôtre Philoſophe a regardé la ſolidité ou la dureté des particules élementaires, c'eſt-à-dire, ce repos relatif de leur parties internes, comme un attribut eſſentiel ou attaché à leur nature.

Digitized by Google

XIII.

Mais moi tout au contraire, je penſe que la dureté des corps, quelque petits qu'ils ſoient, eſt une qualité accidentelle, qui n'eſt point compriſe dans l'idée que nous devons avoir du corps. La cohéſion des parties, ſoit parfaite ou imparfaite, eſt un phénomène qui a ſa cauſe comme tous les autres phénomènes de la nature. Qui dit corps, ne dit autre choſe que ce qui eſt étendu, mobile & impénétrable; voilà tout ce que l'idée du corps doit renfermer; il n'eſt pas même néceſſaire de faire entrer la diviſibilité dans la définition du corps, comme étant déja compriſe dans la ſeule notion de l'etenduë.

XIV.

Cela étant, il eſt viſible que la matiere, entant que matiere, eſt non ſeulement diviſible à l'infini, mais qu'immédiatement après ſa création elle pouvoit être réellement diviſée à l'infini, j'entends ici une *infinité* abſoluë, en ſorte qu'il n'y a pas même des particules infiniment petites, ou pour parler ainſi, des différentielles de matiere, dont on puiſſe dire qu'elles ont une ſolidité néceſſaire; car encore une fois la ſolidité n'entre pas dans la nature du corps, & n'en eſt point du tout eſſentielle. Je ſais bien qu'il y a des Philoſophes, & preſque la plûpart, qui croyent que les corpuſcules élementaires qui compoſent les corps ſenſibles, ſont ſolides de leur nature; comme ſi la petiteſſe pouvoit changer la nature du corps: mais c'eſt un préjugé tout pur, dont on devroit ſe défaire.

Ainſi je conçois très-clairement, qu'il peut y avoir, ſans contradiction, dans le monde, une matiere telle que je viens de la décrire, & que j'apellerai, priſe dans ce ſens, *matiere premiere*, ou matiere du *premier élement*, dont la nature eſt d'avoir une diviſion, ou plûtôt une diſſolution de parties qui va à l'infini abſolu. En effet, qu'eſt-ce qui m'empêche de ſupoſer l'exiſtence de ce premier élement? car aprés la création

Digitized by Google

de la matiere en general, le Créateur n'avoit qu'à en laiſſer une partie dans ſon état naturel, & cette partie étoit déja ce premier élement, ſans que le Créateur y adjoûtât une nouvelle qualité.

X V.

L'autre partie de la matiere aura été employée primitivement à en former des corpuſcules, en prenant pour chacun une petite quantité de matiere du premier élement, ramaſſée enſemble, & qui par le ſeul mouvement conſpirant dans tous ſes points, fait une maſſule dont les parties ſont par cela même cohérentes, ſans dire qu'elles ſoient invinciblement dures. Ce ſont donc ces corpuſcules élementaires que je qualifierai du titre de *matiere du ſecond élement*. Je ne prétends pas, à l'exemple de DESCARTES, montrer comment par les différentes combinaiſons de la matiere du ſecond élement avec le concours du premier s'eſt formé la matiere du troiſiéme élement, & de-là comment les corps terreſtres & celeſtes ont pû prendre leur origine; ce ſeroit une entrepriſe trop hardie & trop préſomptueuſe pour moi. Mon but eſt ſeulement de faire voir que par la nature & par l'action de la matiere du premier & du ſecond élement, tels que je les ai expliqués ici, je me trouve en état de rendre raiſon des principaux phénomènes celeſtes que l'Aſtronomie a obſervés, & partant auſſi de celui qui fait le ſujet de la queſtion de l'illuſtre Académie.

X V I.

La matiere du premier élement étant parfaitement liquide, & n'ayant point de parties cohérentes, on voit bien qu'elle ne fait aucune réſiſtance aux corps qui s'y meuvent; car la réſiſtance des fluides ne vient que de l'inertie des molécules dont les fluides ſont compoſés, & dont un corps qui y nage, doit à tout moment remuer, & déplacer une certaine quantité; ce qui ne ſe peut faire ſans leur communiquer une partie de ſon

ſon mouvement, & en perdre par conſéquent tout autant. Et c'eſt en quoi conſiſte la réſiſtance, qui, la viteſſe étant égale, ſera toûjours proportionnelle à la denſité du fluide, indépendamment de la groſſeur des molécules; car c'eſt le volume entier, & non pas le nombre, que le corps mû déplace dans un petit temps donné, qui doit déterminer la quantité de la réſiſtance.

Ainſi on accorde à M. NEWTON, que faiſant abſtraction de la tenacité & du frottement du fluide contre le corps, ce qui cauſe une autre eſpece de réſiſtance; ne regardant que la réſiſtance qui vient de l'opoſition & du déplacement d'un volume de molécules que le corps rencontre, cette réſiſtance ſera en raiſon compoſée de la denſité & du quarré de la viteſſe: on accorde donc auſſi, qu'une plus ou moins grande ſubtilité de ces molécules, ne fait rien à l'eſtimation de la réſiſtance; étant viſible que les plus ſubtiles molécules peuvent être ſi ſerrées, que le fluide qui en eſt compoſé ſera beaucoup plus denſe, qu'un autre dont les molécules (peut-être plus groſſieres) ne laiſſent pas de compoſer un fluide d'une rareté fort grande; tel eſt, par exemple, l'air dont les molécules élementaires, ſelon toutes les aparences, ont plus de groſſeur que celles du vif-argent, quoique le vif-argent ſoit bien dix mille fois plus denſe que l'air.

XVII.

Mais ſelon l'idée que nous avons de nôtre matiere du premier élement, puiſqu'elle n'eſt pas un amas de molécules ſolides comme un autre fluide, il eſt évident qu'elle n'a pas cette inertie, requiſe pour opoſer de la réſiſtance aux corps qui s'y meuvent. C'eſt donc une matiere liquide, d'une continuité & homogeneïté parfaite, qui cede avec une facilité infinie au moindre mouvement d'un corps, qui ne fait que remplir le vuide, & s'accommoder à tout moment aux différentes ſituations des corps qu'elle environne. Cela fait que

Digitized by Google

les corps y peuvent continuer leur mouvement ſans en rien perdre, tout comme ils feroient, s'ils nageoient dans un vuide parfait, tel que le ſupoſent les partiſans rigides de M. Newton.

XVIII.

Suivant ma théorie, la nature & la formation d'un Tourbillon celeſte ſe fait, comme je vais l'expliquer: il faut concevoir une prodigieuſe quantité de matiere fluide, mais non pas de celle que Descartes apelle des globules céleſtes; je ſupoſe que ſa plus grande partie ſoit faite de cette matiere du premier élement parfaitement liquide, dans laquelle ſoit mêlée une bonne partie de matiere du ſecond élement, diſperſée par toute la maſſe; en ſorte que les particules du ſecond élement, quoique bien proches les unes des autres, ne laiſſent pas d'avoir des intervalles, qui ſont bien grands en comparaiſon des diamétres de ces particules; à peu près comme je conçois, que le peu de fumée qui ſort d'un grain d'encens mis ſur un charbon ardent remplit tout l'air d'une chambre, ou comme un grain de cochenille peut teindre une grande quantité d'eau claire. Donc toute cette maſſe de matiere parfaitement liquide, mais impregnée de particules du ſecond élement, commençant à être tournée autour du centre en forme d'un Tourbillon, continuëra de ſe mouvoir avec la viteſſe une fois acquiſe; mais cette viteſſe, qui ſera vers l'équateur du Tourbillon à peu près en raiſon reciproque de la racine quarrée de la diſtance au centre, comme on a démontré ailleurs que la nature du tourbillon le requiert, n'eſt pas à beaucoup près ſi rapide, que ſe l'imaginent ceux qui croyent, avec Descartes, que les Planètes ſont emportées par le Tourbillon autour du Soleil. Car je ferai voir que les Planètes ont un tout autre principe de leur mouvement annuel, & que la circulation de la matiere du Tourbillon eſt deſtinée à un autre uſage qu'à celui d'emporter les Planètes.

XIX.

Digitized by Google

XIX.

Je reviens à conſiderer le Tourbillon dans l'état de génération: dès le moment donc qu'il a commencé à circuler, les particules du ſecond élement ont à la vérité acquis un peu de force centrifuge; je dis *un peu*, parce que leur mouvement circulaire eſt très-lent par raport à celui qui ſeroit requis pour entrainer les Planètes ſuivant l'idée de M. DESCARTES; cependant cette force centrifuge, quelque petite qu'elle ſoit, a fait monter un peu les particules du ſecond élement, en s'éloignant du centre; s'étant ainſi raprochées entr'elles, elles ont compoſé le corps du Tourbillon plus denſe qu'il n'étoit, & la denſité introduite a été différente ſelon les différents éloignements du centre, & la diverſité des particules, ſoit dans leur groſſeur, figure, ou autres circonſtances, ce qu'il n'eſt pas à propos d'aprofondir, comme ne faiſant rien à mon deſſein. Il ſuffit que je diſe que la denſité la plus grande qui ſe trouve dans le Tourbillon, peut être conçûë de ſi peu de conſéquence, que malgré cette denſité, la matiere du ſecond élement eſt encore ſi rare, que le mouvement d'une Planète n'en ſauroit être retardé ſenſiblement pendant un grand nombre de ſiécles.

XX.

Cependant, par l'éloignement du centre & par la condenſation de la matiere du ſecond élement, il reſta un eſpace autour du centre du Tourbillon, qui fut rempli de matiere du premier élement d'une liquidité parfaite, entremêlée pourtant de particules groſſiéres, qui par l'irrégularité de leurs figures ſe ſont accrochées en partie, & n'ont pas acquis aſſés de force centrifuge, pour ſortir de cet abîme de matiere du premier élement.

XXI.

Digitized by Google

XXI.

C'eſt cette matiere infiniment liquide, accumulée & renfermée dans l'eſpace central de chaque Tourbillon, qui fait ce qu'on apelle une Etoile fixe, ou le Soleil qui eſt au centre du Tourbillon ſolaire, dont je veux entretenir mon lecteur; tout ce que j'en dirai pouvant être apliqué aux autres Tourbillons, dont chacun eſt parmi les autres, comme entouré de ceux qui lui ſont les plus voiſins tout à l'entour.

XXII.

La maſſe totale du Soleil, ramaſſée autour du centre de ſon Tourbillon, aura acquis, par la premiere impreſſion, ce mouvement de rotation ſur ſon centre, dont une révolution (comme on le connoit par ſes taches) s'acheve dans le temps de 25½ jours par raport aux étoiles fixes; mouvement trop tranquille & trop lent pour produire une force centrifuge de quelque conſidération; comme je le ferai voir ci-deſſous.

XXIII.

Mais la matiere du Soleil, qui eſt infiniment ſubtile, & dont la moindre portion l'eſt auſſi, par conſéquent ſuſceptible d'une extrême agilité, cette matiere, dis-je, n'auroit-elle point d'autre principe de mouvement, que celui dont je viens de parler, en vertu duquel tout le globe ſolaire tourne ſur ſon axe d'une viteſſe aſſés uniforme, de même que ſon tourbillon dans chacune de ſes couches? Il ne faut pas douter que la matiere du Soleil, outre ſon mouvement rotatif, ne ſoit encore dans une agitation très-violente, qu'elle a reçûë dès le commencement de ſon exiſtence, & qui ne ſauroit diminuer par la longueur du temps, quoique cette agitation ſe faſſe confuſément & en tout ſens: car comme ce liquide parfait eſt d'une nature à ne point faire de réſiſtance aux corps qui

qui y nagent, ainſi que nous l'avons dit, il s'enſuit que les parties, n'ayant point de connéxion entr'elles, ſe mouvront auſſi très-librement, ſans s'empêcher, ni ſe réſiſter en aucune maniere.

XXIV.

Voyons ce qui doit arriver aux corpuſcules groſſiers & irréguliers, que j'ai dit (§. XX) être mêlés par-ci par-là dans dans cet océan du premier élement; & qui par l'irrégularité de leur figure, & par la lenteur du mouvement de rotation de la maſſe du Soleil, n'acquiérent pas aſſés de force centrifuge pour ſortir & s'éloigner du Soleil, ou, s'il y en a qui s'éloignent, cet éloignement ne s'étendra qu'à une certaine diſtance, par exemple, tout au plus juſqu'à l'orbite de la Terre, peut-être dans un temps plus que dans un autre. Enfin, ſelon la conſtitution & l'agilité de ces corpuſcules, une partie ira aſſés loin, une autre ſe rangera plus ou moins haut, à proportion de la force centrifuge que les corpuſcules reçoivent par le tournoyement du Soleil.

XXV.

C'eſt peut-être de cette matiere qui s'échape du Soleil, que ſe forme une eſpéce d'atmoſphère platte autour de cet aſtre, & particulierement ſur le plan de ſon équateur, puiſque c'eſt ici où le mouvement de circulation eſt le plus vite, & où par conſéquent la force centrifuge eſt la plus grande. Ainſi il n'y a nul doute que ce ne ſoit cet atmoſphère qui cauſe la lumiere zodiacale, que M. CASSINI *le pere* obſerva la premiere fois le ſoir du 18 Mars 1683, comme il l'a annoncé lui-même dans le Journal des Savants du 10 Mai de la même année. Après lui, M. FATIO DE DUILLIER remarqua auſſi cette lumiere dans l'Automne le matin avant le lever du Soleil; d'où il conjectura d'abord, qu'elle devoit paroitre le plus ſenſiblement dans ces deux ſaiſons, ſavoir dans le Printemps après le cou-

Digitized by Google

cher du Soleil, & dans l'Automne avant ſon lever, parce qu'alors dans nos climats, l'écliptique (ou plûtôt le plan de l'équateur ſolaire) ſur lequel la lumiere (qu'on apelle zodiacale) ſe répand, s'éleve le plus droit ſur l'horizon, ou s'aproche le plus d'un cercle vertical.

XXVI.

Après cette petite digreſſion, je reviens à mon ſyſtème, qui ſe developera par l'explication des principaux phénomènes aſtronomiques, entre leſquels celui qui eſt en queſtion demande le plus d'attention, vû l'extrême difficulté qui ſe préſente de tout côté en voulant chercher une cauſe phyſique probable, qui faſſe détourner la route des Planètes du plan de l'équateur ſolaire; d'autant qu'il paroit être contre le cours & l'ordre de la nature, que les corps mûs ne ſuivent pas la direction de la cauſe mouvante, là où les corps celeſtes ont un champ libre d'aller en tel ou tel ſens, vers où la force motrice les détermine.

C'eſt ici en effet, que l'action des Tourbillons à la Cartéſienne ſouffre un horrible échec; car le mouvement du Tourbillon & celui du Soleil ſur ſon axe, ſe faiſant chacun d'Occident en Orient, prennent ſans doute leur origine d'une même cauſe: le Tourbillon & le Soleil font un tout; ainſi la même force primitive, qui a fait tourner l'un, a auſſi fait tourner l'autre; donc l'équateur de l'un & l'équateur de l'autre devroient être dans un même plan; donc auſſi les Planètes, qui flottent tranquillement (ſelon l'idée de DESCARTES) dans la matiere du Tourbillon, devroient ſuivre abſolument ſa direction, tout comme un batteau dans une riviere abandonné à lui-même, eſt bien-tôt entrainé par l'eau, & dirigé ſuivant le fil du courant. Cependant les Planètes ne marchent pas ſur les traces du courant du Tourbillon; elles s'en écartent; & décrivent des routes particulieres, dont les plans coupent le plan commun du Tourbillon & du Soleil dans la ligne des

Nœuds

Nœuds qui paſſe par leur centre commun. Voilà le point capital de la difficulté.

XXVII.

Pour me préparer à y répondre convenablement, je continue à faire mes réflexions ſur les effets que doit produire la véhémente agitation de la matiere du premier élement, dont j'ai commencé à parler (§. XXIII) : je regarde d'abord cette agitation comme la plus forte ébullition que l'on puiſſe concevoir, & d'autant plus forte que la quantité de corpuſcules irréguliers du ſecond élement, qui s'y trouvent diſperſés, ne ſauroit rallentir ni diminuer en rien la violence de cette ébullition, parce que quelque copieuſe que ſoit cette matiere héterogéne des corpuſcules, elle eſt comptée pour rien en comparaiſon de toute la maſſe du Soleil, & n'y fera pas plus qu'une pincée de pouſſiere que je jetterois dans un grand chauderon rempli d'eau bouillante.

Cependant ces corpuſcules ne laiſſent pas d'être la cauſe de pluſieurs effets conſiderables tant au dedans qu'au dehors du Soleil ; car comme ils ſont obligés de ſubir la même agitation confuſe, ils ne peuvent que ſe choquer très-fréquemment avec une grande impétuoſité, par où il arrive qu'une partie des plus groſſiers & irréguliers, pouvant réſiſter à la rupture, s'accrochent enſemble, & forment enfin de gros pelotons, à peu près comme ſe font les avalanges de neige, qui groſſiſſent en roulant avec précipitation du haut d'une montagne. C'eſt de-là, ſans doute, que tirent leur origine les taches de différente grandeur & figure, que l'on obſerve ſur le diſque du Soleil, qui vraiſemblablement ne ſont autre choſe que ces gros pelotons, expulſés quelquefois vers la ſurface du Soleil, & enſuite derechef engloutis.

L'aparition de ces taches a été d'un grand ſecours aux Aſtronomes, qui par leur mouvement ſur le diſque ſolaire ont eu l'avantage de déterminer deux choſes : 1°. le temps

Digitized by Google

périodique d'une révolution du Soleil ſur ſon axe; & 2°. la ſituation de ſon équateur par raport aux étoiles fixes. Par où ils ont connu que ce mouvement de rotation ſe fait en même ſens que la révolution des Planètes autour du Soleil, ſavoir ſuivant l'ordre des Signes; marque certaine que ces mouvements ſont les effets d'une même cauſe. Quant à l'équateur ſolaire, ils ont auſſi trouvé par leurs fréquentes obſervations, qu'il n'eſt pas dans un plan commun avec l'écliptique ou l'orbite de la Terre, ni avec les orbites des autres Planètes, mais que toutes ces orbites ſont différemment inclinées, tant entr'elles, que par raport à l'équateur du Soleil. Or comme cette différence ne paroît pas bien s'accorder avec la mutuelle dépendance qui devroit régner entre le mouvement de rotation du Soleil, & celui de ſon Tourbillon; c'eſt juſtement ce qui a occaſionné l'illuſtre Académie d'en demander la cauſe phyſique: mais avant que d'en venir à la ſolution de cette importante queſtion, il faut néceſſairement achever d'expliquer mon ſyſtème, afin que la liaiſon entre tous les phénomènes, dont l'explication en découle ſi naturellement, ſoit expoſée dans un plus grand jour. Je me flatte que la ſimplicité, auſſi bien que la fécondité des principes dont je me ſers, ſera agréable à tous ceux qui aiment qu'un ſyſtème ſoit clair & intelligible.

XXVIII.

Nous avons conſideré l'effet que produiſent les corpuſcules groſſiers & crochus, en formant par leur rencontre & leur concreſcence les taches du Soleil; je paſſe maintenant à méditer ſur ceux qui ſont moins groſſiers, & d'une conſiſtance friable: je vois avec une évidence entiere, que ceux-ci ne pouvant pas réſiſter à l'impetuoſité & frequente colliſion, ſans ſe rompre de plus en plus, deviendront d'une ſubtilité qui ſurpaſſe la force de l'imagination. C'eſt donc dans l'agitation incroyablement violente, & la colliſion perpétuelle de ces petites maſſules, que conſiſte la lumiere éclatante, & la chaleur exceſſive

du

du Soleil. Il n'y a qu'à voir comment l'une & l'autre eſt portée au dehors du Soleil à une diſtance immenſe, & avec une rapidité prodigieuſe.

XXIX.

Je ne ſais ſi on ne m'accordera pas facilement, que ces maſſules reduites à une petiteſſe quaſi infinie, & miſes dans une efferveſcence extraordinaire, ne pouvant plus ſe contenir dans leurs bornes, ſeront chaſſées & jettées hors du Soleil, avec une viteſſe incomparablement plus grande que tout ce qu'on peut imaginer de plus rapide; & cela en direction droite du centre vers tous les points de la ſurface extrême, & au de-là même (comme nous l'entendrons bientôt) du Tourbillon. Nous voyons au moins une foible image de telles exploſions dans les liqueurs ſpiritueuſes faites par la chymie, leſquelles étant fortement ſecouées & agitées, rendent une odeur beaucoup plus forte & plus au loin, que quand elles ſont dans un état calme; marque certaine que, par le mouvement d'agitation, les particules ſpiritueuſes ſont pouſſées dehors, & diſperſées de toute part à la ronde, juſqu'à une diſtance conſiderable.

Je conçois donc, que ces effluves qui ſortent du Soleil, ſans ceſſe, en ligne droite, par l'effet d'une exploſion très-violente, ſont ce qu'on apelle les rayons du Soleil, qui portent ſur tout ce qu'ils rencontrent la lumiere & la chaleur, de la maniere qu'on ſait aſſés, ſans que je m'y arrête long-temps.

XXX.

Je dois plûtôt répondre à deux objections qu'on peut me faire. La premiere eſt, pourquoi par ce continuel découlement de ces maſſules, qui dure déja depuis la création du Monde, la ſource, qui eſt dans le Soleil, ne tarit pas à la fin, & que la matiere ne lui en manque jamais? La ſeconde objection conſiſte en ce qu'on me demandera, d'où vient que les rayons, qui traverſent les vaſtes étenduës du Ciel, ne perdent rien de

leur rapidité ? Pour ce qui eſt de la derniere de ces objections, à laquelle je répondrai en premier lieu, je dis ſans détour, que chaque Tourbillon n'étant qu'une maſſe de matiere du premier élement, mais ſans agitation inteſtine, qui ſe trouve ſeulement dans celle du Soleil & des autres Etoiles fixes, & que dans cette maſſe du Tourbillon y ayant bien quantité de particules du ſecond élement, mais qui ſont fort diſperſées les unes des autres ; on voit bien, que puiſque la matiere du premier élement ne réſiſte pas, les rayons y paſſeront ſans aucun obſtacle de la part de cette matiere, & à cauſe des grands interſtices que laiſſent entr'elles le particules du ſecond élement, l'extrême ſubtilité des maſſules, dont les rayons ſont compoſés, fait auſſi qu'il n'y a point d'empêchement à craindre pour leur paſſage ; & que ſi par hazard il y en a, l'une ou l'autre de ces particules, qui ſe rencontre ſur leur chemin, ſera bien vite refoulée, & écartée par le flux continuel du rayon.

XXXI.

Mais quant à la premiere objection, elle merite plus d'attention ; d'autant que la réponſe que j'y donnerai, m'ouvre juſtement le chemin pour parvenir à la connoiſſance de la cauſe phyſique d'un des plus importants phénomènes, je parle de la peſanteur. On renvoye donc la réponſe, pour la donner lorſque j'aurai à expliquer la peſanteur dans toute ſon étenduë ; il ſuffit que je diſe en paſſant, que la perte de la matiere du Soleil, qui ſe fait par l'écoulement des rayons, eſt à tout moment reparée par une égale quantité d'autre matiere qui s'y jette de tout côté, venant des extrémités du Tourbillon vers le Soleil, de la maniere que j'indiquerai.

Revenons donc aux rayons du Soleil, dans le progrès deſquels conſiſte la propagation de la lumiere. Il y a long-temps que l'on eſt deſabuſé de croire avec DESCARTES, que cette propagation ſoit inſtantanée comme un effort qui ſe communique à la fois d'un bout à l'autre par toute la longueur d'un bâton,

Digitized by Google

bâton, quand il eſt preſſé par l'une des extrémités. L'obſervation qu'a faite M. ROMER, montre evidemment que le progrès de la lumiere eſt ſucceſſif, quoique prodigieuſement rapide, puiſqu'elle parcourt le diamétre de l'orbe annuel de la Terre dans le temps de 22 minutes horaires; enſorte que dans une ſeule minute elle fait un chemin de mille diamétres de la terre, & $16\frac{2}{3}$ diamétres dans une ſeconde. Une telle viteſſe, qui eſt ſix cent mille fois plus grande que celle du ſon, a paru à M. HUGUENS trop énorme, pour croire que la propagation de la lumiere ſe faſſe par un tranſport actuel d'une matiere, qui depuis l'objet lumineux s'en vienne juſqu'à nous. Il a donc mieux aimé concevoir cette propagation ſur le pied que ſe fait celle du ſon, qui s'étend par des ondes ſphérique, comme on le voit dans ſon Traité de la Lumiere, d'ailleurs très-ingénieux; où il prétend que les particules qui compoſent le rayon, ſans ſortir loin de leur place, ſe pouſſent ſucceſſivement, comme feroient de petites boules élaſtiques miſes bout à bout ſur une longue file en ligne droite, dont la premiere en mouvement choqueroit la ſeconde, celle-ci la troiſieme, & ainſi de ſuite, tout le mouvement de la premiere boule ſeroit tranſmis à la derniere par les boules intermédiaires.

XXXII.

Mais ſans parler de l'impoſſibilité du hazard, qui demanderoit que toutes ces petites boules fuſſent miſes très-exactement & à la rigueur géométrique en ligne droite; car ce qu'il dit, que ſi une des boules en rencontroit à la fois trois ou pluſieurs autres, la communication du mouvement en ligne droite ne laiſſeroit pas de ſe faire ſur les ſuivantes avec la même viteſſe, eſt très faux, & contre les règles de la communication du mouvement; ſans parler donc de cet inconvénient, on voit bien que par-là il ne gagneroit rien pour ſauver la difficulté qu'il y auroit à comprendre cette énorme viteſſe, qu'il faut ſupoſer en ſtatuant que la matiere des rayons ſe tranſporte effectivement depuis l'objet rayonnant juſqu'à la plus grande diſtance où la lumiere ſe porte;

car

Digitized by Google

car quand on lui accorderoit cette ſorte de tranſmiſſion de mouvement d'une boule à l'autre, ne faut-il pas que chacune reçoive ſucceſſivement la même viteſſe par l'impreſſion de la précédente? & la rapidité de cette ſucceſſion de l'une à l'autre n'eſt-elle pas plus incompréhenſible, que ſi la viteſſe une fois imprimée à chacune des boules ne fait que perſeverer, puiſqu'il n'y a rien en leur chemin qui leur réſiſte, comme nous avons fait voir?

Outre cela, l'élaſticité des boules d'où leur viendroit-elle, vû que les corps ſont naturellement ſans reſſort, & s'ils en ont, il faut qu'il y ait une cauſe qui le produiſe; car certainement l'idée que l'on a du corps ne renferme pas celle de l'élaſticité; autrement tout corps devroit être élaſtique, ce qui eſt contre l'expérience; donc, ſelon M. HUGUENS, il faudroit ſupoſer encore un autre genre de matiere, qui fût incomparablement plus ſubtile que ces boules qui compoſent les rayons de lumiere, leſquelles ſont déja d'une ſi grande ſubtilité, qu'elles paſſent librement les pores les plus étroits, tels que ſont ceux du verre, du criſtal, du diamant: ce ſeroit donc cette autre matiere, qui entrant avec une rapidité inconcevable dans les globules de la lumiere, leur devroit procurer cette parfaite élaſticité.

Ainſi M. HUGUENS, bien loin d'éviter la difficulté, qui, ſelon lui, ſe rencontre en ſupoſant un tranſport effectif des globules de lumiere avec une ſi grande viteſſe, eſt reduit à ſupoſer dans la matiere, qui leur donne le reſſort, une viteſſe infiniment plus grande; ou veut-il peut-être que l'élaſticité leur ſoit innée ou eſſentielle, ſans qu'on ait beſoin de ſupoſer pour cela une cauſe étrangère? mais ce ſeroit attribuer à la matiere une qualité auſſi incompréhenſible que l'eſt la vertu attractrice que donnent ſi liberalement aux corps Mrs. les *Newtoniens*, ſe mettant peu en peine qu'on l'entende ou non. En fait de Phyſique, on a raiſon de rejetter la coûtume de ceux, qui pour expliquer quelque phénomène, ont recours à des principes chimériques, plus obſcurs que ce qui eſt en queſtion.

Digitized by Google

XXXIII.

Après cette diſcuſſion, nous ne balancerons plus à établir pour hypothèſe, que les petites maſſes très-fines (que je nommerai *maſſules*) formées dans le Soleil par cette agitation violente, ſont continuellement chaſſées hors du Soleil avec une rapidité néceſſaire pour parcourir mille diamétres de la Terre dans une minute de temps. Et comme cette exploſion ſe fait de tout côté, ou vers toutes les plages du Monde, il eſt viſible qu'il y a autant de rayons partants du Soleil, que l'on peut s'imaginer de lignes droites tirées du centre vers toute la circonférence de ſon Tourbillon, & que chaque rayon eſt une file rectiligne d'une infinité de maſſules, qui ſe ſuivent immédiatement les unes après les autres avec cette prodigieuſe viteſſe.

Rien n'empêche donc de concevoir, qu'à cauſe de leur extrême petiteſſe, elles pénétrent librement les pores des corps groſſiers ſur leſquels elles tombent, comme ſont les Planètes & leurs atmoſphéres, ſans y produire d'autre effet que la lumiere & la chaleur; la lumiere ſe termine ſur la ſurface des corps, à moins que leurs pores ne ſoient diſpoſés en ligne droite, auquel cas la lumiere paſſe plus outre avec les rayons; car ceux-ci paſſent toûjours (au moins pour la plûpart) de part en part, quoiqu'ils ſoient obligés d'aller en ſerpentant par les corps qu'on nomme *opaques*, à cauſe des détours & des ſinuoſités obliques des pores, mais néanmoins ſans rien perdre de leur rapidité; car les pores ſont aſſés larges pour donner un libre paſſage, ils changent ſeulement la direction, & interrompent par-là l'effet de la lumiere, qui demande la continuation en ligne droite.

Mais pour la chaleur, qui eſt cauſée par le frottement continuel que ſouffrent les pores intérieurs ou leurs parois, quand les rayons y paſſent & agitent les petits filaments qui avancent hors de ces parois; il eſt clair que les parties des corps opaques, en étant ébranlées en diverſes manieres, reçoivent cette qualité qu'on apelle *chaleur*.

 XXXIV.

XXXIV.

Ce n'eſt pas mon deſſein de m'arrêter plus long-temps ſur l'explication de ces deux effets, j'entends de la lumiere & de la chaleur; je n'en euſſe même point du tout parlé, comme hors de mon ſujet, ſi la petite deſcription de mon ſyſtème (que je dois faire préliminairement avant que de donner une ſolution probable de nôtre queſtion) ne m'y eût conduit directement.

Je reprends donc le fil de mon diſcours, pour voir ce qui arrive de plus aux rayons du Soleil, après avoir paſſé au travers des Planètes, auſſi-bien qu'à tous ceux qui ne les traverſant pas ſont parvenus au-deſſus de la region de Saturne, où ils ne rencontrent plus de Planètes juſqu'à l'extrémité du Tourbillon: à moins que dans cette vaſte étenduë il n'y ait peut-être encore quelques autres Planètes, mais qui pour être trop éloignées ou trop petites, ne ſont pas viſibles.

XXXV.

Les maſſules, dont les files compoſent les rayons, étant ainſi parvenues à l'extrémité du Tourbillon, ſont d'une très-grande rareté, puiſque toutes celles qui partoient à la fois en lignes droites depuis la ſurface du Soleil, ſont préſentement répanduës par toute la ſurface du Tourbillon; par conſéquent les denſités étant en raiſon réciproque des eſpaces qu'une même quantité de maſſules occupe, il eſt évident que la denſité de leur maſſe totale dans l'inſtant qu'elles partent du Soleil, eſt à la denſité de cette même maſſe répanduë ſur toute la ſurface du Tourbillon, réciproquement comme le quarré du demi-diametre du Tourbillon eſt au quarré du demi-diametre du Soleil. D'où il paroit qu'à cauſe de cette grande rarefaction de la matiere des rayons ſolaires, la lumiere doit être affoiblie dans la même raiſon directe; avec tout cela les rayons ne laiſſent pas de continuer leur route avec la même rapidité, & de

de pénétrer non-ſeulement dans les Tourbillons voiſins, mais de les traverſer, & encore d'autres plus éloignés, pour porter leur lumiere, quoiqu'affoiblie extrémement, à des diſtances immenſes; il faut bien que cela ſoit ainſi, car ſans cela les étoiles fixes, qui dardent leurs rayons dans nôtre Tourbillon, au travers de pluſieurs autres qui ſont entre deux, ne ſeroient pas viſibles.

XXXVI.

Cependant conſiderons maintenant un autre effet qui doit arriver à la matiere des rayons, lorſqu'elle eſt portée à l'extrémité de ſon Tourbillon, & qu'elle eſt prête à entrer dans celui qui le touche immédiatement: il eſt très-probable, & moralement certain, que parmi tant de millions de milliards de ces maſſules, qui ſe préſentent à chaque inſtant ſur toute la ſuperficie du Tourbillon, & dont le plus grand nombre paſſe plus outre, il y en a pourtant auſſi une multitude très-conſiderable, qui ſont rencontrées par tout autant de maſſules ſemblables, leſquelles chaſſées du fond des Tourbillons qui environnent le nôtre, viennent fondre ſur les premieres avec la même force. D'où il s'enſuit que ces maſſules n'ayant naturellement point de reſſort, comme je l'ai dit ci-deſſus, il faut que toutes les fois que deux de ces maſſules de différents Tourbillons viennent à ſe choquer directement, elles perdent toutes deux leur mouvement, & s'arrêtent tout court colées enſemble, & forment ainſi une nouvelle maſſule en repos deux fois plus groſſe que chacune n'étoit auparavant. Il peut même arriver, ſans beaucoup de hazard, que pluſieurs de ces nouvelles maſſules en repos viennent à être choquées à la fois par deux autres primitives, l'une d'un côté, & l'autre du côté opoſé; auquel cas il eſt derechef manifeſte par les règles de la communication du mouvement des corps ſans reſſort, que ce ſecond choc détruiſant le mouvement opoſé de ces deux nouvelles maſſules, & les colant aux deux premieres, il s'en formera

mera un petit peloton en repos, & quatre fois plus gros qu'une des maſſules primitives.

De cette maniere, je conçois clairement, que ces pelotons peuvent groſſir de plus en plus, avant que d'être chaſſés de leur repos par des chocs, qui viennent d'un ſeul côté, ſoit pour retourner enſemble au Soleil, ſi le choc vient du côté d'un Tourbillon voiſin, ſoit pour pénétrer plus avant dans un des Tourbillons voiſins, lorſque le choc vient du côté du Tourbillon ſolaire.

XXXVII.

Ainſi voilà nôtre Tourbillon ſolaire, & chacun des autres, terminé par une eſpéce de voile d'un tiſſu fort rare & poreux, dont les parties ne ſont point liées enſemble ; enſorte que le plus grand nombre des maſſules qui compoſent les rayons y paſſent librement, pour ſortir & entrer d'un Tourbillon dans l'autre : mais à cauſe de leur multitude infinie, il y en aura toûjours aſſés que le hazard dirige à tomber centralement ſur autant de pelotons, qui ſont là dans l'inaction & en repos, par conſéquent dans un état d'indifférence à être emportés vers où ils ſont pouſſés, c'eſt-à-dire, les uns pour deſcendre au Soleil, les autres pour rentrer dans un autre Tourbillon. Il peut même arriver, qu'en chemin faiſant, quelques-uns de ces pelotons ſe joignent à d'autres qu'ils entrainent avec eux, & groſſiront par ce nouvel accroiſſement.

De cette maniere nous concevons qu'il doit deſcendre continuellement du ciel une pluye abondante & impétueuſe de pelotons repouſſés en bas par le choc des maſſules, qui ſortent des Tourbillons circonvoiſins.

XXXVIII.

Je vais faire à preſent mes reflexions ſur la nature & l'effet de ce déluge de pelotons, qui tombe de toute part de la circonférence du Tourbillon vers le centre, & que j'apellerai pour

pour cela *Torrent central;* parce qu'effectivement ſa matiere eſt aſſés copieuſe pour qu'elle ſe jette avec précipitation comme un Torrent perpetuel ſur le Soleil. C'eſt donc de cette matiere que le Soleil recouvre ſa nourriture, pour reparer la perte qu'il fait ſans ceſſe par l'émanation des files de maſſules, je veux dire par les rayons; à peu près comme les eaux qui ſortent de l'Océan, ſoit par l'évaporation, ou par la filtration par les pores de la terre, lorſque de maniere ou d'autre, moyennant la chaleur, elles ſe réſolvent en vapeurs, dont enſuite pluſieurs parcelles ſe joignant enſemble en goutes, retombent en forme de pluye, ou ſortent des lieux élevés de la terre pour compoſer de petits ruiſſeaux, qui eux-mêmes par leur concours forment de grands fleuves pour regagner les mers.

Ou bien ne pourroit-on pas faire cette autre comparaiſon, priſe de ce que nous voyons que la fumée, qui s'éleve de la matiere combuſtible, & dont une partie s'attache au tuyau de la cheminée, & fait la ſuye, laquelle reprenant peu à peu par la réünion des petites particules de la fumée une conſiſtance plus groſſiére, ſe détache enfin, & retombe au foyer. C'eſt donc ainſi qu'on répond à la premiere objection formée dans le §. XXX. Or il eſt aſſés intelligible, ſans que je le diſe, que les pelotons rentrés dans le Soleil, ſont d'abord contraints de ſuivre la violente agitation confuſe, qui ſe trouve dans toute la maſſe du Soleil, & ne ſeront pas long-temps ſans être réduits par la frequente colliſion dans leur premier état de petiteſſe, c'eſt-à-dire, dans la forme des maſſules propres à ſubir l'exploſion néceſſaire pour le dardement des rayons, tout comme la ſuye retombée dans le feu, ſe brûle, & ſe diſſout une ſeconde fois en fumée, & remonte.

En tout cela je ne vois rien qui puiſſe choquer l'imagination: mais il ſe préſente une difficulté dans la maniere de concevoir la deſcente du Torrent central juſqu'au Soleil, ſans que les files de pelotons s'empêchent mutuellement de deſcendre, avant que d'arriver à la ſurface du Soleil; car ſi les pelo-

tons encore en repos occupent toute la vaſte étenduë de la circonference du Tourbillon, & qu'ils viennent enſuite ſe précipiter ſur la ſurface du Soleil, où ils doivent occuper une étenduë quaſi infiniment plus petite, il faut ſans doute que la denſité des files, près du Soleil, devienne comme infinie par raport à celle que les pelotons ont entr'eux, pendant qu'ils ſont diſperſés à l'extrémité du Tourbillon: ainſi il ſemble que les files devroient enfin en deſcendant ſe toucher par les côtés avant que d'achever la deſcente totale: mais cela ſe faiſant, il eſt ſenſible que les files du Torrent ne pourroient plus deſcendre davantage, ſans que les pelotons ſe pénétraſſent; d'où il s'enſuit que le Torrent s'arrêteroit, & demeureroit ſuſpendu à une bonne diſtance du Soleil.

Pour lever cette difficulté, on n'a qu'à dire que quoique les files ſoient aſſez ſerrées autour même de la circonference du Tourbillon, rien n'empêche pourtant qu'on ne puiſſe ſupoſer que leurs interſtices peuvent être diminués tant que l'on veut, pourvû que l'on conçoive que la ſomme de tous les diametres des pelotons ſitués autour de la circonference du Tourbillon, n'excede pas la circonference du Soleil: de cette maniere nous comprendrons aiſement que le Torrent deſcendra juſqu'au Soleil, ſans que les files viennent à ſe toucher. Il eſt vrai que pour que cela ſoit, il faut que les pelotons ſoient ſupoſés d'une ſubtilité extrême, nonobſtant que le plus petit d'entr'eux ait une maſſe trois fois plus groſſe, qu'une maſſule du rayon ſolaire. La diviſibilité de la matiere à l'infini permet de donner aux particules une telle ſubtilité que l'on jugera convenable. Il n'y a donc point de contradiction de ſtatuer que nos pelotons occupant toute la ſurface du Tourbillon, & ſerrés entr'eux ſi près que l'on voudra, ils pourront néanmoins, étant tranſportés ſur le Soleil, trouver aſſés d'eſpace ſur ſa ſurface, pour y être ſitués au large, & ſans ſe toucher les uns les autres.

SECON-

SECONDE PARTIE.

XXXIX.

APrès avoir donné une idée, ce me ſemble, aſſez intelligible de la generation de nos pelotons, qui doivent former le Torrent central; je pourſuis ma théorie, pour en déduire les cauſes des phénomènes & des faits céleſtes; je commence par expliquer la cauſe de la peſanteur. A cette fin, je ferai mes remarques ſur les groſſeurs reſpectives, & les viteſſes que peuvent acquerir les pelotons, lorſqu'ils ſont mis en mouvement par l'impulſion des maſſules qui viennent des Tourbillons du dehors. De ce que je viens d'expliquer, il eſt d'abord manifeſte que les plus petits pelotons qui forment le Torrent central, ſont compoſés pour le moins de trois maſſules, ſavoir de deux qui par leur choc direct ſe ſont mis en repos, & de la troiſieme qui leur donne l'impulſion, & vont conjointément deſcendre vers le Soleil, ne faiſant plus qu'un ſeul petit corps que j'ai nommé *peloton*, dont la commune viteſſe ſera (par les regles de la communication du mouvement pour les corps ſans reſſort) le tiers de la viteſſe d'une maſſule avant le choc.

La ſeconde ſorte de pelotons, ſont ceux qui ſont compoſés de 5 maſſules, lorſqu'après que deux ont perdu leur mouvement par le choc direct; deux autres les heurtent en même tems, & en direction opoſée, par où elles perdent auſſi leur mouvement, & ne font qu'augmenter la maſſe du peloton, qui ſera par conſéquent compoſé de 4 maſſules, & encore ſans mouvement, juſqu'à-ce que la 5me. vienne du dehors les choquer, & deſcendre enſemble comme une maſſe commune avec la 5me. partie de la viteſſe d'une maſſule. La 3me. la 4me. la 5me. ſorte de pelotons, & ainſi de ſuite, ſeront compoſés de 7 maſſules, de 9, de 11, &c. & deſcendront avec $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$, &c. de la viteſſe d'une maſſule. Je ne prétends pas cependant que la formation de nos pelotons ſoit juſtement ſi réguliere, que nous venons de le

le dire ; il peut arriver qu'un des pelotons, déja mis en mouvement, en rencontre ſous lui un autre qui eſt encore en repos, ou qui a une viteſſe plus petite, auquel cas il s'en fera un peloton plus gros, qui acquerra une viteſſe ſelon la combinaiſon de la differente groſſeur & viteſſe de leur maſſe particuliere. Concevons en general un peloton de maſſe A avec la viteſſe m, qui choque ſous lui un peloton de maſſe B, qui a déja une viteſſe, mais plus petite, n; la maſſe du peloton compoſé, qui ſera $A+B$, prendra une viteſſe $=(mA+nB):(A+B)$, ſuivant les régles de la communication du mouvement pour les corps non-élaſtiques. Enfin mon but étoit de faire comprendre que le Torrent central doit être compoſé de pelotons de toutes ſortes de groſſeur & de viteſſe avec laquelle ils ſe portent vers le Soleil.

X L.

Nous pouvons prendre de tous ces pelotons de differente groſſeur & viteſſe, un d'une groſſeur & d'une viteſſe moyenne, quelle qu'elle ſoit ; par exemple, qu'il ſoit dix ou cent fois plus gros qu'une des maſſules, & qu'il ait la centieme ou la dixieme partie de la viteſſe de celle-ci : une exacte détermination de cette circonſtance n'eſt nullement néceſſaire pour mon deſſein ; c'eſt aſſez que je puiſſe concevoir l'exiſtence d'un Torrent central en forme d'un fluide, compoſé de ces pelotons, qui ſont pouſſés de haut en bas, depuis toute la ſurface du Tourbillon juſques dans le Soleil, & que ce fluide du Torrent, qui, comme nous l'avons montré, ne manque jamais de matiere, ſe précipite avec une grande rapidité.

Car quand même cette rapidité ſeroit mille fois plus petite que celle d'une ſeule maſſule, qui eſt celle de la lumiere ; cette rapidité du Torrent central ne laiſſeroit pas d'être encore très-conſiderable, puiſque ſelon ce que nous avons remarqué (§. XXXI) elle ſeroit aſſez grande pour parcourir dans le tems d'une minute la longueur d'un diametre entier de la terre. Le Torrent central avec une telle viteſſe ſera donc en état de produire un effet tout parti-

Digitized by Google

particulier ſur un corps qu'il rencontre dans ſon chemin, & cet effet eſt préciſément la gravitation des Planètes vers le Soleil: voici comme je conçois que la choſe ſe fait.

XLI.

Les pores & les interſtices entre les parties élementaires terreſtres qui compoſent les Planètes, ſont ſuffiſamment larges pour laiſſer paſſer ſans obſtacle les files des maſſules qui partent du Soleil; mais après qu'à leur retour une bonne quantité de ces mêmes maſſules ſe ſont accumulées en petits pelotons, qui fourniſſent la matiere au Torrent central, & deſquels le plus petit eſt pour le moins trois fois plus gros qu'une maſſule; il eſt déja aſſés évident que les pelotons n'enfileront plus ſi aiſément les mêmes pores des corps terreſtres: d'où il arrive, que le Torrent central fait un effort continuel ſur la Planète qu'il rencontre, pour la pouſſer en bas vers le centre commun du Tourbillon, de la même maniere qu'un courant d'eau, donnant contre un obſtacle, fait pour l'entrainer un effort continuel, égal à la force avec laquelle cet obſtacle réſiſte.

Il n'y a point d'autre difference entre ces deux actions, ſinon que l'eau frape ſeulement les ſurfaces extérieures des corps qui lui réſiſtent, au lieu que nôtre Torrent ayant des pelotons de toutes ſortes de groſſeur, les plus petits pénétreront juſqu'aux moindres pores, avant que de perdre leurs forces, & les imprimeront par conſéquent aux moindres parties des corps terreſtres, pendant que les plus gros pelotons conſument leurs forces en frapant la premiere ſuperficie de la Planète, après en avoir déja employé une partie à pénétrer, en vainquant la réſiſtance de l'atmoſphére qui envelope le corps de la Planète.

Les pelotons, qui conſervent un reſte de mouvement après leur paſſage à travers la Planète, pourſuivront leur route vers le Soleil, mais ceux qui conſument tout-à-fait leur force, en donnant, ou ſur l'atmoſphére ſeulement, ou ſur la ſuperficie ex-

Digitized by Google

térieure du corps de la Planète, reſteroient là ſans mouvement, ſi par la ſucceſſion continuelle de la nouvelle matiere du Torrent, ils n'étoient obligés de faire place, en eſquivant à côté, & de ſe laiſſer entrainer par le fluide lateral du Torrent, qui ne fait plus que friſer la Planète, ou ſon atmoſphére.

XLII.

Je ne crois pas qu'on puiſſe rien prétendre de plus pour la cauſe de la peſanteur des Planètes vers le Soleil; l'explication courte, mais claire, que nous en avons donnée, comprend tous les éclairciſſements qu'on pourroit demander ſur diverſes particularités & circonſtances qui accompagnent la nature de cette gravitation. Car on voit 1°. que non ſeulement le corps de la Planète, pris dans ſon total, doit être peſant, mais que chacune de ſes parties en ſon particulier le doit être auſſi à proportion de ſa maſſe, parce que la matiere du Torrent central pénétre & agit ſur la Planète ſelon toutes ſes dimenſions, ſur les parties intérieures auſſi-bien que ſur les extérieures. On s'aperçoit 2°. pourquoi les forces de la gravitation, que Mrs. les *Newtoniens* attribuent à une vertu attractrice, doivent être entr'elles en raiſon réciproque des quarrés des diſtances au Soleil, puiſqu'il eſt évident, que les filets du Torrent ſe rétreciſſent par les côtés, à meſure qu'ils s'aprochent du Soleil, & partant que leur denſité, dont dépend l'eſtimation des forces abſoluës, obſerve cette proportion, tout comme les rayons auſſi produiſent une lumiere dont les vivacités ſont comme leur denſité, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les quarrés des diſtances du point lumineux. Il eſt clair 3°. que les particules élementaires des corps groſſiers (j'entends les plus petites, qui ſont ſolides & ſans pores) ne reçoivent l'action de la peſanteur que par leur ſurface; puiſque ces particules n'ayant point de pores ne peuvent pas admettre dans leur intérieur la matiere du Torrent, qui doit les rendre peſantes.

Il me ſemble que cette ſeule conſidération fait voir claire-

ment

Digitized by Google

ment la nullité de la prétenduë attraction. Car ſi les corps avoient de leur nature cette qualité eſſentielle de s'attirer l'un l'autre, il eſt certain que les particules élementaires ſeroient peſantes en raiſon de leur ſolidité, & non pas de leur ſurface; & qu'ainſi une même particule élementaire, à un éloignement double du corps dont il eſt attiré, en recevroit une force qui ne ſeroit pas ſous-quadruple, mais ſous-octuple de celle qu'elle reçoit à une diſtance ſimple; puiſque la denſité, ou la multitude des rayons qui partent du corps attirant, & qui ſaiſiſſent la particule, devroit être eſtimée par la quantité de ſa maſſe & non point de ſa ſurface; d'où il s'enſuit que la force de cette attraction diminueroit en raiſon triplée comme les cubes, & point du tout comme les quarrès des diſtances: delà on peut démontrer aiſément, que les maſſes entieres des Planètes n'auroient point d'autre gravitation ſur le Soleil, que celle de ſes particules élementaires, dont la diminution ſe feroit en raiſon des cubes des diſtances.

Que deviendra donc le ſiſtème de M. Newton par raport à la Phyſique, ſi ſon fondement principal tombe en ruine? Je m'étonne que pas un de ſes partiſans outrés ne ſe ſoit aperçû de l'inconvénient qui réſulte de l'hypothéſe des attractions, que l'on veut attribuer, comme une qualité eſſentielle, non ſeulement aux corps groſſiers, mais auſſi à leurs particules élementaires deſtituées de pores; ce qui ne peut ſubſiſter, ainſi que nous l'avons démontré, avec la loi ſuivant laquelle la gravitation des Planètes doit varier par raport aux éloignements du Soleil, pour qu'elles décrivent des orbites elliptiques autour de cet aſtre placé dans un de leurs foyers.

XLIII.

Il n'y a nul doute que ce que nous avons dit juſqu'à préſent, ſur la cauſe & la nature de la peſanteur des Planètes vers le centre du Soleil, ne doive être apliqué auſſi aux peſanteurs particulieres, qui agiſſent ſur les corps envelopés dans les Tour-

billons ſecondaires, pour les pouſſer vers les centres de ces Tourbillons. Car naturellement chaque Planète principale, comme, par exemple, la Terre, qui tourne ſur ſon propre axe, ſera munie d'un Tourbillon particulier, & aura dans ſon centre une eſpéce de petit Soleil, je veux dire un amas de cette matiere parfaitement liquide & bouillante, laquelle, avec les autres circonſtances, doit produire en petit ce que la force du Soleil fait dans un degré beaucoup plus éminent.

Ainſi tous les corps, & même la Lune, qui ſont de la dépendance du Tourbillon terreſtre, ſeront pouſſés, par un Torrent central qui s'y forme, vers le centre de la Terre, avec des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés des diſtances. C'eſt donc auſſi dans l'action de ces forces, que conſiſte la peſanteur des corps graves terreſtres. Je n'en dis pas davantage, de peur d'ennuyer mon lecteur par une longue répétition de ce qui a été expliqué ſur la cauſe generale de la peſanteur.

XLIV.

Je ne ſaurois m'empêcher, à cette occaſion, de communiquer mes penſées ſur la maniere d'expliquer la peſanteur, que l'on voit dans le petit livre de M. VILLEMOT, intitulé *Nouveau Syſtème, ou Nouvelle explication du Mouvement des Planètes*; où l'Auteur expoſe ſon ſyſtème, établi auſſi ſur le bouillonnement d'un feu central; mais dont la nature, l'origine & les effets différent infiniment de l'idée ſous laquelle je le conçois; outre qu'il le donne dans une tout autre vûë, pour en tirer les phénomènes celeſtes, que je ne le fais dans mon ſyſtème. On n'a qu'à lire l'un & l'autre pour en voir la différence; le ſeul chapitre de la peſanteur fait déja connoitre que les principes de Statique & d'Hydroſtatique ne lui étoient pas aſſés familiers. Voici de quelle maniere il raiſonne, p. 182. Après avoir ſupoſé, que rien ne peut ſortir de la matiere bouillonnante au centre de la Terre, cette matiere, ſelon lui, ne fait que tendre ou s'efforcer à s'en-éloigner en ligne droite,

droite, ſans s'en éloigner effectivement, „ mais on conçoit, *dit-il*, qu'elle pouſſe, ou plûtôt qu'elle preſſe toute la ma- „ tiere voiſine, & qu'ainſi elle doit pouſſer vers le centre les „ corps groſſiers, par la même raiſon que l'eau tendant en bas „ fait monter le liege dont elle prend la place.

M. VILLEMOT conſidere cette matiere voiſine, répanduë juſqu'à l'extrémité du Tourbillon, comme un fluide renfermé de toutes parts, lequel venant à être preſſé par un bout, cette preſſion ſe communique d'abord à l'extremité opoſée, & de-là ne pouvant aller plus loin, elle rejaillit ſur le corps groſſier qui s'y trouve, & l'oblige, à ce qu'il croit, de s'aprocher vers le principe de la preſſion: mais ne devoit-il pas voir, que par la loi d'Hydroſtatique la preſſion ſe communiquant également ſur toutes les parties du fluide, le corps, qui en eſt environné, doit ſoutenir une compreſſion uniforme tout à l'entour, & ſera par conſéquent preſſé par devant, tout autant qu'il l'eſt par derriere, ce qui lui ſera garder un parfait équilibre. Si quelqu'autre que M. VILLEMOT eût allégué la compreſſion priſe du liege que l'eau fait monter, comme un exemple, pour expliquer la cauſe de la peſanteur, je dirois que ce ſeroit commettre le Sophiſme, que l'on apelle dans les écoles *Petition de principe*; puiſqu'il ſupoſeroit que l'eau eſt peſante, & que le liege eſt moins peſant, ſans expliquer la cauſe pourquoi l'un & l'autre eſt peſant. Car ſi on pouvoit ôter à l'eau & au liege ſubmergé leur peſanteur naturelle, & qu'au lieu de cela on preſſât de haut en bas la ſuperficie horizontale de l'eau, on auroit beau preſſer, on verroit que le liege ne bougeroit pas de ſa place.

X L V.

Pour en être convaincu, on n'a qu'à prendre un tuyau de verre *AB* fermé en *B*, & ouvert en *A*: qu'on le rempliſſe d'eau juſqu'en *P*; & qu'étant mis dans la ſituation horizontale, on y mette vers le milieu un petit morceau de liege *L*, TAB. I. *Fig.* 1.

 qui

Digitized by Google

qui puiſſe nager librement dans l'eau, ſans aucun frottement ſenſible contre le verre ; que l'on faſſe entrer par l'ouverture *A* le piſton *PC*, & qu'on preſſe fortement le cylindre d'eau *CB* de *C* vers *B*. C'eſt-là juſtement le cas de M. VILLEMOT : car la preſſion de la matiere bouillonnante eſt ici repréſentée par la preſſion du piſton *PC* ; la matiere voiſine preſſée, qui ſe termine par l'extrémité du Tourbillon, doit être comparée au cylindre d'eau *PB*, dont la preſſion ſe termine en *B* ; le corps groſſier, dont il veut expliquer la peſanteur, ſe repréſente par le morceau de liege *L* : donc ſi ſon explication avoit lieu, il faudroit que par l'effort du piſton *PC*, le liege *L* s'en aprochât, & vint à s'y joindre. Mais la ſaine Hydroſtatique m'aprend, ſans en faire l'expérience, qu'avec la plus grande force du piſton que le tuyau puiſſe ſoûtenir, on ne déplacera jamais le morceau de liege *L*, bien loin de le faire aprocher du piſton *PC*.

Ainſi l'explication donnée par M. VILLEMOT ſur la cauſe de la peſanteur, n'eſt qu'une pure illuſion, auſſi évidente que celle qui ſe trouve à la page 186 de ſon livre, où, pour prouver que la Terre eſt plus élevée vers l'équateur que vers les poles, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt un Sphéroïde aplati, il recourt à l'obſervation de M. CASSINI, qui a obſervé que les degrés de la Terre diminuent en allant de l'équinoxiale vers les poles : car cette obſervation ſupoſée exacte, comme il n'en faut pas douter, prouve juſtement le contraire, ſavoir que la figure de la Terre doit être un Sphéroïde allongé : la raiſon en eſt, parce que les meridiens d'un tel Sphéroïde ont leur plus grande courbure aux poles, ce qui fait que les degrés de latitude diminuent à meſure qu'ils s'éloignent de l'équinoxiale ; au lieu que dans un Sphéroïde aplati, par une raiſon contraire, leur plus grande courbure, ſe trouvant où les meridiens croiſent l'équateur, y racourcit le plus ſenſiblement la longueur des degrés, qui enſuite s'allongent en allant vers les poles. La ſavante Diſſertation ſur ces deux ſortes de Sphéroïdes, publiée par M. DE MAIRAN dans les Mémoires de 1720, mérite d'être lûë,

lûë, parce qu'elle contient des raiſonnements ſolides touchant la figure de la Terre.

XLVI.

Quoi qu'il en ſoit, il faut avouer qu'une ſimple preſſion, telle que M. VILLEMOT l'a imaginée, n'eſt point du tout propre à en tirer la cauſe de la peſanteur; & comme nous avons déja vû (§. IX) que les Tourbillons conçûs à la maniere de M. HUGUENS, deſquels il fait mouvoir la matiere ſur des ſurfaces ſphériques en tout ſens, ne pourroient pas ſubſiſter, parce que leurs particules s'entre-choquant, & n'étant point élaſtiques, s'arrêteroient mutuellement; d'où il arriveroit dans peu, que toute la matiere d'un Tourbillon de cette nature ſe changeroit en une maſſe immobile.

D'ailleurs le Tourbillon fait ſelon l'idée de M. DESCARTES, que nous adoptons auſſi, mais pour un autre uſage (comme nous le verrons) que pour cauſer la peſanteur par la force centrifuge de ſa matiere, prévalente à celle des corps terreſtres; ce Tourbillon, dis-je, n'étant point du tout ſuffiſant pour expliquer les proprietés de la peſanteur, puiſque les corps groſſiers devroient être chaſſés, non point au centre, mais perpendiculairement à l'axe du Tourbillon; outre pluſieurs autres inconvénients qui réſultent de cette hypothéſe, dont nous avons indiqué quelques-uns (§. VI & VII); l'unique remède, qui reſte, pour avoir une idée generale de la cauſe de la peſanteur, & de toutes ſes proprietés, à moins qu'on ne veuille recourir aux attractions de M. NEWTON, c'eſt d'admettre nôtre Torrent central, par lequel on explique ſi naturellement & ſi intelligiblement tout ce qu'il a voulu expliquer par ſes attractions, & bien davantage; ainſi qu'on le verra bien-tôt, par la raiſon que je rendrai de la rotation des Planètes principales autour de leur axe, où il paroitra très-clairement que cette rotation (difficile à expliquer par le ſyſtème de NEWTON) n'eſt qu'une ſuite de l'action du Torrent ſur la Planète.

XLVII.

XLVII.

Je vais donc contempler de plus près les Tourbillons de DESCARTES, afin de tirer de leur nature ce qui ſert principalement à perfectionner ma théorie. J'ai déja dit au commencement de ce diſcours, qu'un Tourbillon celeſte eſt 1°. un amas ou une quantité prodigieuſe de matiere parfaitement liquide, qui ne fait point de réſiſtance aux corps qui s'y meuvent; 2°. que cette matiere, quoique de la même nature que celle du Soleil, n'a pas ce bouillonnement exceſſif dont celle-ci eſt agitée; mais 3°. qu'elle tourne d'un mouvement tranquille autour du Soleil, avec une viteſſe que je déterminerai; 4°. que ce Tourbillon de matiere parfaitement liquide, charrie avec lui une multitude infinie de particules du ſecond élement, que je veux bien nommer avec M. DESCARTES *globules céleſtes*, ſans s'entre-toucher pourtant, comme il les a conçûs; mais ſeparés & diſperſés, laiſſant entr'eux des intervalles, ſi vous voulez, cent ou mille fois plus grand que le diamétre d'un globule; je fais cette ſupoſition dans cette ſeule vûë, que l'on puiſſe concevoir, comment les maſſules des rayons & les pelotons du Torrent paſſent à travers des diſtances immenſes, fort librement, ſans rencontrer de fréquents obſtacles, en heurtant contre des globules celeſtes, & que s'ils en rencontrent par-ci par-là, ils les écartent facilement par la rapidité de leur mouvement, & rendent le paſſage libre à ceux qui les ſuivent de près.

XLVIII.

Pour ce qui eſt de la viteſſe avec laquelle le Tourbillon doit tourner autour du Soleil, on a démontré ailleurs que la viteſſe (quelle qu'elle ſoit) des parties du Tourbillon, ſous ſon équateur, doit être à peu près réciproquement proportionnelle à la racine quarrée de leurs éloignements du centre du Soleil; d'où dépend la regle de KEPLER, qui veut que leurs temps périodi-

riodiques ſoient en raiſon ſeſquipliquée de ces mêmes éloignements. Mais pour avoir une idée diſtincte de la viteſſe actuelle à chaque diſtance, je fais cette réflexion: le mouvement de circulation de la maſſe du Soleil, & celui de ſon Tourbillon, ſe faiſant en même ſens, ſavoir d'Occident en Orient, il n'y a pas lieu de douter que ces deux mouvements ne viennent d'un même principe, en ſorte que l'un doit être la regle de l'autre. Or la viteſſe d'un point de l'équateur du Soleil eſt telle, qu'il acheve ſa circulation autour du centre en 25 $\frac{1}{2}$ jours, ce qu'on connoit par le mouvement des taches ſolaires. Donc concevant le Tourbillon diviſé en une infinité de couches concentriques d'une épaiſſeur infiniment petite, il faut que la premiere couche contiguë à la ſurface du Soleil, ait la même viteſſe, c'eſt-à-dire qu'elle faſſe ſa rotation conjointément avec le Soleil; car quelle raiſon auroit-on de lui donner une viteſſe differente & beaucoup plus grande, ſans forger un nouveau principe de mouvement de circulation, indépendant de celui du Soleil? & que pourroit-on imaginer de capable d'entretenir cette grande diverſité de mouvements entre deux fluides, qui ſe touchent immédiatement, ſans qu'ils ſe confondent enfin en un mouvement commun?

Supoſons donc comme une choſe raiſonnable, que la premiere & plus baſſe couche faſſe ſa circulation avec le Soleil en 25 $\frac{1}{2}$ jours; pour en tirer la viteſſe réelle d'une autre couche, par exemple, de celle qui a pour demi-diametre la diſtance moyenne de la Terre au centre du Soleil, que l'on compte ordinairement de 22000 demi-diametres de la Terre; le demi-diametre du Soleil contenant 100 demi-diametres terreſtres, il faut faire en vertu de la regle de KEPLER (car on a demontré dans une autre occaſion, que le Tourbillon a la proprieté, que les viteſſes réelles de differentes couches ſont à peu près reciproquement proportionnelles à la racine quarrée de leurs diſtances au centre, & non pas aux ſimples diſtances, comme quelques-uns l'ont avancé) il faut faire, dis-je, cette analogie; comme $\sqrt{22000}$ eſt à $\sqrt{100}$, ainſi la viteſſe d'un point de l'équa-

Digitized by Google

teur ſolaire, que je nomme *V*, eſt à la viteſſe de l'équateur de la couche, pour la diſtance moyenne de la Terre: mais on a à fort peu près $\sqrt{22000}$. $\sqrt{100} = 150$. $10 = 15$. 1; Donc la viteſſe de l'équateur de cette couche $= {}_{15}V$, c'eſt-à-dire 15 fois plus petite que celle de l'équateur du Soleil, de ſorte qu'il lui faut 15 fois 25½, ou 382½ jours, pour parcourir un arc égal en longueur à la periphérie du Soleil; cet arc eſt donc contenu dans toute ſa circonference autant de fois que le demi-diametre du Soleil eſt contenu dans le demi-diametre de la couche, c'eſt-à-dire 220 fois; ainſi il faut prendre 382½ jours 220 fois, & nous aurons 84150 jours, ce qui fait 230 années & 143 jours, pour le temps d'une revolution entiere de la matiere du Tourbillon à la diſtance moyenne de la Terre au Soleil.

Ce calcul apliqué à toutes les Planètes, on trouvera les temps périodiques de la matiere du Tourbillon pour la diſtance moyenne de chacune; voici le réſultat de mon calcul, en négligeant les jours à ajouter:

Pour	Saturne..............	6744. années.
	Jupiter..............	2715.
	Mars..............	428.
	Terre..............	230.
	Venus..............	140.
	Mercure..............	54.

La concluſion que j'en tire, eſt que chaque Planète a ſon mouvement moyen ſur ſon orbite plus de 230 fois plus vite que n'eſt la viteſſe avec laquelle circule la matiere du Tourbillon dans la région moyenne où ſe trouve la Planète: voici maintenant les remarques que je fais là-deſſus.

XLIX.

Le principe du mouvement des Planètes autour du Soleil ne vient pas de celui de la matiere du Tourbillon qui l'emporte, comme l'eau d'une riviere emporte un tronc d'arbre, ſelon le ſentiment

Digitized by Google

timent de DESCARTES ; car la Planète ſe laiſſant entrainer par le courant du Tourbillon, ne pourroit acquerir tout au plus que la viteſſe du fluide où elle nage, comme je l'ai déja dit.

Il faut donc que la grande viteſſe, avec laquelle les Planètes circulent autour du Soleil, ait un autre principe; c'eſt pourquoi je ne fais point de difficulté de ſtatuer ici, avec M. NEWTON, que cette viteſſe eſt primitive, qui leur a été imprimée dès le commencement de leur formation. Cette viteſſe dure encore aujourd'hui, & durera ſans doute juſqu'à la fin du monde, ſans que la réſiſtance de la matiere du Tourbillon puiſſe lui cauſer le moindre retardement ſenſible : car la plus grande partie de cette matiere, étant parfaitement liquide, ne réſiſte pas, & les globules céleſtes, qui y nagent fort au large, ſont encore d'une petiteſſe & d'une rareté, plus que ſuffiſante, pour que leur choc contre les corps d'une groſſeur énorme, comme ſont ceux des Planètes, ne puiſſe rien gagner ſur eux, ni retarder leur mouvement d'une maniere ſenſible, durant le cours de pluſieurs centaines de ſiécles.

On peut donc conſiderer ſûrement les Planètes, comme ſi elles ſe mouvoient dans un vuide parfait, tel que M. NEWTON l'a ſupoſé, quoique véritablement tout ſoit rempli de matiere.

L.

Par-là nous ne tombons pas dans l'embarras, où ſe trouvoit M. NEWTON, à l'occaſion de la régularité du mouvement de toutes les Planètes, qui ſe fait ſuivant la commune direction d'Occident en Orient. M. DE MAIRAN dit très-judicieuſement dans les Mémoires de 1729, qu'on eſt fondé à demander raiſon de ce mouvement commun des Planètes d'Occident en Orient dans le ſyſtème de NEWTON ; cette uniformité n'étant nullement requiſe, là où il y a un grand vuide, qui permettoit aux corps celeſtes de ſe mouvoir en tout ſens, ſavoir à chacun ſelon ſa propre direction, comme il arrive actuellement aux Cometes qui ſuivent leurs routes particulieres. On en a même obſervé, qui faiſoient leurs cours contre l'ordre des ſignes.

Digitized by Google

Cette régularité, dis-je, du mouvement des Planètes ſous le Zodiaque a tellement réduit à l'étroit M. NEWTON, qu'il fut obligé d'avouer ingénûment, que, dans ſon ſyſtème, on ne peut point donner de raiſon phyſique de ce phénomène, qu'il regarde preſque comme un miracle; voici comme il s'exprime ſur cet article (pag. 527. Princ. phil. edit. 3.) *Feruntur*, dit-il, *cometæ motibus valde excentricis in omnes cælorum partes, quod fieri non poteſt niſi vortices tollantur; perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitus acquirere per leges haſce minime potuerunt planetæ & cometæ.* Hi motus regulares (*planetarum*) originem non habent ex cauſis mechanicis.

Si ces cauſes ne ſont pas méchaniques, elles ne ſont donc pas naturelles ou phyſiques; il prétend donc qu'elles ſoient ſurnaturelles ou miraculeuſes: mais ſied-il bien à un grand Philoſophe de crier au miracle, quand il s'agit de donner l'explication d'un phénomène que la nature nous préſente.

L I.

Par la théorie que je viens d'établir, on trouve un expédient aſſés facile, pour montrer la cauſe de ladite régularité du mouvement des Planètes, & de l'irregularité de celui des Cometes. Car quant au premier point, ſupoſons que les Planètes commencent d'exiſter, chacune avec ſa direction & viteſſe particuliere, ſelon que le hazard l'a voulu; qu'en arrivera-t-il? Je vois d'abord, que chacune pouſſée par le Torrent central vers le Soleil, pendant que ſa viteſſe primitivement acquiſe la tranſporte au travers d'une colomne du Torrent à l'autre, elle ſera obligée de décrire une ligne courbe, plus ou moins éloignée du Soleil, ſelon que la direction & la viteſſe primitivement imprimée le demande, afin que la force centrifuge, qui dépend de la courbure & de la viteſſe, puiſſe contre-balancer l'effort central du Torrent, derivé perpendiculairement ſur la courbe; lors donc que la Planète eſt parvenue dans cet état d'équilibre, elle continuera

tinuera en vertu du principe de Statique, de décrire toûjours la même courbe, ſavoir ſon orbite autour du Soleil.

Mais les forces centripétes, qui ſont, dans ma théorie, les preſſions du Torrent central, étant en raiſon réciproque du quarré des diſtances au Soleil, il eſt viſible, par la démonſtration indirecte de M. NEWTON, & par celle qu'on en a donnée enſuite *apriori*, que cette orbite doit être une Ellipſe, dont un des foyers eſt dans le centre du Soleil. Nous avons donc autant de differentes orbites elliptiques, dont les plans paſſent néceſſairement par le centre du Soleil, qu'il y a de Planètes principales.

Cependant, juſqu'ici, nous ne voyons pas encore, pourquoi tous ces plans ſont reſſerrés ou renfermés entre deux plans paralleles, qui terminent dans le firmament une zone peu large, qu'on apelle le Zodiaque, partagée en deux ſelon la largeur par un troiſiéme plan, qui eſt celui de l'Ecliptique ou de l'orbite de la Terre; & pourquoi le mouvement de toutes les Planètes, qui décrivent leurs orbes elliptiques ſur ces plans, eſt dirigé régulierement d'Occident en Orient, & pas un en ſens contraire; je parle du mouvement réel, & non point de l'apparent, qui eſt quelquefois retrograde.

L I I.

Voici ma penſée là-deſſus. S'il n'y avoit point de Tourbillon, je veux dire, ſi toute la matiere, qui remplit cette vaſte étenduë autour du Soleil bien loin au de-là de Saturne, n'avoit point de mouvement de circulation, je tiens pour inconteſtable, que les directions des Planètes ſeroient encore comme au commencement purement fortuites, & ſans aucune régularité, en ſorte que les plans de leurs orbes couperoient le firmament en de grands cercles, qui ſeroient ſitués ſans ordre par raport aux plages du Monde, de même que cela s'obſerve encore aujourd'hui dans le mouvement des Cometes, dont preſque chacune a ſa direction particuliere, par la raiſon que je dirai ci-après.

Digitized by Google

Mais puiſqu'il y a un Tourbillon, quoique fort tardif & fort foible, il aura eu, quelque foible qu'il ſoit, aſſés de force pour changer peu à peu la direction de la Planète, ſans alterer ſenſiblement ſa viteſſe, juſqu'à ce que cette direction ſoit devenuë à peu près conforme à la direction du Tourbillon, qui va d'Occident en Orient : je dis *à peu près*, pour marquer qu'il y a une cauſe, que j'expliquerai, qui empêche l'entiere conformité de direction; c'eſt juſtement en quoi conſiſte le nœud de la queſtion propoſée, pour le dénouement duquel il m'a fallu faire tout ce diſcours, afin de faire voir la connexion des phénomènes, qui découlent ſi naturellement des principes de mon ſyſtème.

LIII.

On voit donc déja, par quelle raiſon les Planètes ont pû changer leurs directions, primitivement irrégulieres, en direction réguliere & commune d'Occident en Orient, qui eſt celle du Soleil ſur ſon axe, & auſſi celle de ſon Tourbillon: on m'objectera peut-être, que j'ai ôté à la matiere du Tourbillon toute force ſenſible de réſiſter au mouvement des Planètes, pendant que je lui en accorde aſſés pour en changer les directions; mais on levera cette difficulté, ſi on daigne faire cette réflexion; qu'il faut incomparablement plus de force, pour augmenter ou diminuer la viteſſe d'un corps qui eſt déja en mouvement, que pour en changer ſeulement la direction. Nous voyons, par exemple, qu'une fuſée, qui vole tout droit dans les airs avec beaucoup de viteſſe, change conſiderablement de direction, par le moindre vent qui ſouffle, ſans une perte ſenſible de ſa viteſſe : auſſi voyons-nous qu'une bale de plomb, chaſſée avec une extrême rapidité par la force de la poudre, ne laiſſe pas, malgré toute ſa denſité, d'être détournée de ſa direction, par un petit vent, à peine ſenſible, qui vient de côté.

Ce qui rend cette explication plus probable, c'eſt juſtement l'irrégularité des directions des Cometes, qu'elles ont pû garder depuis leur origine juſqu'à nos temps; tant s'en faut que cette irré-

irrégularité ſerve d'argument pour détruire le ſyſtème des Tourbillons, comme M. NEWTON l'a voulu inſinuer à l'endroit cité; voici de quelle maniere j'en prouve le contraire. Comme les orbites des Cometes ſont des Ellipſes extrémement longues en comparaiſon de leur largeur, ayant le Soleil dans leur foyer, quaſi infiniment plus près du perihélie que de l'aphélie, ſelon le ſentiment même de M. NEWTON; il faut que le temps que la Comete employe à parcourir la partie ſuperieure de ſon orbite allongée, qui s'étend à une énorme diſtance au-deſſus de Saturne, ſoit de beaucoup plus grand que le reſte du temps périodique, qu'elle employe à paſſer par la région des Planètes, & qui ne peut qu'être fort court, tant à cauſe de la grande viteſſe que la Comete acquiert en aprochant du perihélie, qu'à cauſe de la petiteſſe du chemin à parcourir dans la baſſe région, par raport à l'extrême longueur de la partie ſuperieure, où il faut paſſer par l'aphélie avec un mouvement très-tardif. Puis donc que dans ces grands éloignements du Soleil, les circulations du Tourbillon doivent être ſi lentes, que ſa matiere peut bien être conſiderée comme immobile, elle ne fera par conſéquent point d'effet ſenſible pour changer la direction de la Comete, pendant tout le temps qu'elle ſéjourne dans ces endroits ſi élevés: mais le ſéjour qu'elle fait dans nôtre voiſinage eſt trop court, pour ſe laiſſer détourner beaucoup de ſa route par la circulation du Tourbillon.

LIV.

Cela étant, il n'y a pas lieu de s'étonner, qu'on n'obſerve pas dans le cours des Cometes cette régularité de direction, qui ſe voit dans celui des Planètes; c'eſt plûtôt une conſéquence naturelle de nôtre théorie, que chaque Comete doit ſuivre ſa route particuliere, que le cas fortuit lui a aſſignée dans le premier commencement, ſans aucune alteration perceptible. Si le Monde eût déja duré quelques milles ſiécles, ou qu'il durât encore autant, pour permettre aux Cometes de parachever pluſieurs centaines de révolutions, je ne doute pas que leur direction ne s'accommodât

Digitized by Google

modât enfin auſſi, peu à peu, à ſuivre le zodiaque d'Occident en Orient.

La fameuſe Comete de 1680, dont M. NEWTON fait la deſcription avec beaucoup d'exactitude, ſe trouva dans ſon perihélie le 8 Decembre, ſelon ſon calcul, laiſſant un ſi petit intervalle entr'elle & le Soleil, qu'à peine la ſixieme partie du diamétre du Soleil eût pû être miſe entre deux: cependant le 5 Janvier ſuivant, c'eſt-à-dire, en moins de 30 jours elle étoit déja hors de la région du grand orbe, & après le 5 Mars elle diſparut, en allant s'enfoncer dans les plus hautes régions du Tourbillon, où elle paſſera 575 années (ſuivant la ſupputation de M. HALLEY), avant que de redeſcendre dans nos quartiers, où pareillement elle ne reſtera viſible que 5 ou 6 mois: elle ſera donc pour le moins 574 années, ſans ſouffrir la moindre alteration ſenſible dans ſa direction de la part du Tourbillon, ni dans l'inclinaiſon de ſon orbite ſur le plan de l'écliptique, laquelle inclinaiſon eſt, ſelon le même M. HALLEY, de 60 degr. 56 min. & les 6 mois, ou, ſi on veut, le double, qu'elle eſt à paſſer par les régions planètaires, ne ſont pas à beaucoup près ſuffiſants, pour que la force du Tourbillon circulant puiſſe la troubler dans ſa direction, à moins que ce ne ſoit l'atmoſphére du Soleil, par laquelle cette Comete paſſe en allant vers ſon perihélie (comme le croit M. NEWTON), qui y puiſſe aporter quelque petit changement; mais ce n'eſt pas de quoi il s'agit ici.

Enfin les Planètes, qui ne ſortent jamais des régions où elles ſont ſans ceſſe expoſées à l'action du Tourbillon, qui tend à rendre par petits degrés leur direction uniforme, quand elle ne l'eſt pas déja, que ſait-on ſi, d'abord après leur création, il ne falloit pas des ſiécles entiers pour leur procurer cette uniformité permanente, à laquelle nous les voyons aujourdhui reduites? N'eſt-il donc pas probable, que l'unique raiſon, pourquoi les directions des Cometes ſont ſi irrégulieres, eſt, parce que ſe trouvant la plus grande partie du temps de leur révolution hors de cette action du Tourbillon, il s'en faut beaucoup qu'il n'y ait eu

aſſés

Digitized by Google

aſſés de temps pour conformer leurs directions à la regularité de celles des Planètes? & cela d'autant plus, que les Cometes, qui deſcendent plus ſouvent vers nous, c'eſt-à-dire, qui achevent leur révolution en moins de temps, ne paroiſſent pas entierement exemptes de l'effet que la circulation du Tourbillon peut faire ſur elles, en ce que les plans de leurs orbites aprochent plus de celui de l'équateur du Tourbillon, que ne ſont ceux des Cometes, dont les revolutions ſont d'une durée exceſſive. Il y a effectivement une Comete, que M. HALLEY croit être la même qui parut dans les années 1531, 1607, 1682, & qui, ſelon lui, avoit auſſi paru l'an 1456, & reparoitra l'an 1758, laquelle par conſéquent n'employe que $75\frac{1}{2}$ années pour parcourir ſa periode; cette Comete, dis-je, a ſon orbite inclinée ſeulement de 17. degr. 56. min. ſur le plan de l'écliptique, ſuivant la remarque de M. HALLEY; au lieu que l'inclinaiſon de l'orbite de la Comete de 1680 ſur l'écliptique, eſt, comme nous avons vû, de plus de 60 degrés. Il eſt vrai que la difference de ces inclinaiſons peut provenir du hazard des directions primitives, mais rien n'empêche que la cauſe alleguée n'y puiſſe avoir auſſi ſa part. Le meilleur moyen de s'en aſſûrer ſeroit, que les Aſtronomes, qui viendront après nous, obſervaſſent, à chaque retour, la Comete qui doit reparoitre en 1758, ſi tant eſt qu'elle revienne tous les $75\frac{1}{2}$ ans, pour voir ſi l'angle du plan de ſon orbite avec celui de l'écliptique, ou plûtôt avec le plan de l'équateur ſolaire, ne diminuëra pas peu à peu, après pluſieurs de ſes révolutions. Si cela arrivoit, ma conjecture deviendroit une vérité certaine.

TROISIEME PARTIE.

L V.

AVANT que d'entrer dans le point eſſentiel du ſujet de la Queſtion, il reſte encore à examiner un des plus importants phénomènes: c'eſt le mouvement diurne des Planètes principales, ou

Digitized by Google

ou la rotation ſur leur axe, dont j'entreprends d'expliquer la cauſe phyſique par les principes établis de ma théorie ; je le fais d'autant plus volontiers, que je n'ai point lû d'Auteur qui m'ait donné là-deſſus une entiere ſatisfaction. M. VILLEMOT, dans ſon Traité (chap. 1. part. 2.) croit, de ce que la Terre eſt emportée par le Tourbillon, & ſe meut moins vite par le bas de ſon globe que la matiere du Tourbillon, mais plus vite par le haut, que le fluide reflue (comme il dit) d'un hémiſphère à l'autre, d'où il prétend prouver que la Terre doit tourner ſur ſon axe d'Occident en Orient, comme fait le Tourbillon lui-même.

M. DE LA HIRE lui a fort bien objecté, que ſelon ce principe, la Terre devoit tourner dans un ſens contraire ; l'Auteur lui a voulu répondre par un éclairciſſement, que l'on voit à la fin de ſon Traité ; mais il n'y a pas aſſés de ſolidité dans ſa réponſe, & la difficulté ſubſiſte toûjours.

J'ai lû dans les Mémoires de l'Académie de 1729, une piece excellente, de la façon de M. DE MAIRAN, où il rejette auſſi l'explication de M. VILLEMOT, & lui ſubſtitue la ſienne, qui eſt à la vérité très-ingénieuſe. Il déduit la cauſe de la rotation des Planètes d'Occident en Orient, de ce que l'hémiſphère inférieur de la Planète doit être plus peſant que le ſupérieur, par cela ſeul, que celui-ci eſt plus éloigné du Soleil que celui-là ; d'où il conclud, que l'impulſion du fluide contre l'hémiſphère ſupérieur, comme le moins peſant, devoit avoir plus d'effet pour l'entrainer, que celle ſur l'hémiſphére inférieur, qui ayant plus de poids, a auſſi plus d'inertie pour réſiſter. Or les deux hémiſphéres inégalement peſants, ne l'étant pas conſtamment par leur nature, mais par leur poſition ſeule ; il eſt viſible que l'inférieur, qui eſt le plus peſant, quand il monte perd ſon avantage, & devient le plus leger, & au contraire, le ſupérieur en deſcendant prend cet avantage de devenir le plus peſant du plus leger qu'il étoit. De cette maniere le fluide du Tourbillon ayant une fois ébranlé le ſupérieur avec plus d'efficace que l'inférieur, cette action ſe renouvellant toûjours, il falloit que le ſupérieur ſe précipitant en avant, c'eſt-à-dire, d'Occident en

Orient,

Orient, fit enfin tourner par degrés la Planète ſur ſon axe, juſqu'à-ce que la rotation eût pris une viteſſe conſtante, qui dure encore aujourd'hui.

Mais quelque déference que j'aye pour les ſentiments de l'illuſtre Auteur de cette explication, je dois dire, que j'ai de fortes raiſons, que le temps ne me permet pas d'expoſer tout au long, de douter que la rotation des Planètes puiſſe être l'effet de l'inégalité perpétuelle de peſanteur des deux hémiſphères; car, ſans rien dire des autres difficultés qui ſe preſentent contre cette conjecture ſi ſubtilement imaginée, il me ſemble que l'inégalité de peſanteur des hémiſphères eſt trop inſenſible pour produire un effet ſi conſiderable, tel que ſeroit la grande viteſſe de rotation imprimée à la prodigieuſe maſſe de Jupiter, pour lui faire faire une révolution entiere ſur ſon axe en moins de dix heures. Si on veut prendre la peine de faire le calcul, on trouvera que cette viteſſe du mouvement diurne d'un point pris ſur l'équateur de Jupiter, eſt preſque égale à la viteſſe du mouvement annuel de cette Planète autour du Soleil; par conſéquent auſſi preſque égale à la viteſſe même du fluide du Tourbillon, qui l'emporte, ſuivant le ſens du ſyſtème de M. DESCARTES; il faudroit donc que l'impulſion faite par le fluide ſur l'hémiſphère inférieur, ſans doute contraire à la rotation, ne l'eût ou point retardé, ou fort peu, de ſorte que toute la force du fluide eût été uniquement employée à la rotation, ſans rien contribuer, ni à pouſſer l'hémiſphère inferieur, ni à tranſporter tout le corps planètaire ſur ſon orbite; cependant il s'y meut librement d'un mouvement progreſſif, & tourne en même temps ſur ſon axe; comment accorder tout cela?

LVI.

Voyons s'il n'y auroit pas moyen de s'en éclaircir par quelque expérience, qui nous mit devant les yeux l'effet que pourroit produire l'action d'un fluide à faire tourner un corps ſphérique qui y nage; & dont la partie inférieure fût, par ſa poſition ſeule, conſtamment plus peſante que la ſuperieure.

Digitized by Google

Pour cette fin on prendra, une boule creuſe d'une matiere moins peſante que l'eau, par exemple, de bois: on y verſera par une petite ouverture une liqueur plus peſante, par exemple, du vif-argent, autant qu'il en faut pour donner à la boule, avec le vif-argent au dedans, un poids preſque égal à celui d'un volume d'eau, que la boule entierement enfoncée y occuperoit, afin que la boule ainſi chargée de vif-argent, miſe dans l'eau, s'y plonge juſqu'au niveau, ſans pourtant deſcendre au fond. Cela fait, & après avoir bouché le trou par lequel on a fait entrer le vif-argent, on ſe choiſira une riviere dont le courant ſoit uniforme, & la ſurface bien unie comme la glace d'un miroir; on y plongera doucement la boule juſqu'à ſon ſommet: voilà donc la boule dans un état ſemblable à celui que M. de MAIRAN attribuë aux Planètes, quand elles ont commencé d'être emportées par le fluide du Tourbillon.

Car l'hémiſphère inférieur de nôtre boule, chargé de vif-argent, eſt auſſi conſtamment, & par la poſition ſeule, plus peſant que l'hémiſphère ſupérieur; en ſorte qu'elle peut tourner ſur ſon axe, & avoir néanmoins l'hémiſphère d'enbas toûjours plus peſant que celui d'enhaut, tout comme le ſavant Auteur le conçoit dans les Planètes; avec cette ſeule difference, qu'au lieu que dans les Planètes l'inégalité de peſanteur des hémiſphères eſt quaſi infiniment petite, ici, dans nôtre boule, on peut faire cette inégalité auſſi ſenſible que l'on voudra & ce qui plus eſt, la viteſſe de l'eau, qui donne contre l'hémiſphère ſupérieur de la boule, eſt pour le moins auſſi grande, ſi elle n'eſt pas plus grande, que celle avec laquelle eſt frapé l'hémiſphère inférieur; au lieu que, dans le Tourbillon, la premiere eſt plus petite que l'autre; d'où il devroit réſulter par cette double cauſe une rotation bien prompte dans la boule: cependant je ſerai bien ſurpris, quand j'aprendrai (car je n'ai pas fait cette expérience) que la boule venant à être prolongée dans le courant de la riviére, & abandonnée à elle-méme, aura fait autre choſe que ſuivre ſimplement le mouvement progreſſif de l'eau qui l'entraine, ſans ſubir la moindre rotation.

LVII.

Croyant avoir de bonnes raiſons de prévoir quel ſera le ſuccès de cette expérience, je puis m'être trompé, ce qui eſt très-facile en fait de Phyſique, auquel cas je déclare que j'adopterai volontiers l'explication ingénieuſe de M. DE MAIRAN. En attendant que je ſois convaincu d'un ſuccès contraire, il me ſera permis de dire à mon Lecteur, que j'ai cherché ailleurs la cauſe du mouvement diurne des Planètes, & que je crois l'avoir trouvée dans nôtre Torrent central; voici comment. Je conſidere d'abord la Planète, comme n'ayant point encore de mouvement progreſſif ſur ſon orbe; dans cet état, je vois que le Torrent la pouſſe de toute ſa force en ligne droite vers le Soleil, avec une accéleration, que doit produire la preſſion du Torrent, qui eſt réciproquement proportionnelle aux quarrés des diſtances au Soleil: Je vois auſſi que durant la deſcente, la Planète ne tournera nullement ſur ſon centre, non plus qu'une pierre ſphérique qui tombe verticalement ſans pirouetter; parce que la preſſion du Torrent ſe répandant également ſur toutes les parties de la Planète, les retiendra en équilibre, & donnera le parallèliſme à leur mouvement.

Mais s'il ſurvient à la Planète une viteſſe laterale, primitivement imprimée, qui lui fait décrire ſon orbe elliptique, de la maniere que nous l'avons expliqué ci-deſſus; alors l'équilibre & le parallèliſme du mouvement des parties ne peut plus ſe ſoûtenir: la raiſon en eſt manifeſte; car il eſt très-clair que les parties antérieures de la Planète, qui ſe trouvent du côté où elle tend, vont en quelque façon au devant & à la rencontre des filets du Torrent que la Planète eſt prête à traverſer, au lieu que les parties de l'autre côté fuyent en quelque maniere ceux des filets qu'elles vont quitter; ce qui fait que la Planète eſt frapée ſur le devant avec plus de force que ſur le dos. Il faut donc que le côté antérieur cede au Torrent, c'eſt-à-dire, qu'il deſcende, & que le côté poſtérieur monte contre l'action du Torrent; & cela continuant toûjours, la Planète à meſure qu'elle avance ſur ſon

Digitized by Google

orbe, eſt obligée de pirouëtter avec une viteſſe proportionnée à cet excès de force. On voit donc d'abord, ſans l'expliquer davantage, que ces deux mouvements, le diurne & l'annuel, doivent ſe faire en même ſens, ſavoir d'Occident en Orient.

LVIII.

Ceci bien entendu, on ne doit pas s'imaginer que ce ſoit ſeulement la ſurface extrême de la Planète, dont la partie ſupérieure ſouffre une plus forte impulſion par devant que par derriere: mais la même choſe arrive à toutes les couches parallèles autour du centre, dont on conçoit composé le corps planètaire, parce que les pelotons du Torrent étant de toutes ſortes de grandeur (§. XXXIX), il y en aura toûjours, qui après avoir pénétré les pores des couches les plus éloignées du centre, tomberont ſur une qui a aſſez de denſité, par conſéquent ſes pores aſſez étroits, pour ne leur pas donner le paſſage libre; en ſorte que cette autre couche doit, auſſi bien que la premiere, ſoûtenir l'impulſion du Torrent, & par la raiſon alleguée, une impulſion plus forte ſur la partie qui va devant, que ſur celle qui ſuit.

Il faut même étendre cette explication juſqu'aux couches extérieures, qui environnent le corps de la Planète, je parle de celles qui doivent compoſer ſon Tourbillon particulier, & qui ſeront ſans doute frapées par les plus gros pelotons du Torrent. Par où on voit, non ſeulement pourquoi le Tourbillon particulier doit avoir la même direction, pour tourner d'Occident en Orient, qu'a le Tourbillon general; mais que toutes ces couches, tant de la Planète que de ſon Tourbillon, s'entr'aident à ſuivre cette commune direction, chacune contribuant de ſa part à la rotation, par la prévalente impulſion qu'elle reçoit ſur le devant.

Cette force du Torrent central, qui frape avec plus d'énergie la partie antérieure de la Planète & de ſon Tourbillon particulier, pour lui procurer la rotation, peut fort bien être comparée à la force de l'eau d'une cataracte, laquelle ſe précipitant ſur les

Digitized by Google

les ailes d'une rouë de moulin la fait tourner ſur ſon axe ; car quand même, à l'opoſite de cette cataracte, il y en auroit une autre, mais moins forte, tombant ſur les aîles diametralement opposées, celle-ci feroit à la vérité un effort ſur la rouë pour la faire tourner à contre-ſens ; mais la premiere, l'emportant ſur l'autre, ne laiſſeroit pas de faire pirouetter la rouë de ſon côté, quoiqu'avec moins de viteſſe qu'elle ne feroit ſans ſon antagoniſte.

LIX.

Dans cette nouvelle théorie, je regarde la Planète comme ayant déja acquis, par la longueur du temps, la commune direction permanente du grand Tourbillon ſolaire, de la maniere dont je l'ai expliqué ci-deſſus. Car il eſt bien vrai, que pendant ce temps-là elle étoit déja contrainte, en paſſant continuellement à travers le Torrent, de pirouetter ; mais, à cauſe de l'irrégularité de ſa route, l'axe de ſa rotation a dû changer à tout moment de ſituation dans le globe, juſqu'à ce qu'enfin ſe conformant avec la direction du Tourbillon general, la ſituation de l'axe ſe fixât. Quant à la viteſſe du mouvement de rotation, on s'aperçoit bien qu'elle ne dépend pas ſeulement de la rapidité, ou de la force, avec laquelle le Torrent central agit ſur la Planète, & ſur ſon Tourbillon particulier, mais de pluſieurs autres circonſtances ; comme, par exemple, de la denſité de la matiere dont le corps planetaire eſt compoſé, puiſqu'il eſt notoire, toutes choſes d'ailleurs étant égales, qu'un corps plus denſe eſt plus difficile à remuer, à cauſe de ſa plus grande inertie, qu'un corps moins denſe ; item, de l'éloignement du Soleil, car dans une plus grande diſtance les filets du Torrent ont plus de rareté, par conſéquent moins de force pour faire tourner la Planète, en même raiſon que la peſanteur eſt plus petite que dans une moindre diſtance ; auſſi la differente groſſeur des Planètes peut faire varier la viteſſe de la rotation, non pas tant parce que le Torrent a plus de priſe ſur les grandes couches, à cauſe de leurs plus grandes ſurfaces, que parce que la même force, étant apliquée à la circonference

d'une

Digitized by Google

d'une grande rouë, fait plus d'effet qu'étant apliquée à celle d'une plus petite. Ajoutez y l'obliquité de l'axe de rotation, par raport à la direction du Torrent ; cette obliquité devant néceſſairement diminuer l'action du Torrent pour faire tourner la Planète autour de ſon axe.

La complication de toutes ces cauſes peut faire, que la rotation ſe fait plus ou moins vite, que n'exigeroit la diſtance de la Planète au Soleil, ſelon que les unes ou les autres de ces cauſes ſont les prévalentes.

L X.

Ainſi Jupiter, qui eſt environ 5 fois plus éloigné du Soleil que la Terre, & partant la force du Torrent dans cette région 25 fois plus foible qu'elle n'eſt dans la région de la Terre, néanmoins Jupiter acheve une de ſes rotations en dix heures de temps, au lieu que la Terre a beſoin de plus du double de ce temps pour une ſeule révolution ſur ſon centre: la raiſon en eſt manifeſte par ces trois circonſtances: 1°. l'équateur de Jupiter repréſente une rouë dont le diametre eſt 10 fois plus grand que celui de la Terre ; donc ſi ces deux corps n'étoient que des diſques plats de même épaiſſeur, il y auroit par la nature du levier, dix fois plus de facilité à faire tourner Jupiter que la Terre. Mais puiſque ce ſont des globes, dont les ſurfaces, expoſées à l'action du Torrent, ſont comme les quarrés de leurs diametres, il y aura, tout le reſte étant égal, dix fois dix ou cent degrés de facilité pour le tournoyement de Jupiter contre un degré pour celui de la Terre : mais comme par-contre l'action du Torrent à la diſtance de Jupiter eſt 25 fois plus foible qu'à la diſtance de la Terre, il faut combiner ces deux raiſons de 100 à 1 & de 1 à 25, d'où réſulte la raiſon de 4 à 1, qui marque que ſi Jupiter & la Terre étoient d'une même denſité, la facilité de rotation dans Jupiter ne ſeroit plus que quadruple de celle dans la Terre. Mais 2°. la matiere qui compoſe le corps de Jupiter, étant, ſi nous nous en raportons au calcul de M. Newton, 5 fois moins denſe que le corps de la Terre, cela fait la raiſon quadru-

Digitized by Google

quadruple encore 5 fois plus grande, de ſorte qu'à ces deux égards la facilité de rotation, c'eſt-à-dire, la viteſſe qui en réſultera dans l'équateur de Jupiter, doit être 20 fois plus grande que celle de l'équateur de la Terre. Outre cela, 3°. les obſervations montrent que l'axe de Jupiter eſt preſque perpendiculaire au plan de ſon orbite, par conſéquent auſſi à la direction du Torrent central; au lieu que l'axe de la Terre incline de $23\frac{1}{2}$ degrés, ce qui diminue encore, comme il eſt aiſé à prouver, la viteſſe de rotation de la Terre, en même raiſon que le quarré du ſinus du complément de $23\frac{1}{2}$ degrés eſt plus petit que le quarré du ſinus total. Or les Tables des ſinus font connoitre que ces deux quarrés ſont à peu près comme 5 eſt à 6.

Compoſant donc la raiſon de 20 à 1 avec celle-ci de 5 à 6; la viteſſe rotative abſoluë de l'équateur de Jupiter eſt à celle de la Terre comme 20 eſt à $\frac{5}{6}$, ou comme 24 à 1. Ainſi puiſque les temps périodiques de deux globes qui tournent ſur leur axe, ſont en raiſon directe de leurs diametres, & inverſe des viteſſes abſoluës de leurs équateurs, nous aurons le temps d'une révolution de Jupiter ſur ſon axe à celui de la Terre $= \frac{10}{24} : 1 = 10 : 24$, conformement aux obſervations.

LXI.

De tout cela nous tirons cette regle generale pour le mouvement diurne des Planètes : *Il faut compoſer ou multiplier enſemble ces quatre raiſons, ſavoir, la raiſon inverſe du quarré des diſtances au Soleil; la raiſon directe du quarré des diametres; la raiſon ſimple inverſe des denſités; & la raiſon directe du quarré des ſinus du complément des inclinaiſons des axes ſur les plans des orbites: le produit donnera la raiſon des viteſſes rotatives des équateurs.*

Mais n'y ayant aucune obſervation qui puiſſe nous aprendre les denſités des Planètes, il faudra ſe contenter de quelque conjecture probable. Or ſi on veut accepter ce que M. Newton a trouvé par ſa ſupputation, que la denſité de Jupiter eſt à celle de la Terre à peu près comme 1 eſt à 5, c'eſt-à-dire, récipro-

quement comme leurs diſtances au Soleil ; & comme d'ailleurs il paroit fort probable, que les Planètes les plus denſes occupent les plus baſſes régions dans le Tourbillon ſolaire ; on ſeroit porté à établir pour un principe general, que *les denſités des corps planètaires ſont réciproquement proportionnelles à leurs diſtances au Soleil.* La même choſe devroit s'entendre des Satellites, par raport aux diſtances à leurs Planètes principales.

Cela poſé, on pourroit abreger la regle que je viens de donner : car les deux raiſons qui entrent dans cette regle, ſavoir la premiere inverſe du quarré des diſtances au Soleil, & la troiſieme ſimple inverſe des denſités, donneroient toûjours par leur compoſition la ſimple raiſon inverſe des diſtances ; ainſi il n'y auroit plus que ces trois raiſons à multiplier enſemble, ſavoir *la raiſon ſimple inverſe des diſtances ; la raiſon directe doublée des diametres ; & la raiſon directe doublée des ſinus du complément des inclinaiſons des axes* : *le produit donneroit la raiſon des viteſſes rotatives des équateurs.*

LXII.

Voyons ce qui réſulteroit en apliquant cette regle à la Planète de Venus, & en adoptant ce qu'il y a dans la *Connoiſſance des Temps*, où je trouve 1°. que la diſtance moyenne de Venus au Soleil eſt à celle de la Terre environ comme 5 à 7, dont la raiſon inverſe eſt de 7 à 5 ; 2°. que leurs diametres ſont égaux, & par conſéquent leurs quarrés ſont comme 1 à 1 ; & 3°. par l'obſervation de M. BIANCHINI, que l'inclinaiſon de l'axe de Venus ſur le plan de ſon orbite eſt de 75 degrés : mais puiſque M. BIANCHINI ajoute qu'il y a des temps dans la période de Venus, où l'axe de rotation paroit ſe confondre entierement avec l'axe d'illumination, c'eſt-à-dire, que l'inclinaiſon eſt totale, ou de 90 degrés ; nous prendrons un juſte milieu entre 75° & 90° ; prenons donc 80° pour l'inclinaiſon la plus ordinaire de l'axe de Venus, enſorte que ſon complément étant de 10 degrés, & le complément de l'inclinaiſon de l'axe de la Terre de $66\frac{1}{2}$ degrés, on

trouve

Digitized by Google

trouve, dans les Tables, que les ſinus des ces deux compléments ſont à peu près en raiſon de 3 à 16, dont la raiſon doublée ſera de 9 à 256; c'eſt pourquoi ſelon la regle il faut multiplier les expoſants de nos trois raiſons, & nous aurons $\frac{7}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{9}{256} = \frac{63}{1280}$; d'où il ſuit que la viteſſe de rotation de l'équateur de Venus ſeroit à celle de l'équateur de la Terre comme 63 eſt à 1280; par conſéquent les globes de ces deux Planètes étant poſés égaux, les temps périodiques de leurs revolutions diurnes ſont réciproquement comme 1280 à 63, ou bien près comme $20\frac{1}{3}$ à 1; on auroit donc 20 jours & 8 heures pour une rotation entiere de Venus, ce qui eſt un peu moins de 23 jours, comme il eſt marqué dans la Connoiſſance des Temps.

Mais en donnant un ſeul degré de plus à l'inclinaiſon mediocre de l'axe de Venus, enſorte qu'elle ſoit de 81° au lieu de 80°, nous trouverons par nôtre regle, que la revolution diurne de cette Planète ſeroit environ de 25 jours; ce nombre ſurpaſſe celui de 23 jours, preſque autant que celui-ci ſurpaſſe les 20 jours 8 heures, que nous avons trouvés par la premiere ſuppoſition. Nous voilà donc reduits à prononcer, que la véritable inclinaiſon moyenne de l'axe de Venus, entre la plus petite de 75 degrés & la plus grande de 90 degrés, eſt un peu plus grande que de 80 degrés, mais un peu moindre que de 81 degrés. C'eſt beaucoup que nos principes nous ayent mené à une ſi grande préciſion, dans un cas où l'inclinaiſon de l'axe eſt variable dans chaque revolution annuelle: ce qui eſt un phénomène étrange, & tout particulier à Venus; les autres Planètes, que je ſache, ne changeant point ſenſiblement d'inclinaiſon de leur axes, pendant leur cours autour du Soleil; ſi ce n'eſt peut-être cette petite nutation ou libration, s'il y en a une, dont parle M. NEWTON, mais qui eſt ſi inſenſible, qu'elle ne mérite point d'attention.

Digitized by Google

L X I I I.

Dans cette recherche, on a ſupoſé que la matiere, qui compoſe le globe d'une Planète, eſt uniformement denſe par toute ſon étenduë, ou que tous les corps particuliers, qui pris enſemble font le total, ſont homogènes; mais comme l'expérience fait voir que le globe terreſtre, que nous habitons, eſt compoſé d'une infinité de parties hétérogènes, plus ou moins denſes les unes que les autres ſelon leur differente nature, il eſt bien à préſumer qu'il en eſt de même dans les autres Planètes, quoiqu'il y en ait peut-être où la diverſité n'eſt pas ſi conſiderable, ou dont les parties hétérogènes ſont arrangées autour du centre, d'une telle maniere, que le total fera le même effet, par une eſpèce de compenſation du plus & du moins, que s'il étoit uniformement denſe: dans un tel cas nôtre regle ne s'écarteroit pas beaucoup de la vérité du fait.

Quand au reſte, ſi les parties heterogènes d'une Planète ſont trop inégalement diſtribuées autour du centre du globe, en ſorte que le centre de gravité (que je nommerois plûtôt le centre d'*inertie*) de toute la maſſe, differe beaucoup du centre de figure, je dis que c'eſt juſtement cette inégale diſtribution, qui eſt la cauſe de l'obliquité de l'axe de rotation, ou qui fait pancher cet axe ſur le plan de ſon orbite; voici la maniere dont je conçois la choſe.

L X I V.

J'ai déja demontré que dans ce ſyſtème, auſſi bien que dans celui de M. NEWTON, les orbites des Planètes doivent être des Ellipſes qui ont leurfoyer dans le centre du Soleil, vers lequel tendent directement les filets du Torrent central; il eſt viſible que la direction des filets qui donnent ſur une Planète, eſt ſituée toûjours ſur le plan de ſon orbite; il fera donc ſon effort pour faire tourner la Planète ſur une ligne droite, qui paſſe par ſon centre perpendiculairement au plan de l'orbite; c'eſt

Digitized by Google

c'eſt pourquoi, ſi le globe de la Planète ſe trouve dans une entiere indifference d'obéir au mouvement rotatif en telle ou telle direction, ſelon qu'il eſt frapé, il faut de neceſſité que cette ligne droite devienne effectivement l'axe de rotation.

Or cette indifference ſe trouve, lorſque le centre de gravité, ou d'*inertie*, eſt dans le centre même du globe; ce qui peut arriver en deux manieres; ſavoir 1°. quand la matiere du globe, eſt réellement homogène, ou uniformement denſe; 2°. quand ſes parties, quoique non uniformement denſes, ſont tellement diſtribuées que leur commun centre d'inertie tombe dans le centre du globe, comme, par exemple, quand on conçoit le globe composé de couches, dont chacune ſoit d'une denſité uniforme, mais de differente denſité entr'elles. Mais ſi le centre d'inertie eſt éloigné du centre de figure ou du globe, alors cette indifference au mouvement rotatif n'a plus lieu, étant ſenſible par les loix de la Méchanique, qu'il y a plus de facilité à tourner un globe, de façon que ſon centre d'inertie demeure immobile pendant le tournoyement, qu'il n'y en a lorſqu'on le veut tourner dans un autre ſens, qui ne ſe peut faire ſans mouvoir le centre d'inertie; parce que de cette maniere n'y ayant plus d'équilibre entre les inerties partiales, on eſt obligé de vaincre l'inertie totale de la maſſe, ce qui demande plus de force, à meſure que le centre d'inertie fait plus de chemin par la rotation.

LXV.

Cela bien entendu, conſiderons la Planète comme n'ayant point encore de rotation, mais prête à la ſubir par l'impreſſion du Torrent: je conçois le diametre tiré par les deux centres, d'inertie & de figure; ſi ce diametre par un coup de hazard ſe trouve perpendiculaire ſur le plan de l'orbite, il eſt évident que la rotation commencera à ſe faire autour de ce diametre, qui enfile les deux centres, qui ſera par conſéquent l'axe de rotation; parce que de cette maniere le mouvement ne rencontre nulle opoſition

de la part du centre d'inertie, qui étant dans l'axe même demeure immobile; mais ſi le diametre, qui paſſe par les deux centres, eſt oblique au plan de l'orbite, alors l'impreſſion du Torrent ne tournera plus le globe autour de la ligne perpendiculaire ſur le plan de l'orbite, à cauſe de l'obſtacle que lui opoſe l'inertie totale de la maſſe. Cet obſtacle devroit être vaincu pour mettre auſſi le centre d'inertie en mouvement de rotation; ce qui ne pouvant pas ſe faire aiſement, & ſans quelque perte de la force du Torrent, la rotation changera plûtôt de direction, en évitant, autant qu'il eſt poſſible, la difficulté de faire tourner le centre d'inertie; je veux dire que le globe ſe prêtant à la plus facile détermination, tournera, ou exactement, ou peu s'en faut, ſur le diametre qui paſſe par les deux centres, qui ſera par cela-même l'axe de rotation.

La ſituation oblique de cet axe, que le hazard lui a une fois donnée, doit enſuite ſe conſerver toûjours, parce que le corps planètaire étant conſtamment dans ſon équilibre, par la force centrifuge, contre-balancée par la gravitation cauſée par l'impulſion du Torrent, l'axe de rotation ne peut que garder ſon parallelisme; d'où il ne ſortiroit jamais, s'il n'en étoit détourné inſenſiblement par une cauſe étrangére, dont nous parlerons dans la ſuite, qui fait qu'après un grand nombre de revolutions autour du Soleil, le changement de ſituation devient un peu ſenſible, en ſorte que l'axe prolongé juſqu'aux étoiles fixes, ſon extrémité, ou le pole de l'équateur, paroit décrire un petit cercle autour du pole de l'écliptique, qui ſe fait dans le ciel, en étendant par la penſée le plan de l'orbite juſqu'au firmament.

L X V I.

Après cette longue déduction, on ne peut plus demander, dans nôtre ſyſtème, pourquoi le mouvement diurne ou de rotation ſe fait, ni pourquoi il ſe fait ſelon la même direction dans la partie ſupérieure de la Planète, ſelon laquelle ſe fait ſon mouvement périodique autour du Soleil. Les difficultés qui ſe preſentent à cet

égard

Digitized by Google

égard dans l'hypothèſe des attractions, ſont entierement levées par l'action du Torrent, plus forte ſur l'hémiſphère anterieur qui va au devant de ſon action, que ſur le poſterieur qui la fuit.

On peut former une autre demande, dans le ſyſtème de M. NEWTON, pour le moins auſſi importante que la premiere; qui eſt, que l'hypotheſe des attractions étant jointe à celle du grand vuide, on eſt en droit de demander pourquoi l'orbite de chaque Planète change inſenſiblement de place, en tournant d'un mouvement très-lent & uniforme autour de ſon foyer qui eſt dans le centre du Soleil, & pourquoi ce mouvement ſe fait auſſi d'Occident en Orient, ce qui cauſe qu'après une longue ſuite d'années on remarque que les apſides s'avancent un peu vers l'Orient. L'exiſtence du vuide ſupoſée, & les forces centrales en raiſon inverſe doublée des diſtances, exigent neceſſairement que les orbites ſoient des courbes rentrantes en elles-mêmes, qu'elles ſoient des Ellipſes parfaites, dont l'axe ou la ligne des apſides ſoit abſolument immobile. Il eſt vrai que, pour rendre raiſon de leur mobilité, M. NEWTON a recours aux influences que les Planètes ont les unes ſur les autres par leurs attractions mutuelles, par leſquelles il croit devoir arriver que la régularité de leur mouvement ſe trouble, & que par-là les aphèlies deviennent mobiles; mais on a démontré ailleurs l'inſuffiſance & la foibleſſe de cette raiſon, puiſqu'on a fait voir que, par exemple, Jupiter, qui par ſa groſſeur doit exercer le plus de force d'attraction ſur une autre Planète, devroit tantôt avancer, tantôt faire reculer l'aphèlie de celle-ci, ſelon que l'un ou l'autre précède, bien-loin de produire un mouvement toûjours en avant, égal & uniforme.

LXVII.

Nôtre théorie nous fournit une explication de ce phénomène très-ſimple & très-naturelle, quoique differente de celle qu'on a donnée dans une autre occaſion; voici cette nouvelle explication, tirée des principes établis dans ce diſcours. Nous avons vû

ci-

ci-deſſus, que le grand Tourbillon ſolaire eſt d'une nature à ne point faire de réſiſtance aux corps céleſtes, qui puiſſe être tant ſoit peu ſenſible en pluſieurs milliers d'années; que ſa circulation d'Occident en Orient doit être tranquille & uniforme dans chaque couche; & que la viteſſe de cette circulation eſt 230 fois moins grande, qu'on ne la doit ſupoſer dans le ſyſtème de DESCARTES, qui veut que la Planète qui y nage n'ait point d'autre mouvement autour du Soleil, que celui qu'elle emprunte de la matiere du Tourbillon qui l'emporte; au lieu que, ſelon M. NEWTON, & ſelon mes principes, le mouvement annuel de la Planète n'a pas ſon origine de celui du Tourbillon, mais qu'il lui a été primitivement imprimé; enſorte que l'origine eſt intrinſeque, & indépendante de toute autre cauſe que de la premiere: tout auſſi-bien que les Carteſiens rigides ſont obligés de reconnoitre que la circulation, tant du Soleil, que celle du Tourbillon autour d'un centre commun, tirent immédiatement leur origine de la premiere cauſe, je veux dire, de l'Auteur du premier mouvement.

De plus, nous avons vû (§. LII & ſuiv.) que, quoique le Tourbillon n'ait pas aſſés de force pour augmenter ou diminuer ſenſiblement les viteſſes des Planètes ſur leurs orbites, que demande la regle de KEPLER, il en a pourtant aſſés pour cauſer quelque changement dans leurs directions; juſques-là même que les orbites ayant eu au commencement leurs poſitions ſur differents plans, ſans ordre & ſans régularité, les directions de leurs cours, & par-là les poſitions de leurs orbes, ſe ſont rangées peu à peu par le mouvement du grand Tourbillon, dans l'eſpace du Zodiaque. Après donc que le plan d'une orbite a été reduit ainſi dans ſa ſituation convenable & permanente, la Planète continueroit éternellement à décrire la même orbite, & repaſſeroit dans chaque révolution par les mêmes apſides, tout comme dans le vuide parfait, ſavoir ſi le Tourbillon venoit à ceſſer de ſe mouvoir.

Mais comme il circule toûjours d'Occident en Orient, & ne ceſſe jamais; ſon effet ſera, non pas de changer la viteſſe ſenſible

ble de la Planète, mais au moins d'en faire anticiper un peu la direction en chaque point de l'orbite; d'où il s'enſuit viſiblement que l'orbite elle-même paroîtra circuler d'un mouvement uniforme, mais très-lent, autour de ſon foyer, & tranſporter par conſéquent les apſides avec la même lenteur uniforme, & dans la même direction d'Occident en Orient.

Voilà une explication, ce me ſemble, bien ſimple & pas moins claire, d'un phénomène, qui par ſon importance fut trouvé digne par l'illuſtre Académie d'être propoſé pour le ſujet du prix de 1730.

QUATRIEME PARTIE.

LXVIII.

JUSQU'ICI j'ai traité des principaux phénomènes, que l'Aſtronomie moderne a obſervés avec le plus d'exactitude & d'aplication; les raiſons phyſiques, que j'ai tirées de ma théorie pour expliquer ces faits, me paroiſſent telles qu'on les pourra enviſager pour le moins comme des conjectures très-probables, ſur-tout à cauſe de la ſimplicité & de la clarté des principes ſur leſquels j'ai bâti mon ſyſtème. Je ſoûmets cependant le tout à la déciſion de mes Juges, ſages & éclairés, accoûtumés à ne prononcer leur ſentence qu'en faveur de la ſolidité du raiſonnement.

Il eſt temps preſentement, que je tâche de ſatisfaire auſſi à la queſtion qui revient ſur le tapis, à cauſe que, ſelon ce qu'inſinue le programme publié pour l'année 1734, on n'a rien trouvé dans les pieces qui ont été envoyées la premiere fois, d'aſſés précis ni d'aſſés clair ſur le ſujet en queſtion, & que c'eſt pour cela qu'on n'a pas cru devoir adjuger le prix, mais qu'une matiere auſſi importante pour l'Aſtronomie phyſique étant très-digne d'être aprofondie, l'illuſtre Académie a jugé qu'il étoit utile de propoſer de nouveau le même ſujet pour l'année 1734, en y attachant un prix double de l'ordinaire. Cette

Digitized by Google

generoſité & louable attention pour le bien public doit exciter les Savants, & particulierement ceux qui portés par eux-mêmes pour l'avancement des Sciences, ont toûjours tâché d'y contribuer, indépendamment même du profit qui leur en pourroit revenir.

Animé de cet eſprit, je vais produire mes penſées ſur *la cauſe phyſique de l'inclinaiſon des plans des orbites des Planètes par raport au plan de l'équateur & de la révolution du Soleil autour de ſon axe*; & indiquer enſuite *d'où vient que les inclinaiſons de ces orbites ſont differentes entr'elles*. Ce ſont-là les propres termes dans leſquels la Queſtion eſt propoſée. Je me flatte que la ſolution que j'en donnerai ſera d'autant plus goûtée, qu'elle a une liaiſon parfaite avec les principes de ma théorie.

Auſſi eſt-ce dans cette ſeule vûe, que j'ai communiqué un peu au long cette théorie, afin qu'on ne trouve pas étrange que je m'y ſois étendu à expliquer des faits aſtronomiques, qui ſemblent avoir peu de connexion avec le ſujet dont il s'agit preſentement. Si on veut examiner une partie d'une édifice, on fait bien de contempler auparavant tout l'édifice en ſon entier, & enſuite les parties ſéparément, pour juger ſi celle dont il s'agit eſt dans l'ordre & dans la ſymmétrie avec les autres; c'eſt en quoi conſiſte la beauté de tout l'édifice: ainſi je crois n'avoir pas mal fait d'avoir expoſé à la vûe un ſyſtème, avec les principales particularités qui en réhauſſent le prix : outre que les œuvres ſurérogatoires, comme je penſe, ne ſont pas déſagréables, lorſque'lles donnent un luſtre au devoir eſſentiel.

L X I X.

Pour en venir donc à la Queſtion propoſée: elle conſiſte en deux parties. On demande 1°. la cauſe phyſique des inclinaiſons des orbites; 2°. la raiſon de la diverſité de ces inclinaiſons. Il n'y a qu'à bien ſatisfaire à la premiere partie par une réponſe convenable, on verra que la réponſe à la ſeconde s'enſuivra d'elle-même.

Digitized by Google

A cette fin, je prie mon lecteur de prêter le plus d'attention à mes raiſonnements ſur le premier de ces deux points, comme ſur le plus eſſentiel, & de ſe ſouvenir, avant toutes choſes, de la nature du Tourbillon ſolaire, auquel j'ai attribué par de bonnes raiſons une viteſſe 230 fois plus petite qu'on ne la ſupoſe dans le ſyſtème Carteſien, & avec cela une force très-inſenſible de réſiſter, ou de diminuer la viteſſe des Planètes, à cauſe que la plus grande partie de la matiere du Tourbillon eſt un liquide parfait, diviſé actuellement à l'infini & ſans borne, ou plûtôt n'ayant point de parties élementaires ſans diviſion (§. X & ſuiv.) par conſéquent incapables de faire la moindre réſiſtance aux corps qui s'y meuvent; mais que le reſte de la matiere, ſavoir les globules céleſtes, qui entrent, pour une très-petite partie, dans la compoſition du Tourbillon, ſont d'une rareté extrême; je veux dire, ſi diſperſés par tout le vaſte océan du Tourbillon, que les corps énormes des Planètes y paſſent librement comme dans un vuide parfait, avec les viteſſes qu'ils doivent acquerir dans les divers endroits de leurs orbes elliptiques, en vertu de la regle de KEPLER.

Cependant ſi la réſiſtance de cette matiere doit être comptée pour rien, nous avons démontré, qu'il n'en eſt pas de même du changement de direction que doivent ſubir les Planètes ſur leurs routes, ſelon la diverſité des circonſtances, quoique ſans rien perdre de leur viteſſe (§. LII & LIII). Or c'eſt ce changement de direction, provenant de l'opoſition des globules céleſtes, qui peut devenir ſenſible, & même aſſez conſiderable par la longueur du temps, pour faire que les plans des orbites, après avoir été reduits dans une ſituation permanente, comme je l'ai expliqué ci-deſſus, ne ſe trouvent pas préciſement dans le plan commun de l'équateur du Tourbillon, mais qu'ils s'en écartent, enſorte que les orbites couperont cet équateur ſous des angles plus ou moins grands, ſelon la diverſe conſtitution des Planètes: c'eſt ce que je me mets en devoir d'expliquer plus amplement & en détail.

Digitized by Google

L X X.

D'abord je me figure que le plan de l'équateur du grand Tourbillon n'eſt point different de celui de l'équateur du Soleil même. Je regarde le Soleil & ſon Tourbillon comme un tout, dont celui-ci eſt, pour ainſi dire, la continuation de celui-là; de ſorte que le Soleil ayant reçû une fois ſon mouvement de circulation autour d'un axe, ce mouvement a été communiqué peu à peu à la matiere qui l'environne, & forme preſentement ſon Tourbillon, dont la circulation ne fait que ſuivre celle du Soleil, dans la même direction d'Occident en Orient, & partant autour du même axe; mais avec plus de viteſſe dans les couches plus voiſines que dans les éloignées; juſqu'à ce que ces differentes viteſſes ſoient enfin parvenuës à l'état d'uniformité, ſavoir chacune convenable à la diſtance au Soleil, telle que la demandoient les loix de la Méchanique dans la formation d'un Tourbillon, comme on l'a démontré autrefois.

C'eſt-là l'idée la plus ſimple & la plus naturelle qu'on puiſſe avoir au ſujet de la formation & du mouvement d'un Tourbillon; car quelle contrainte ne faut-il pas ſe donner pour s'imaginer avec les *Carteſiens* outrés, que la premiere couche du Tourbillon ſolaire faſſe ſa circulation 230 fois plus rapidement que la ſurface du Soleil à laquelle la premiere couche eſt contiguë? & quelle peine n'a-t-on pas auſſi à concevoir, que le Tourbillon particulier terreſtre dans ſa plus baſſe région contiguë à la ſurface de la Terre, circule 17 fois plus vite que ne fait la Terre elle-même par ſon mouvement diurne? c'eſt pourtant ce qu'il faut dire, ſi on veut ſoûtenir que les Planètes autour du Soleil, & la Lune autour de la Terre, empruntent leur mouvement de celui des Tourbillons, par leſquels on prétend que ces corps céleſtes ſont entrainés.

Ne ſeroit-on pas fondé à demander, pourquoi à l'endroit où le Tourbillon ſolaire touche le Soleil, & où le terreſtre touche la Terre, les deux mouvements ne ſe confondent pas enfin, ou ne ſe conforment pas l'un à l'autre? Quelle cauſe pourroit-on inventer, qui

Digitized by Google

qui entretint cette grande inégalité de viteſſe de deux matieres fluides, qui ſe frotteroient continuellement, ſans qu'il en réſultat le moindre retardement dans la plus vite, ni d'acceleration dans la plus lente? le bon ſens n'en eſt-il pas choqué? Nôtre hypothèſe remédie à tous ces inconvénients: ainſi continuons à nous en ſervir pour l'explication du fait en queſtion, d'une maniere qui en rende la cauſe préciſe & claire, telle qu'on la demande.

LXXI.

On m'acordera donc, puiſque j'ai fait voir que cela convenoit mieux à la ſimplicité de la Nature, que le mouvement du Tourbillon eſt la production de celui du Soleil, ou plûtôt que celui-la n'eſt autre choſe que la continuation de celui-ci; d'où il ſuit qu'il ne ſe fait point de ſaut ſubit de la viteſſe de l'un à la viteſſe de l'autre, mais que déja depuis le centre, la diminution de viteſſe circulante ſe fait graduellement vers la circonference, ſuivant la loi d'un Tourbillon, au moins juſqu'à une vaſte diſtance au-deſſus de la région des Planètes; que par conſéquent toutes ſes parties ſans exception circulent autour d'un même axe, qui eſt celui du Soleil; ce ſont donc les mêmes poles, & le même plan des équateurs de toutes les couches qui compoſent le Tourbillon: car quelle raiſon auroit-on de croire, comme quelques-uns ſe le ſont imaginé, que les couches, à differentes diſtances, changent de direction dans leur circulation? il n'y a là aucune cauſe phyſique à alleguer, qui ſoit ſolide. Je me fonde toujours ſur la ſimplicité, & tiens pour un principe general, qu'il ne faut jamais s'en écarter, ſans une extrême neceſſité.

Cela étant, je vois avec une entiere évidence, qu'après que les Planètes ont une fois acquis la direction permamente, de la maniere que je l'ai expliqué, cette direction devroit être exactement conforme à celle du Tourbillon, puiſque celle-ci a produit l'autre; cela veut dire, que toutes les orbites devroient ſe trouver parfaitement ſur le plan commun de l'équateur du Soleil & du Tourbillon: cependant les obſervations font connoitre

qu'elles s'en écartent un peu, & que leurs plans coupent le plan de l'équateur ſolaire, en differents endroits, & ſous differents angles, dont le plus grand monte à 7°, 30′, qui eſt celui que fait l'orbite de la Terre.

Cette deviation m'a donc fait juger, que ſa principale cauſe ne doit pas être cherchée uniquement dans la matiere du Tourbillon, qui environne immédiatement la Planète par un contact immédiat, & qui devroit plûtôt, comme nous l'avons vû, l'entretenir dans le mouvement commun ſur le plan de l'équateur. Mais faut-il peut-être recourir à une autre cauſe, qui agiſſe de loin ſur la Planète, pour la détourner de la direction du Tourbillon, ſelon le ſentiment de KEPLER, & de quelques autres après lui, qui ont introduit une eſpece de magnétiſme immateriel émanant du Soleil, & capable de changer la ſituation & le cours des Planètes? mais cette viſion, qui ne vaut pas plus que les attractions, eſt auſſi obſcure que les qualités occultes.

N'allons donc pas ſi loin, & cherchons la veritable cauſe de nôtre phénomène dans le corps même de la Planète; on l'y trouvera ſûrement, d'autant plus recevable, qu'elle ne develope pas ſeulement le fait, mais auſſi les circonſtances qui l'accompagnent, indiquées par les obſervations les plus exactes; marque indubitable, qu'il y a ici quelque choſe de plus qu'une ſimple conjecture plauſible.

LXXII.

Je commence par examiner ce qui arriveroit au mouvement annuel d'une Planète, en ſupoſant que ſa figure eſt une ſphère parfaite. Je vois qu'un tel corps a une entiere indifference à obéir, avec une égale facilité, à telle ou telle direction que le fluide ambiant lui imprime. Or, comme je l'ai déja dit plus d'une fois, le Tourbillon, quoiqu'il n'ait pas de force ſuffiſante pour changer ſenſiblement les viteſſes des corps céleſtes, ne laiſſe pas d'en diſpoſer les directions (ſi elles ſont d'abord differentes de la ſienne) de ſorte qu'elles deviennent peu à peu conformes à la direction commune de toutes les parties du Tourbillon.

Il

Digitized by Google

Il ne faut donc pas douter qu'une Planète parfaitement ſphèrique (ſ'il y en avoit) ne demeurât continuellement dans le plan de l'équateur ſolaire, dont elle ne s'écarteroit jamais; en ſorte que le plan de cet équateur & celui de l'orbite planètaire ne feroient point d'angle, & ne ſeroient qu'un même plan: cela me paroit clair, ſans autre explication plus ample.

LXXIII.

Mais on ſait aujourd'hui que les corps des Planètes n'ont pas la figure d'un globe parfait. Quant à la Terre, il y a des Philoſophes qui lui attribuent la figure d'un ſpheroïde allongé vers les poles; au contraire Mrs. NEWTON, HUGUENS & d'autres diſent qu'elle eſt un ſpheroïde aplati. On convient generalement, par les obſervations, que l'axe de Jupiter eſt plus petit que le diametre de ſon équateur, en raiſon environ de 12 à 13. Il n'y a pas à douter, en réflechiſſant ſur les cauſes phyſiques qu'on allegue de part & d'autre, qu'une telle inégalité de diametres, plus ou moins grande, ne ſe trouve auſſi dans la figure des autres Planètes.

Je ſuis donc en droit de demander qu'on m'accorde que les Planètes ſont des ſpheroïdes: & je démontrerai que cette figure ſupoſée emporte neceſſairement, 1°. que les Planètes ne peuvent pas ſe mouvoir exactement ſur la direction du Tourbillon, je veux dire, que les plans de leurs orbites ſeront differents du plan de l'équateur ſolaire, qui eſt auſſi celui du Tourbillon, & que c'eſt dans cette differente poſition que conſiſte l'inclinaiſon des orbites par raport au plan de l'équateur ſolaire: 2°. que cette inclinaiſon ſera plus ou moins grande, ſelon que le ſphéroïde difère plus ou moins d'une ſphère parfaite. Ces deux points démontrés formeront la réponſe à la premiere & à la ſeconde partie de la Queſtion.

LXXIV.

Je dis donc que l'une & l'autre eſpece de ſphéroïde, tant aplati qu'allongé, doit cauſer que la direction du mouvement de

la

Digitized by Google

la Planète ſe détourne de la route qu'elle prendroit ſur le plan commun de l'équateur ſolaire, ſi la Planète étoit une ſphère; avec cette difference, que les nœuds de ces deux ſphéroïdes ſur l'équateur du Soleil ſeront de noms contraires, je veux dire que là où ſe fera le nœud aſcendant, ou Boreal, dans le cas du ſphéroïde aplati, il deviendra nœud deſcendant, ou Auſtral, ſi on ſupoſe que c'eſt un ſphéroïde allongé, & réciproquement le nœud deſcendant du ſphéroïde aplati ſe change en aſcendant pour le ſphéroïde allongé: j'en donne l'explication tirée de la navigation.

On ſait que les vaiſſeaux pouſſés obliquement par le vent, au lieu d'aller dans la direction de la quille, en ſont inſenſiblement détournés, en prenant une autre route, dont la direction fait avec celle de la quille un angle, que les Marins apellent la *dérive* du vaiſſeau.

La nature & la cauſe de cet effet eſt connuë & traitée amplement dans la manœuvre des vaiſſeaux: c'eſt que ſi le corps du vaiſſeau avoit la figure d'un cercle, ou d'une ſphère, par conſéquent indifferente à ſe mouvoir avec une égale facilité en tout ſens, il iroit ſans doute, abandonné à lui-même, dans la direction que lui donneroit la ligne moyenne de la force mouvante, & cette direction pourroit paſſer auſſi pour celle de la quille, puiſque chaque diametre la pourroit être. Tout au contraire, un vaiſſeau fort long, mais infiniment peu large, ſuivroit conſtamment la direction de ſa longueur ou de ſa quille, quelle que fût l'obliquité de la direction de la force mouvante: car un tel vaiſſeau ne trouvant point de réſiſtance ſenſible à la prouë, & toute la force de l'eau donnant ſur le côté; il eſt viſible qu'il doit ſe mouvoir exactement ſur la direction de la quille ſans la moindre dérive. Mais comme il eſt impoſſible dans la ſtructure des vaiſſeaux, de faire enſorte que la prouë ne ſouffre dans le ſillage quelque réſiſtance, que l'eau lui opoſe; cela eſt la cauſe, que le vaiſſeau eſt obligé de prendre une route moyenne entre la direction de la quille & celle de la force mouvante; c'eſt-à-dire, de ſubir une dérive, plus ou moins grande, ſélon que la réſiſtance de l'eau contre la prouë eſt plus ou moins ſenſible.

Je

Digitized by Google

Je dis donc qu'il ſe fait la même choſe dans le mouvement des Planètes, lorſqu'elles n'ont pas la figure d'une ſphère exacte: ainſi il me ſera permis d'y faire l'aplication, dont le réſultat montrera, combien mes raiſonnements ſont conformes aux obſervations faites ſur cette matiere.

LXXV.

Soit *GC* une portion de l'équateur du Tourbillon, & ſupoſons d'abord qu'une Planète *BDAE* ait ſon centre *C* ſur la ligne *GC* avec un mouvement de *G* vers *C*. Je vois clairement, que ſi la Planète étoit une ſphère parfaite, elle continueroit ſon mouvement ſur la même ligne de *C* vers *N*, nonobſtant l'opoſition de la matiere du Tourbillon compriſe entre les tangentes extrêmes *ML*, *SR* parallèles à *GC*: car cette opoſition qui n'auroit pas de force pour diminuer ſenſiblement la viteſſe de la Planète, n'en a pas non plus pour changer la direction du mouvement; parce que les deux arcs *OBM*, *OES*, étant en ce cas deux quarts de cercle d'une ſituation ſemblable au-deſſus & au-deſſous de *CO*, il eſt évident que pour chaque filet tel que *TF* contre lequel donne l'arc ſuperieur *OBM*, & qui feroit impreſſion ſuivant *F*φ perpendiculaire à la courbe, il y a un autre filet ſemblable, qui donne ſur l'arc inferieur, & qui fait une pareille impreſſion, mais de bas en haut, au lieu que le premier la fait de haut en bas; en ſorte que toutes ces impreſſions ſe trouvant en équilibre par raport à la direction *GC*, la Planète continuera toûjours à ſe mouvoir ſur cette direction, & n'en ſera jamais détournée. TAB. L. Fig. 2 & 3.

LXXVI.

Si le corps planètaire *BDAE* eſt un ſphéroïde ſoit aplati ou allongé, mais dont l'axe de rotation ou du mouvement diurne *BA* eſt exactement perpendiculaire ſur *GC*, ou ſur le plan de l'équateur du Tourbillon, de ſorte que l'équateur *DE* de la Planète,

& celui du Tourbillon *GC*, ne ſont que ſur un même plan; alors le point *E* tombant ſur *O*, les oppoſitions de la part du fluide contre *EB* & *EA* ſont encore ſemblables & égales, d'où il ſuit auſſi que la direction du centre *C* ſuivant *GC* ne ſera point changée. Donc une Planète ſphéroïdique, qui auroit ſon axe de rotation perpendiculairement érigé ſur le plan de l'équateur ſolaire, ne ſortiroit jamais de ce plan, c'eſt-à-dire, que le plan de l'orbite planètaire & le plan de l'équateur du Soleil ne feroient point d'angle. Voilà les deux cas uniques, où il n'y auroit point d'inclinaiſon.

LXXVII.

TAB. L. *Fig.* 2. Mais conſiderons preſentement la Planète comme ayant la figure d'un ſphéroïde aplati, dont l'axe de rotation *BA* ſoit oblique ſur la direction *GC*, que je regarde toûjours comme une partie de l'équateur du Tourbillon, & voyons ſi la Planète pourra ſe ſoûtenir ſur la direction *GC*, ou ſi elle ſera obligée de s'en écarter peu à peu pour prendre une autre route *gc*. Pour cette fin, ſoit le point *V* le plus avant vers le côté où va la Planète, par lequel ſi on conçoit tirée la tangente *HVI*, cette tangente ſera perpendiculaire aux directions *ML*, *ON*, *SR*, & le point d'attouchement *V* ſera au deſſous de la direction *GCN*; tellement que l'arc total *MOS* expoſé à l'action des filets du fluide compris entre *ML* & *SR* eſt partagé en deux parties inégales *VBM*, *VES*, dont la plus grande *VBM* reçoit auſſi le plus grand nombre de filets, qui conſpirent tous à pouſſer la Planète obliquement de haut en bas, & la moindre partie *VES*, reçoit le plus petit nombre de ces filets, qui agiſſent conjointément ſur la Planète pour la repouſſer obliquement de bas en haut.

Donc ces deux forces ſur *VBM* & *VES* étant inégales, la plus petite cedera à la plus grande, d'où il ſuit que le centre *C* quittera la direction *GC*, & en ſuivra une autre *gc* au-deſſous de la premiere. Ce qui arrive déja dès lors que l'angle *BCO* commence à devenir aigu; car il faut conſiderer que cet an-

Digitized by Google

angle *BCO*, que fait l'axe de rotation *BC*, toûjours parallele à lui-même, avec la direction *CO*, toûjours dans une autre poſition, change continuellement de grandeur, comme nous le verrons ci-après plus particulierement.

LXVIII.

Si nous ſupoſons maintenant le cas où la Planète, après avoir fait le demi-tour depuis un des nœuds juſqu'à l'autre, ſe meut dans un ſens contraire au premier, ſavoir de *C* vers *G*, enſorte que l'angle *BCG* ſoit obtus, on voit évidemment que la plus forte impreſſion du fluide du Tourbillon; qui ſe déploye ſur la partie découverte *MDAS*, vient de bas en haut, & détournera par conſéquent le centre *C* de la direction *CG*, pour lui faire prendre la direction *cγ* au-deſſus de *CG*, ce qui arrive auſſi d'abord que l'angle *BCG*, commence à devenir obtus.

Il eſt à remarquer que les deux points d'interſection, où les deux lignes *cg*, *γc* coupent la ligne *CG* prolongée de part & d'autre, repréſenteront les deux nœuds de la Planète, ſavoir, la premiere interſection donnera le nœud auſtral, & la ſeconde le nœud boreal.

Il reſte à expliquer l'effet que produira l'opoſition du fluide du Tourbillon contre une Planète qui auroit la figure d'un ſphéroïde allongé, d'où nous verrons que cet effet ſera renverſé par raport au premier dans l'ordre du mouvement de la Planète ſur ſon orbite, je veux dire, que le nœud deſcendant ou auſtral ſe change ici en boreal, & réciproquement le boreal en auſtral.

LXXIX.

Soit donc une Planète en forme de ſphéroïde oblong *BDAE*; l'axe de rotation *BA* plus grand que le diamétre de ſon équateur *DE*; ſon pole Boreal *B*, & Auſtral *A*; le centre *C*. Soient tirées toutes les autres lignes comme dans la figure précédente; nous voyons d'abord que le point d'attouchement *V*, qui partage l'arc *MVS* expoſé à la preſſion du fluide contenu entre les TAB. L. *Fig.* 3.

Digitized by Google

filets extrêmes *LM*, *RS*, eſt au-deſſus de la direction de l'équateur du Tourbillon : c'eſt pour cela que la preſſion exercée ſur la partie inferieure *VES*, dont la direction moyenne va de bas en haut, eſt prévalante à celle qui s'exerce ſur la ſuperieure *VBM*, dont la moyenne direction tend de haut en bas. Ainſi le centre *C* ne pouvant pas ſe ſoûtenir ſur la direction *GC*, en ſera détourné vers le ſuperieur *c*, & ſuivra la route *gc* au-deſſus de *GC*. Et comme cette inégale preſſion, dont l'inferieure eſt la plus forte, commence dès que l'angle *BCO* devient aigu, on voit que *CG*, *cg* prolongées doivent ſe couper du côté de *G*, *g*, d'où la Planète vient, & que par conſéquent le point d'interſection ſera le nœud boreal, puiſque ce ſera dans ce point, comme nous le verrons, que l'angle *BCO* étant droit va devenir aigu.

LXXX.

Mais au contraire, ſi tout le reſte demeurant le même, on ſupoſe le cas où la Planète ſe meut de *C* vers *G*, & où l'angle *BCG* eſt obtus ; on prouve par un raiſonnement ſemblable à celui que nous avons fait dans §. LXXVIII que la Planète ſera obligée de deſcendre vers le pole auſtral du Tourbillon, & que ſon centre décrira la route *cγ*, qui étant prolongée du côté d'où elle vient, coupera *GC* dans un point vers *N*, qui ſera le nœud auſtral. Car ce ſera ici où l'angle *BCG*, de droit qu'il eſt, commence à ſe changer en angle obtus.

Il faut remarquer pour l'une & l'autre eſpece de ſphéroïdes, que l'axe de rotation étant incliné ſur le plan de l'orbite, il arrive deux fois dans chaque révolution annuelle, que les angles *GCB* & *BCO* deviennent droits, je veux dire, que la direction du centre de la Planète ſoit perpendiculaire à la poſition de l'axe *BA*, ſavoir, une fois lorſque la Planète parvient à l'endroit de ſon orbite, où ſon axe de rotation prolongé rencontre, ou coupe l'axe de l'équateur ſolaire vers le pole boreal, & une fois encore, lorſqu'après une demi-révolution ces deux axes prolongés ſe rencontrent vers le pole auſtral.

LXXXI.

Digitized by Google

LXXXI.

C'eſt donc dans ces deux points que les angles *BCG*, *BCO* ſont droits ; ils ſont par conſéquent comme le paſſage où la direction de l'action du fluide ſur la ſurface du ſphéroïde change d'obliquité, & fait que la partie, qui donnoit plus de priſe à cette action, commence à devenir celle qui en donne moins, & réciproquement la partie qui y étoit moins expoſée, va l'être plus que l'autre : cela eſt évident, en faiſant attention au parallèliſme que l'axe de rotation conſerve pendant ſa révolution autour du Soleil.

De là il paroit que les nœuds des Planètes à l'égard de l'équateur du Soleil ſe trouvent dans les points où les Planètes parviennent à leurs ſolſtices ; puiſque c'eſt viſiblement dans ces points, que l'axe du Tourbillon & l'axe de rotation d'une Planète ſont dans un même plan, & que les angles *BCG*, *BCO* deviennent droits : en conſiderant au moins l'orbite de la Planète comme un cercle parfait, dont le centre ſeroit dans celui du Tourbillon ; mais étant véritablement une Ellipſe, quoique fort aprochante du cercle, nous verrons plus bas que cela fera que les nœuds ſeront un peu éloignés des points ſolſtitiaux.

LXXXII.

Juſqu'ici nous avons conſideré le mouvement de la Planète comme ſe faiſant dans un fluide calme & en repos, dont la ſeule oppoſition doit la faire écarter de la direction qu'elle auroit, ſi elle étoit parfaitement ronde, ou ſi ſon mouvement ſe faiſoit dans le vuide ; de la même maniere que les vaiſſeaux ſouffrent une dérive, lorſque la tendance de leur route n'eſt pas directement oppoſée à la direction moyenne de la réſiſtance de l'eau ; tellement que le lieu d'un vaiſſeau s'éloigne de plus en plus de l'endroit où il ſe trouveroit, ſi on pouvoit éviter la cauſe de la dérive.

Mais puiſque le fluide du Tourbillon a lui-même un mouvement, quoique 230 fois plus lent que celui de la Planète, qui ſe fait de même côté d'Occident en Orient, & dont j'ai démontré que l'effet eſt de la diriger inſenſiblement à prendre une conformité de direction commune dans le plan de l'équateur ſolaire, il eſt ſenſible que plus la Planète s'écarte de cette direction à cauſe de l'inégalité de preſſion qu'elle rencontre par devant, plus auſſi ſera-t-elle obligée par cette autre cauſe, de regagner le deſſus, & de ſe raprocher de l'équateur du Tourbillon.

La premiere de ces deux cauſes, qui dépend de l'inclinaiſon de l'axe *BA* de la Planète ſur la direction de ſa route, va en augmentant depuis le moment que les angles *BCG*, *BCO* ſont devenus droits, juſqu'à ce qu'ils deviennent le plus inégaux qu'ils peuvent, l'un devenant le plus obtus & l'autre le plus aigu, autant que l'autre cauſe, qui cherche à redreſſer la dérive, le leur permet; c'eſt-à-dire, depuis le nœud juſqu'à la limite de la Planéte, ou depuis l'interſection de l'équateur & de l'orbite juſqu'au point de leur plus grand éloignement.

Ce point paſſé, le parallèliſme de l'axe *BA* fait que les angles *BCG*, *BCO* ſe raprochent chacun de l'angle droit, par où il arrive que l'inégalité de preſſion du fluide contre les deux parties *VBM*, *VES* diminue, pendant que l'autre action tend continuellement à remettre la Planète ſur la direction du fluide; elle ſera donc repouſſée en chemin faiſant vers le plan de l'équateur ſolaire, qu'elle traverſera dans le nœud oppoſé où derechef l'axe *BA* eſt perpendiculaire à la direction du mouvement de la Planète ſur ſon orbite; par conſéquent nulle inégalité d'impreſſion du fluide contre les deux parties *VBM*, *VES*.

Après que la Planète a paſſé ce nœud oppoſé, il eſt auſſi ſenſible qu'elle continuëra l'autre moitié de ſa route de la même maniere & ſuivant la même loi, qu'elle a fait la premiere: enſorte que l'une s'écartant, ou faiſant ſa dérive vers le pole auſtral, ſelon l'eſpece du ſphéroïde, l'autre la fera néceſſairement vers le pole boreal; parce qu'après un demi-tour de révolution, les parties de la ſurface expoſées aux impreſſions du fluide

Digitized by Google

de changent de ſituation : celle qui en recevoit le plus, ayant été d'un côté par raport à la direction du fluide, ſera celle qui en recevra le moins, & réciproquement.

LXXXIII.

Voilà les deux cauſes contraires l'une à l'autre, qui doivent regler la ſituation du plan de l'orbite, & lui donner une certaine inclinaiſon par raport au plan de l'équateur ſolaire. Et comme la quantité de la *dérive* (il me ſera permis d'apeller ainſi la déviation cauſée par l'oppoſition du fluide, ſemblable à celle de l'eau contre le vaiſſeau) dépend entierement, en partie de la figure du ſphéroïde plus ou moins differente de l'uniformité d'une ſphére, & en partie de la plus ou moins grande obliquité de l'axe du mouvement diurne ſur le plan de l'orbite ; puiſqu'il ne ſe feroit point de dérive, comme nous l'avons déja dit, ſi cet axe étoit perpendiculairement érigé ſur ce plan, quand même le ſphéroïde differeroit beaucoup de la ſphéricité parfaite : comme donc, dis-je, ces deux circonſtances, la figure du ſphéroïde & la poſition de l'axe, ſont ſans doute différentes dans les différentes Planètes, il ne faudra plus demander pourquoi les inclinaiſons des orbites ſont différentes entr'elles ; car chacune des Planètes étant dans un état particulier par raport à ces deux circonſtances, il eſt évident que l'inclinaiſon de ſon orbite lui doit être auſſi particuliere, je veux dire, différente des autres ; il ſeroit donc inutile d'expliquer plus amplement la cauſe de ce phénomène.

Cependant, pour dire encore quelque choſe ſur la quantité de l'inclinaiſon des orbites ; nous avons vû que la réſiſtance qu'opoſe le fluide du Tourbillon au mouvement des corps céleſtes eſt ſi inſenſible, que leur viteſſe n'en ſouffre aucune diminution perceptible, peut-être pas même pendant toute la durée du Monde : Nous avons vû pareillement, que le mouvement circulant du Tourbillon, avec une viteſſe 230 fois plus petite que celle de la Planète dans la région où elle ſe trouve, ne peut

non

non plus ni accelerer ni retarder la viteſſe qu'elle doit acquerir dans les differents endroits de ſon orbite elliptique, en vertu de la regle de KEPLER, mais que tout ce que le Tourbillon circulant peut produire, c'eſt de diriger peu à peu le mouvement progreſſif des Planètes à prendre ſa direction commune d'Occident en Orient.

Ainſi réflechiſſant ſur la foibleſſe des deux cauſes que je viens d'expliquer, qui concourent à déterminer les inclinaiſons des orbites, & qui influent ſeulement ſur les directions & non point ſur les viteſſes; il eſt très-probable, que l'inclinaiſon de chaque orbite n'a pas été produite dès la premiere révolution, mais qu'il a fallu un grand nombre de révolutions, avant que l'inclinaiſon ſoit parvenuë à ſa quantité fixe & permanente, telle qu'on l'obſerve aujourd'hui.

LXXXIV.

Une autre circonſtance digne d'attention, c'eſt que l'orbite étant une Ellipſe, qui a le Soleil dans un de ſes foyers, duquel toutes les ligne droites tirées aux points de la circonference, excepté les deux apſides, font des angles obliques avec les tangentes, il eſt clair, que pendant le temps que la Planète eſt à monter, depuis le perihèlie juſqu'à l'aphèlie, la direction du fluide du Tourbillon contre la ſurface anterieure de la Planète, fait un angle obtus avec la ligne de la diſtance au Soleil, & que cet angle devient aigu dès qu'elle a paſſé l'aphèlie juſqu'à ſon retour au perihèlie.

Mais comme les orbes elliptiques aprochent beaucoup des cercles véritables, ces angles obtus & aigus ne différent que très-peu des angles droits; d'où on doit conclurre que les deux points de l'orbite où ſe fait l'équilibre de l'impreſſion du fluide ſur la Planète, c'eſt-à-dire, les deux nœuds, ne ſe trouvent pas exactement dans les deux points ſolſtitiaux, mais toûjours fort près: en ſorte que l'on peut être aſſûré, que les Planètes arrivent à leurs ſolſtices, ou un peu avant, ou un peu après qu'elles paſſent par les nœuds.

LXXXV.

Digitized by Google

LXXXV.

Au moins cela ſe vérifie très-bien par l'obſervation faite du nœud boreal de l'orbite de la Terre par raport à l'équateur du Soleil, qui ſe trouve, le Soleil étant dans le 8e. degré de ♊, éloigné du ſolſtice d'été ſeulement de 22 degrés. Il ſeroit à ſouhaiter que Mrs. les Obſervateurs priſſent la peine de déterminer les lieux des ſolſtices des autres Planètes, comme ils ont fait ceux des nœuds ſur l'équateur ſolaire, pour voir ſi dans chacune des Planètes les nœuds & les points ſolſtitiaux ne ſe ſuivent pas de bien près: une telle obſervation donneroit un grand poids à ma conjecture ſur la véritable cauſe de l'inclinaiſon des orbites planètaires, ſupoſé que pour chaque Planète on trouve une proximité conſtante entre ces deux points; il faudroit, par exemple, que Mars paſſant par ſon nœud qui eſt entre le 14e. & le 15e. degré de ♊, ne fût pas bien loin de ſon ſolſtice, ſoit qu'il l'eût déja paſſé, ou qu'il fût près de le paſſer.

LXXXVI.

A cette occaſion je ne dois pas paſſer ſous ſilence une des plus importantes utilités qu'on retireroit de mon ſyſtème, s'il avoit le bonheur d'être agréé: cette utilité conſiſteroit en ce qu'on ſeroit en état de décider la fameuſe queſtion ſur la véritable figure de la Terre, ſi elle eſt un ſphéroïde allongé ou applati. Les ſentiments des Philoſophes de nôtre temps, touchant cette queſtion, ſont partagés depuis 40 ou 50 ans. On allegue de part & d'autre des preuves ſolides: Mrs. HUGUENS, NEWTON & pluſieurs grands Géométres qui les ſuivent, prétendent que la diminution de la peſanteur des corps terreſtres vers l'équateur de la Terre, cauſée par la force centrifuge de ces corps, qui réſulte du mouvement journalier de la Terre, laquelle force eſt plus grande dans ces endroits que dans les lieux plus proches des poles, eſt un argument invincible que la Terre eſt plus élevée vers l'équateur que vers les poles; à quoi ils adjoûtent l'ex-

Digitized by Google

périence de l'accourciſſement des pendules à ſecondes, qu'il faut leur donner dans les pays voiſins de l'équateur, marque évidente, à ce qu'ils penſent, d'une plus grande diminution de peſanteur.

D'autres grands Hommes ſoûtiennent le contraire, ſe fondant principalement ſur la meſure actuelle de la Terre, faite en différents endroits & en divers pays, avec toute l'exactitude poſſible; l'expérience ayant conſtamment montré que les degrés d'un même méridien avoient plus de longueur dans les lieux de moindre latitude que dans les plus ſeptentrionaux, & que leur longueur diminuoit, à meſure qu'on aprochoit du pole. Ce qui eſt une preuve géométriquement certaine, que le méridien a la forme d'une Ellipſe, dont le grand axe paſſe par les poles de la Terre, & que par conſéquent la figure de la Terre eſt un ſphéroïde oblong.

On ne ſauroit preſque douter de l'exactitude avec laquelle ces meſures ont été priſes en France, ſi on lit les Ouvrages qu'on en a publiés, & qu'on réflechiſſe ſur les ſoins & les précautions extraordinaires employées dans ce pénible travail. La piece que M. CASSINI a donnée ſur la figure de la Terre dans les Mémoires de 1713, pag. 188, mérite une attention particuliere, par la ſolidité de ſes raiſonnements, pour établir le ſphéroïde allongé; & il ne ſemble pas que cet illuſtre Auteur ait été ébranlé dans ſon ſentiment par la ſeconde édition des *Principes Phil.* de M. NEWTON, qui parut la même année 1713, où M. NEWTON ne perſiſte pas ſeulement dans ſon opinion contraire, fondée ſur l'inégalité des pendules à ſecondes, mais il donne encore, pag. 383, une liſte (qu'on ne trouve point dans la premiere édition,) de la meſure d'un degré pris conſécutivement ſur le méridien, par où il prétend faire voir que leurs longueurs vont en augmentant depuis l'équateur juſqu'au pole; comme ſi c'étoit une affaire décidée, que l'accourciſſement des pendules fût une marque infaillible que les parties de la Terre ſont plus élevées vers l'équateur que vers les poles, au lieu qu'on n'en peut conclurre autre choſe, tout au plus, ſinon que la Terre eſt un ſphéroïde moins allon-

Digitized by Google

allongé, qu'elle ne le ſeroit ſi elle étoit encore dans ſon état primitif; cela veut dire, ſans le mouvement diurne: ce que M. DE MAIRAN a très-bien expliqué dans ſes excellentes Recherches géométriques ſur la diminution des degrés en allant de l'équateur vers les poles: *Voyez les Mém. de l'Acad. de* 1720, *pag.* 231.

LXXXVII.

Enfin M. CASSINI, bien-loin de changer de ſentiment après la ſeconde édition de l'ouvrage de M. NEWTON, nous a donné une nouvelle diſſertation dans les Mémoires de 1718, p. 245, où non ſeulement il confirme ce qu'il avoit avancé touchant la figure oblongue de la Terre, & la préciſion extraordinaire avec laquelle fut priſe la meſure des degrés du Méridien, mais il pouſſe l'exactitude juſqu'à déterminer en toiſes l'axe de la Terre, le diamétre de l'équateur & l'intervalle des deux foyers de l'Ellipſe generatrice du ſphéroïde allongé. *V. p.* 255.

Or ce grand Aſtronome, qui lui-même s'étoit employé à ce travail, de concert avec Mrs. MARALDI & DE LA HIRE, également habiles dans l'art d'obſerver, auroit-il bien avancé avec tant d'aſſûrance un fait, s'il n'en avoit pas été convaincu par des opérations réïtérées & vérifiées par un grand nombre d'autres?

Un ſurcroît de preuve ſe tire préſentement de ma Théorie, qui décide en faveur du Sphéroïde allongé: car de ce que j'ai démontré aux §§. LXXIX, LXXX, il ſuit néceſſairement que quand on obſerve qu'une Planète dans le temps de ſon ſolſtice d'été eſt aux environs de ſon nœud aſcendant, il faut que cette Planète ait la figure d'un ſphéroïde oblong; mais parmi grand nombre d'obſervations que le même M. CASSINI, diligent obſervateur tant pour le Ciel que pour la Terre, a faites avec une aſſiduité infatigable, pour déterminer le mouvement des taches du Soleil, il s'en trouve une dans les Mémoires de 1703 p. 109, & les ſuites dans les pages ſuivantes, où la deſcription exacte de deux taches qui parcouroient à peu-près le même pa-

rallele ſur le diſque du Soleil, & peu éloigné de ſon équateur; eſt entierement conforme à ma penſée; car il n'y a qu'à jetter les yeux ſur la Figure que l'obſervateur a fait graver pour tracer la route qu'ont tenuë ces deux taches, depuis le 24 Mai 1703 juſqu'au 3 Juin ſuivant.

Cette route étant ſenſiblement une ligne droite, ſi on conçoit une parallele tirée par le centre du diſque, cette parallele repréſentera l'équateur du Soleil, & il eſt viſible que du côté d'Occident elle ira au deſſous de l'écliptique marquée dans la Figure, faiſant enſemble un angle de 8 degrés, qui eſt l'inclinaiſon du plan de l'écliptique ou de l'orbite de la Terre ſur le plan de l'équateur ſolaire; de ſorte que l'interſection de ces deux lignes ſur le diſque, c'eſt-à-dire, de l'équateur & de l'écliptique, déſigne le nœud aſcendant de cette derniere par raport à l'équateur ſolaire. Par ce nœud, ſi par la penſée on tire du centre du Soleil une ligne droite juſqu'à l'orbite terreſtre, le point où cette droite la rencontre ſera le nœud aſcendant de la Terre.

C'eſt donc par le nœud aſcendant ou boreal que la Terre paſſa le 28 Mai 1703, jour marqué par M. CASSINI, p. 112, pour le paſſage de la tache par le milieu de ſon parallele, le Soleil étant alors dans le 8me degré de II, c'eſt-à-dire, 22 degrés ou à peu-près autant de jours avant le ſolſtice d'été.

D'où je dois inferer, ſuivant ma théorie, que la figure de la Terre eſt à la vérité celle d'un ſphéroïde allongé, conformément au réſultat des obſervations faites en France par des meſures actuelles. Je me flatte que cette conformité ne déplaira pas à Mrs. les obſervateurs, d'autant qu'elle détruit le ſoupçon de quelque inexactitude gliſſée dans leurs operations, prétexte unique de ceux qui ſont pour le ſphéroïde aplati de la Terre.

LXXXVIII.

Pour faire comprendre plus diſtinctement les differents effets que produit l'oppoſition du fluide du Tourbillon ſur les ſphéroïdes des deux differentes eſpèces; je tâcherai de mettre clairement de-

devant les yeux tout ce que j'ai démontré ci-deſſus par les Figures 2 & 3. J'employerai pour cela deux nouvelles Figures qui repréſenteront, pour l'un & l'autre ſphéroïde, ce qui lui doit arriver dans ſon cours, pendant une révolution entiere autour du Soleil. Je ſupoſerai, pour ſubvenir à l'imagination, que l'orbite eſt circulaire, & que le Soleil eſt dans le centre; car il ne s'agit ici que d'expoſer à la vûë comment ſe fait l'inclinaiſon des plans des Orbites par raport au plan de l'équateur ſolaire.

LXXXIX.

Soit le centre du Soleil *S*, l'équateur du Tourbillon *EFHG* concentrique, & dans un même plan avec l'équateur de la révolution du Soleil autour de ſon axe *BSA*, qui eſt perpendiculaire au plan de ces deux équateurs; *B* le pole boreal ou ſuperieur du Soleil; *A* le pole auſtral ou inferieur. Concevant qu'une Planète, par exemple la Terre, ſe trouve d'abord ſur l'équateur du Tourbillon dans le point du ſolſtice d'été *E*, & qu'elle ſoit déterminée à ſe mouvoir autour du Soleil, nous comprendrons aiſément, par ce qui a été expliqué ci-deſſus, que la Terre décriroit parfaitement l'équateur du Tourbillon, je veux dire que cet équateur & l'orbite de la Terre ſeroient un même cercle, ſi la figure du Globe tereſtre étoit parfaitement ſphérique, parce que l'uniformité de cette figure n'admettroit aucune cauſe exterieure, qui pût détourner la Terre de ſa route une fois commencée, de même qu'un Vaiſſeau ſphérique ſur mer étant pouſſé ſuivant une certaine direction, ira toûjours dans la même direction, ſans ſouffrir la moindre dérive. TAB. L. *Fig.* 4. & 5.

Mais la Terre ayant la figure de ſphéroïde, il eſt ſenſible que pendant ſa révolution autour du Soleil, elle préſente à l'oppoſition de la matiere du Tourbillon une moitié de ſa ſurface, qui change continuellement de poſition, & partant auſſi de figure par raport à la direction, à cauſe que l'axe de rotation de la Terre *ba* conſerve ſon parallèliſme, pendant que les directions du fluide oppoſé changent à tout moment de ſituation, puiſque ces

directions ne ſont autre choſe que les tangentes de l'orbite. Ainſi les changements de direction cauſent l'inégalité de l'action du fluide ſur la ſurface antérieure de la Terre.

Cette ſurface eſt partagée en deux parties inégales, l'une au-deſſus du point le plus avancé *V* (Voyez fig. 2 & 3) l'autre au-deſſous; ce qui cauſe de part & d'autre des impreſſions de forces inégales, qui font écarter la Terre, en forme de dérive, de la route qu'elle tiendroit, ſi elle étoit parfaitement ronde; c'eſt pour cela qu'elle quittera l'équateur du Tourbillon pour décrire un autre grand cercle, dont voici les conditions.

X C.

TAB. L. *Fig.* 4. Conſiderons en premier lieu la Terre comme un ſphéroïde aplati, & ſupoſons la placée dans le point *E*. D'abord il eſt clair que dans cette ſituation l'axe de rotation de la Terre *ba*, & l'axe de révolution du Soleil *BA*, étant prolongés, ſe rencontreront dans la partie ſuperieure en *G*, & formeront le triangle rectangle *GSE*, dont l'angle *SGE* eſt de 23°. 30′, meſure de la plus grande déclinaiſon du Soleil. Il eſt clair auſſi, que le plan du triangle *GSE* eſt perpendiculaire ſur le plan de l'équateur du Tourbillon; d'où il ſuit, que s'imaginant tirée *Ee* tangente de l'équateur du Tourbillon en *E*, cette tangente ſera perpendiculaire à *EG*, & fera par conſéquent avec l'axe de rotation *ba*, deux angles droits *eEb*, *eEa*.

Ainſi le fluide du Tourbillon s'opoſant également à la partie boreale & auſtrale de la ſurface qui ſe préſente à ſa direction, l'équilibre du mouvement ſur l'équateur ſe maintiendroit parfaitement, & la Terre n'en ſortiroit jamais, ſi l'angle *eEb* demeuroit toûjours droit. Mais comme l'axe de la Terre *ba* conſerve ſenſiblement ſa ſituation parallèle, on voit que dès qu'elle part du point ſolſtitial d'été *E*, pour aller vers *F*, cet angle *eEb* diminuë de plus en plus, juſqu'à ce qu'elle ſoit parvenuë dans ſon point équinoxial de l'automne, où l'angle fait par l'axe de la Terre & la ligne de direction, ſera le plus petit ou le plus

Digitized by Google

plus aigu : D'où, en vertu de ce que nous avons démontré ci-deſſus (§. LXXVII) pour le ſphéroïde apiati, il faut que l'oppoſition du fluide ſur la partie boreale de la ſurface, ſoit la prévalente, ce qui fera dériver la Terre vers le pole auſtral du Tourbillon ; enſorte qu'après le premier quartier de ſa révolution, au lieu de ſe trouver en *F*, elle ſe trouvera en *L*, où l'angle *fLb* fait par la direction *fL* & l'axe *Lb* eſt le plus aigu.

Mais comme depuis l'endroit *L* cet angle recommence de croître, en devenant ſucceſſivement moins aigu juſqu'en *H*, qui eſt le point du ſolſtice d'hyver, où l'axe de rotation de la Terre *ba* prolongé rencontre l'axe du Tourbillon en *α*, & où par conſéquent la direction *hH* redevient perpendiculaire à l'axe *bα*. C'eſt pourquoi pendant le temps que la Terre eſt à parcourir le ſecond quartier de ſa révolution *LH*, l'avantage de l'action du fluide ſur la partie ſuperieure de la ſurface du ſphéroïde aplati diminuë juſqu'à ſon entiere extinction au point *H*, où l'action ſur la ſuperieure & l'inferieure eſt dans ſon équilibre parfait, parce que le fluide s'opoſe à l'une & à l'autre d'une maniere égale & ſemblable.

Mais puiſque l'autre action du Tourbillon, entant qu'il ne ceſſe de circuler continuellement d'Occident en Orient, pourſuit toûjours la Terre, & tend à la remettre dans ſa direction commune, comme nous l'avons expliqué ci-deſſus tout au long, il eſt viſible qu'après qu'elle a paſſé le point *L*, où elle a ſouffert ſa plus grande dérive, elle doit ſe raprocher enſuite de l'équateur du Tourbillon, de la même maniere qu'elle s'en étoit écartée en parcourant le premier quartier.

XCI.

Il ne reſte donc plus qu'à conſiderer la route que doit prendre la Terre, en parcourant les deux autres quartiers de ſon orbite. Or il eſt d'abord manifeſte que tout ſe fait ici à rebours, c'eſt-à-dire que l'angle *hHb*, de droit qu'il étoit, commence à devenir obtus, dès que la Terre part du point ſolſtitial d'hyver *H*,

&

& que cet angle augmente juſqu'au point *M*, où l'angle *gMb* eſt le plus obtus qu'il eſt poſſible ; depuis *M* cet angle décroit juſqu'en *E*, où il redevient droit.

Ainſi en apliquant nôtre raiſonnement de l'article precedent à la circonſtance preſente, on verra par le §. LXXVIII, que l'oppoſition du fluide ayant ici l'avantage du côté de la ſurface inferieure de la Terre, la dérive ſe doit faire vers le pole ſuperieur ; donc les deux derniers quartiers *HM*, *ME*, ſe formeront de la même maniere que les deux premiers *EL*, *LH*, par raport à leur figure, mais avec differentes poſitions par raport au plan de l'équateur *EFHG*, en ce que la premiere moitié de l'orbite *ELH* s'écarte de ce plan vers le pole auſtral, autant que la ſeconde s'en écarte vers le pole boreal ; ſi bien que le plan de l'orbite doit couper néceſſairement le plan de l'équateur, qui eſt auſſi celui du Soleil, ſelon nôtre théorie, dans la ligne *EH* qui paſſe par le centre de cet aſtre *S*.

Tout ce qui pourroit faire quelque peine, ce ſeroit de ſavoir pourquoi l'orbite entiere *ELHM*, formée ainſi par les dérives, eſt juſtement ſur un plan, pouvant être, à ce qu'il ſemble, une courbe à double courbure ; mais on levera cette difficulté, ſi on ſe ſouvient de ce que nous avons expliqué ci-deſſus, touchant la difference qu'il y a entre la force qui produit du mouvement dans un corps, & celle qui en change ſeulement la direction, où il a été démontré que la moindre opoſition, ou une force inſenſible, eſt déja capable de changer peu à peu la direction d'un corps mis en mouvement par une force très-grande, ſans pourtant que la courbe, que ce corps eſt obligé de décrire par l'action de cette grande force, change de nature. Ici il en eſt de même : la figure des orbites eſt cauſée par la gravitation des Planètes vers le Soleil, contre-balancée par les forces centrifuges, & cette gravitation a pour cauſe la force du Torrent central, qui eſt une force très-grande, par raport à laquelle l'opoſition du fluide contre le mouvement des Planètes eſt une force comme infiniment petite, qui n'en change que la direction, c'eſt-à-dire qui a cauſé inſenſiblement leur dérive, laiſſant

Digitized by Google

ſant pour le reſte aux orbites leur figure, & aux Planètes leur viteſſe, telle qu'elles auroient ſi elles ſe mouvoient dans un grand vuide, comme le ſupoſe M. NEWTON: mais on démontre géométriquement, que la gravitation, dirigée toûjours vers le Soleil, fait que chaque orbite eſt ſur un plan, qui paſſe par le centre du Soleil; elle le ſera donc encore après qu'il lui ſera ſurvenu la dérive reglée & permanente, par où l'orbite ne perd rien de ſa figure, mais change ſeulement de poſition, paſſant du plan de l'équateur du Tourbillon ſur un autre plan qui coupe le premier, comme je l'ai dit, dans le centre du Soleil, ſous un angle *FSL* ou *GSM*, meſure de l'inclinaiſon plus ou moins grande, ſelon qu'éxige le ſphéroïde plus ou moins applati.

XCII.

Quelque petit que ſoit cet angle, même pour l'orbite de la Terre, qui eſt celle de toutes les orbites qui a la plus grande inclinaiſon, ſavoir de $7\frac{1}{2}$ degrés, il ne faut pourtant pas croire que cette inclinaiſon ait été acquiſe dès la premiere révolution de la Terre autour du Soleil; car cela marqueroit un effet trop ſenſible pour une cauſe ſi foible, telle que nous avons ſuppoſé être la force de l'oppoſition du fluide, incapable d'alterer ou de retarder la viteſſe des Planètes, mais capable ſeulement d'en changer, par la longueur du temps, les directions comme nous l'avons inſinué pluſieurs fois.

Rien ne nous empêche donc de concevoir que l'inclinaiſon des orbites ait été produite, en naiſſant inſenſiblement, & en prenant à chaque révolution un nouveau petit degré de dérive, juſqu'à parvenir, après un grand nombre de révolutions, à l'inclinaiſon totale que l'on obſerve aujourd'hui dans les orbites, & qui eſt permanente, ſans pouvoir prendre de nouvelles augmentations, étant empêchée par le mouvement du Tourbillon d'Occident en Orient, qui s'efforce ſans ceſſe de rendre aux Planètes la direction commune dans le plan de ſon équateur, comme nous l'avons expliqué aſſés amplement.

Digitized by Google

C'eſt-là le cours ordinaire des effets de la Nature, qui ne produit rien ſubitement, mais par ſucceſſion de degré en degré, quoique tantôt plus tantôt moins vite, ſelon l'intenſité de la force qu'elle employe, & la diverſité des circonſtances.

XCIII.

TAB. L. Fig. 5. Après tout cela, on voit que ſi la Terre avoit véritablement la figure de ſphéroïde aplati, le point *E* du ſolſtice d'eſté ſeroit le nœud deſcendant, & ſon oppoſé le nœud aſcendant. Mais en donnant à la Terre la figure de ſphéroïde allongé, il n'y a qu'à accommoder à cette hypothèſe le raiſonnment que nous avons fait juſqu'ici depuis §. XC, & on trouvera un effet entierement contraire par raport à la nature des nœuds.

Car on s'aperçoit clairement (§. LXXIX.) que la Terre étant dans ſon ſolſtice d'été *E*, ou aux environs, ſa ſurface allongée vers les poles ſera la cauſe d'une dérive boreale, qu'elle ſubira en parcourant les deux premiers quartiers de ſon orbite *EL*, *LH*; comme réciproquement la dérive doit être auſtrale depuis environ le ſolſtice d'hyver *H*, en achevant de parcourir les deux derniers quartiers *HM*, *ME*; en ſorte que dans ce cas c'eſt le point *E* qui ſera le nœud aſcendant, & *H* le deſcendant.

Voilà donc déterminés, par notre raiſonnement, les nœuds pour le ſphéroïde allongé, à peu près comme l'expérience le confirme pour la Terre, fondée ſur les Obſervations alleguées de M. Cassini, qui aſſigne le nœud aſcendant vû du Soleil, au 8e. degré de ♐, & par conſéquent le deſcendant au 8e. degré de ♊, aſſés près des ſolſtices, qui ſeroient peut-être préciſément dans les ſolſtices mêmes, ſi l'action du fluide du Tourbillon ſolaire ſur la ſurface de la Terre n'étoit pas troublée un peu par ſon propre Tourbillon, qui intercepte en partie cette action, & par d'autres cauſes accidentelles & particulieres, dont nous avons fait mention ci-devant.

Après cette heureuſe conformité de nôtre théorie, avec les obſervations céleſtes, peut-on plus long-temps refuſer à la Terre la figu-

XLVI.

Fig. 4.

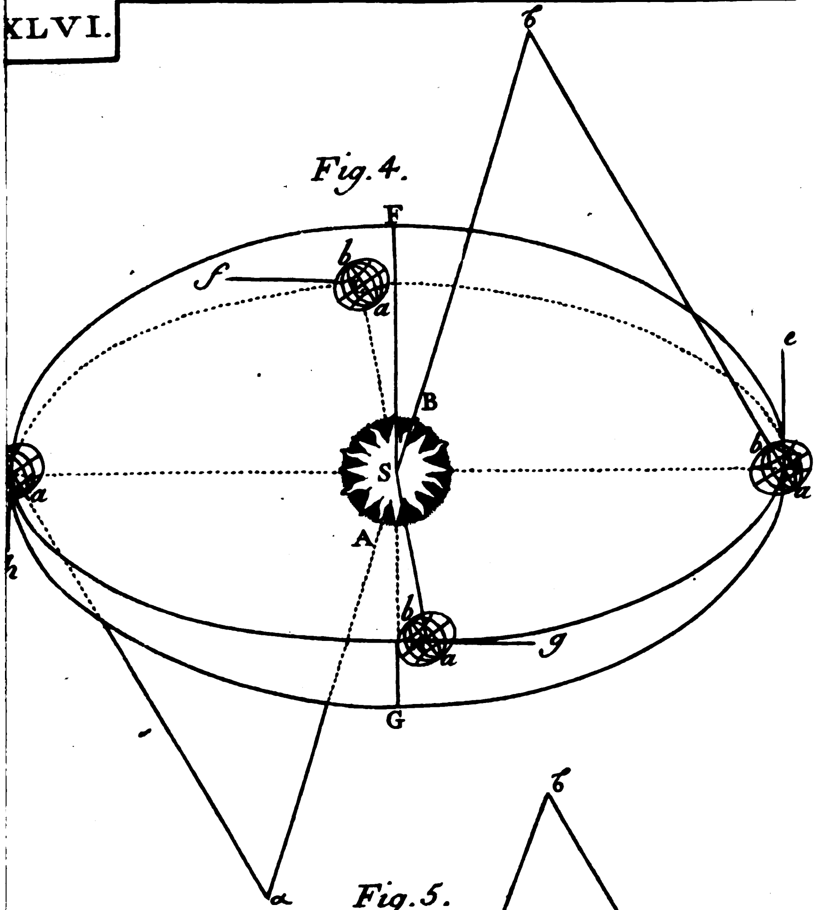
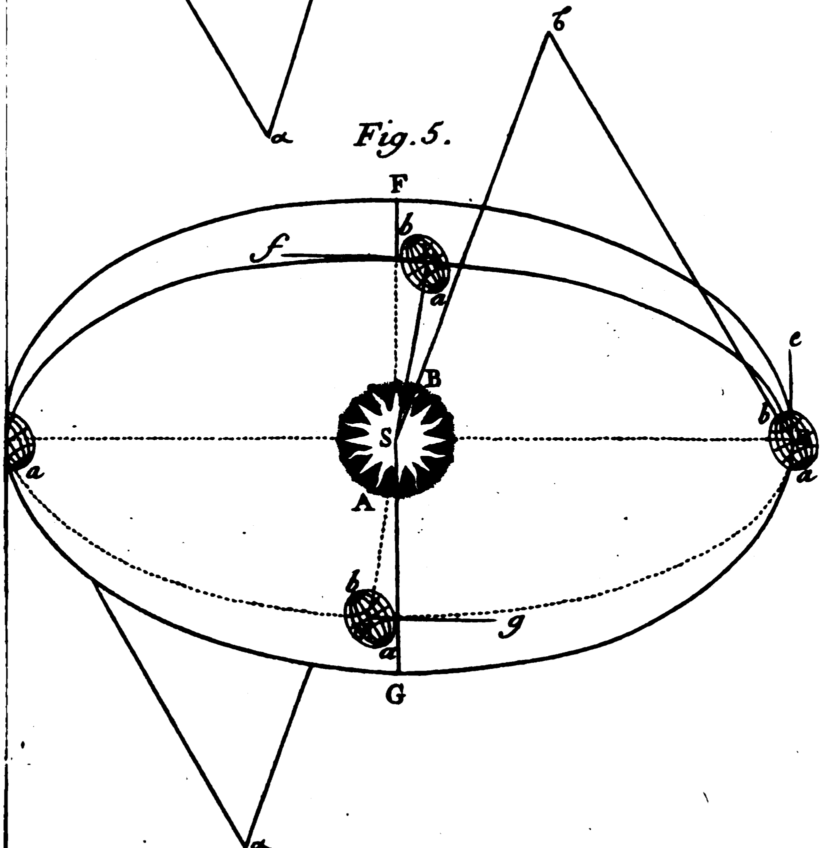


Fig. 5.



Digitized by Google

Digitized by Google

figure de ſphéroïde oblong, fondé d'ailleurs ſur la dimenſion des degrés de la méridienne, entrepriſe & exécutée par le même M. CASSINI, avec une exactitude inconcevable ?

XCIV.

Le parallèliſme de l'axe de rotation des Planètes étant ſupoſé être conſtant & parfait, il eſt viſible que les nœuds de leurs orbites, ou leurs interſections avec l'équateur du Tourbillon, ſeroient entierement immobiles, & répondroient toûjours aux mêmes endroits du firmament par raport au Soleil; mais le parallèlliſme eſt ſujet à une variation, quoique très-petite, qui ne ſe fait ſentir qu'après un grand nombre de révolutions. Il eſt facile d'en rendre raiſon par nôtre théorie: car la Planète, par exemple nôtre Terre, circulant autour des poles de l'écliptique avec ſa propre viteſſe, pendant que le fluide du grand Tourbillon circule de même côté, mais autour des poles de l'équateur ſolaire, & avec une viteſſe 230 fois plus petite; c'eſt comme ſi un globe, flotant dans une eau calme, étoit obligé par une force extérieure de ſe mouvoir d'Occident en Orient, autour d'un centre pris à quelque diſtance hors du globe. Or il eſt aiſé de concevoir que la réſiſtance de l'eau, exercée ſur la ſurface anterieure du globe, ſe fera en ſens contraire d'Orient en Occident, & que cette réſiſtance agit plus fortement contre l'hémiſphère le plus éloigné du centre de circulation, que contre le plus proche, parce que celui-là, faiſant un plus grand chemin en circulant que celui-ci, frape l'eau avec plus de viteſſe; le globe ſera donc déterminé à pirouetter ſur lui-même à contre-ſens de ſon mouvement progreſſif, c'eſt-à-dire, d'Orient en Occident, autour d'un axe perpendiculaire ſur le plan de la circulation.

On en pourroit faire l'expérience ſemblable à celle que M. POLENI a faite, mais dans un autre deſſein, voulant démontrer que le mouvement diurne des Planètes ne peut pas être cauſé par le mouvement du grand Tourbillon, pris à la façon

de DESCARTES. *Voyés* POLENI *de Vorticibus Cœleſt.* p. 72 & 73. De-là il devient clair, comme quoi la Terre, repréſentée par ce globe, pendant qu'elle fait ſa révolution annuelle, doit tourner ſur elle-même contre l'ordre des ſignes, autour d'un axe perpendiculaire au plan de ſon orbite; par conſéquent auſſi l'axe oblique du mouvement diurne tournera lui-même ſur cet axe perpendiculaire; d'où il ſuit que les poles de l'équateur terreſtre paroitront décrire de petits cercles autour des poles de l'écliptique, dans la direction d'Orient en Occident.

X C V.

C'eſt de ce troiſiéme mouvement de la Terre, que dépend (comme il eſt très-facile de le comprendre) le reculement des interſections de l'équateur & de l'écliptique, que l'on nomme, dans le Syſtème de COPERNIC, *Préceſſion des équinoxes*, parce que ces deux points reculent continuellement ſur l'écliptique vers les ſignes précédents, ce qui produit dans les étoiles fixes & dans tous les points immobiles du Ciel, un mouvement aparent contraire d'Occident en Orient autour des poles de l'écliptique.

C'eſt donc ainſi que le parallèliſme de l'axe de rotation diurne de la Terre, & de toutes les Planètes qui ont cet axe oblique ſur le plan de leurs orbites, ne ſe conſerve pas exactement; mais puiſque la réſiſtance du fluide du grand Tourbillon, ſelon ce que nous avons démontré, doit être extrêmement foible, il faut que la variation de ce parallèliſme ſoit auſſi très-inſenſible, & que le mouvement aparent qui en réſulte dans les fixes ſoit très-lent. Comme en effet les étoiles fixes, vûës de la Terre, n'avancent dans leur longitude que de 50 ſecondes par an, ce qui demanderoit un temps de 25920 années pour une révolution entiere du Firmament.

Une autre choſe à laquelle on n'a pas encore aſſés penſé, c'eſt peut-être que les poles de ce mouvement ſi tardif ne ſe trouvent pas préciſement dans les poles de l'écliptique, comme on l'a cru juſqu'ici; en voici ma raiſon: il eſt vrai que la réſiſtance du fluide

eſt

Digitized by Google

eſt directement opoſéé à la direction du mouvement annuel, qui ſe fait ſur le plan de l'écliptique, & qu'à cet égard, ſi la réſiſtance agiſſoit ſeule contre le mouvement, ce qui arriveroit ſi le fluide du Tourbillon étoit tout-à-fait calme & en repos, il ne faut pas douter que le troiſiéme mouvement de la Terre, dont il eſt ici queſtion, ne ſe feroit exactement autour de l'axe perpendiculaire au plan de l'écliptique : mais le fluide du grand Tourbillon ayant lui-même ſon mouvement circulant, ſuivant la direction de l'équateur ſolaire, differente un peu de la direction de la réſiſtance ; il eſt certain que de ces deux actions compliquées il réſulte une direction moyenne, quoique beaucoup plus aprochante de celle de l'écliptique, comme de la plus forte, que de celle de l'équateur ſolaire : d'où on peut raiſonnablement conclurre, que l'axe du troiſiéme mouvement eſt tant ſoit peu oblique ſur le plan de l'écliptique ; or cette obliquité doit auſſi cauſer néceſſairement une petite variation aparente dans les latitudes des Fixes, mais incomparablement moins ſenſible que celles qu'on remarque dans leurs longitudes.

XCVI.

Cette variation de latitude paroît paradoxe à la plûpart des Aſtronomes, qui ne ſe mettent pas toûjours en peine des cauſes phyſiques, contents de ce qu'ils croyent ſavoir par obſervation. Cependant pluſieurs des plus fameux Aſtronomes, comme *Tycho* BRAHE lui-même, & KEPLER qui cite l'autorité du premier, favoriſent le changement de latitude des étoiles fixes : *Si comparetur* (dit KEPLER Epiſt. Aſtron. pag. 724) *Ecliptica (id eſt orbita Telluris ſub fixis) ſecum ipſa, ſecundum diverſa ſacula, deprehendit ſane* BRAHEUS *ex mutatis fixarum latitudinibus Eclipticam hodiernam conceſſiſſe ad latera Ecliptica priſtina.* Mais ſelon mon explication, il falloit dire que le mouvement aparent des fixes d'Occident en Orient ſe fait autour des poles, qui ne ſont pas préciſément dans les poles de l'écliptique, (c'eſt-à-dire, de l'orbite de la Terre,) car de cette maniere on conçoit la petite

variation de latitude, ſans qu'il ſoit beſoin que le plan de l'orbite change de place. Le plus ſimple, dans l'explication des cauſes de la Nature, eſt toûjours préférable à ce qui a moins de ſimplicité.

XCVII.

Pour revenir maintenant aux nœuds des orbites avec l'équateur du Soleil, il faut dire, ſelon ma théorie, qu'ils ont auſſi un petit mouvement contre l'ordre des ſignes, & cela, à cauſe qu'ils ont une connexion eſſentielle, comme je l'ai fait voir, avec les points des ſolſtices; par conſéquent auſſi avec les équinoxiaux, qui en ſont éloignés de trois ſignes. En effet, il y a des Aſtronomes, qui donnent 51″ par an au mouvement retrograde des nœuds de l'orbite de la Terre avec l'équateur du Soleil, qui eſt à peu près la quantité de retrogradation annuelle des équinoxes; ce qui ſert de confirmation de la dépendance eſſentielle entre ces nœuds & les ſolſtices; choſe qui mérite d'être vérifiée ulterieurement par des obſervations exactes, afin de s'aſſurer que c'eſt un fait general, qui regarde toutes les Planètes principales; ce qui rendroit ma conjecture tout-à-fait certaine.

XCVIII.

Quoiqu'au reſte la déclinaiſon des limites, ou, ce qui revient au même, l'élevation des plans des orbites ſur le plan de l'équateur du Soleil, doive être conſtante & invariable, il pourra néanmoins arriver qu'on y appercevra avec le temps quelque petite variation, mais qui ne ſera qu'aparente; dont la cauſe doit être attribuée à ce changement inſenſible de latitude des étoiles fixes dont nous venons de parler. On rencontre dans l'Aſtronomie pratique une infinité d'autres minuties, qui réſultent des obſervations, que l'on prend ſouvent pour des réalités, quand ce ne ſont que de ſimples apparences, dont un ſyſtème phyſique general, quelque ſolide qu'il ſoit, n'eſt pas toûjours reſponſable.

XCIX.

XCIX.

Si je ne craignois d'être trop long dans cette quatrieme partie de mon Diſcours, où je me ſuis principalement attaché au ſujet de la queſtion, je pourrois m'étendre à d'autres phénomènes, qui ne ſont pas préciſément compris dans la queſtion, mais qui y ont beaucoup de raport; tel eſt, par exemple, le mouvement de la Lune autour de la Terre, où on pourroit demander pareillement, d'où vient que ce mouvement ne ſe fait pas dans le plan de l'équateur de la Terre; car ce que les orbites des Planètes principales ſont à l'égard de l'équateur du Soleil, l'orbite de la Lune & celles des autres Satellites le ſont par raport à l'équateur de leurs Planètes principales; & comme celles-ci ont le grand Tourbillon general pour guide de leur mouvement autour du Soleil, ainſi les Satellites ſont dirigés par les Tourbillons particuliers qui les envelopent, & qui environnent les Planètes principales dont ils ſont Satellites.

Je dis que les Satellites ſont *dirigés* par les Tourbillons particuliers, & non point entrainés, par la même raiſon que j'ai expoſée tout au long pour les Planètes principales; car les uns & les autres de ces corps ont, ſelon ma théorie, leur mouvement d'une impreſſion primitive, en ſorte que le fluide du Tourbillon n'y contribuë toûjours que la commune direction d'Occident en Orient.

C.

Cependant, s'il m'eſt permis de communiquer encore en peu de pages mes penſées, ſur ce qui peut être la cauſe phyſique, de ce que la circulation de la Lune autour de la Terre ne ſe fait pas ſelon le plan de l'équateur terreſtre; je penſe que cette cauſe eſt differente de celle qui fait l'inclinaiſon des orbites planètaires principales ſur l'équateur du Soleil. La difference conſiſte dans la diverſe façon du grand Tourbillon, & du Tourbillon particulier de la Terre; toutes les parties du premier font leurs circulations ſur des cercles paralleles au plan de l'équateur ſolaire, parce que, ſelon

ce

ce que j'ai établi, le mouvement du Tourbillon entier & de toutes ſes parties, tire ſon origine d'une même cauſe primitive, qui a commencé de faire tourner le Soleil ſur ſon axe; le Soleil & ſon Tourbillon ſont enſemble une maſſe fluide totale, & n'ont qu'un même plan pour leur équateur, que les Planètes principales ne quitteroient jamais, ſi leur figure étoit parfaitement ſphérique, ou que leur axe de rotation fût perpendiculaire ſur le plan de l'équateur ſolaire.

Mais il en eſt autrement d'un Tourbillon particulier, par exemple, de celui de la Terre; car enclavé comme il eſt dans le grand Tourbillon general, il n'a pas la liberté de tourner avec une égale facilité dans toutes les diſtances de ſes couches autour de l'axe de la Planète qu'il environne, ainſi qu'il le feroit s'il étoit déhors & indépendant du grand Tourbillon; mais il n'eſt pas mal aiſé de concevoir que les couches proches de l'extrémité du Tourbillon terreſtre, s'accommodent inſenſiblement au courant du grand Tourbillon, comme du plus fort, pendant que les couches intérieures & bien proches de la ſurface de la Terre conſervent la direction autour de ſon axe de rotation; c'eſt pourquoi les couches d'entre deux, participant de l'un & de l'autre de ces deux effets, auront chacune leur propre direction, les plus éloignées ſe conformant plus à la direction de l'écliptique, ou plûtôt de l'équateur du Soleil, & les moins éloignées à la direction de l'équateur de la Terre, ſelon la differente diſtance de chacune.

C I.

De-là nous voyons la raiſon pourquoi la Lune, quand même elle ſeroit ſupoſée parfaitement ſphérique, doit ſe tenir ſi près de l'écliptique, que ſon orbe n'incline ſur celle-ci que de 5 degrés, au lieu que l'équateur de la Terre fait avec l'écliptique un angle de 23 ½ degrés. C'eſt que le courant du fluide du Tourbillon de la Terre prend, ſans doute, dans la région de la Lune une direction que la Lune elle-même eſt obligée de prendre

Digitized by Google

dre ſur un plan bien moins élevé ſur l'écliptique que ſur l'équateur de la Terre ; marque certaine que la Lune elle-même eſt fort proche des confins du Tourbillon terreſtre.

Si la région de la Lune étoit beaucoup au-deſſous de celle qu'elle occupe preſentement, ou que le Tourbillon de la Terre s'étendit beaucoup au de-là des termes que lui a preſcrits la Nature, nous verrions peut-être que l'orbe de la Lune ſeroit tout-à-fait ſur le plan de l'équateur terreſtre, ou en déclineroit fort peu.

C I I.

Ma conjecture ſe fortifie conſiderablement par ce qu'on a obſervé ſur les 5 Satellites de Saturne : c'eſt que les orbes ou les cercles des quatre premiers ſe trouvent tous ſur un même plan qui eſt auſſi le plan de ſon anneau ; cette uniformité ne laiſſe pas douter un moment, que ce plan ne ſoit auſſi exactement le plan de l'équateur de Saturne. Or le 5me. Satellite (qui a ſa diſtance au centre de Saturne trois fois plus grande que celle du 4me.) circule ſur un orbe ; dont le plan décline beaucoup de celui des 4 premiers & de l'anneau, & s'éloigne moins de l'orbite de Saturne, que ne fait le plan commun de ceux-ci, puiſque ſelon la ſuputation de M. CASSINI (*Voyez les Mém. de* 1717, *p.* 153 *&* 155) l'inclinaiſon véritable du cercle du 5me. Satellite par raport à l'orbite de Saturne eſt de 13° 8′, & l'inclinaiſon véritables des cercles des 4 autres Satellites & du plan de l'anneau avec l'orbite de Saturne eſt de 31° conformément à ce que donne M. HUGUENS pour l'obliquité de l'axe de Saturne (*V. Coſm. p.* 108) la difference eſt de 17° 52′, dont le cercle du 5me. Satellite s'écarte moins de l'orbite, que les cercles des autres & l'anneau.

Que doit-on conclure de tout cela ? ſinon que le Tourbillon particulier de Saturne s'étend conſiderablement au de-là de ſon 5me. Satellite, mais non pas tant que la direction du fluide dans la région de ce Satellite ne commence déja à pencher vers la direction de l'orbite même de Saturne, peu differente

Digitized by Google

de la direction du grand Tourbillon, l'angle de leurs plans n'étant que d'environ *6* degrés.

Si ſuivant la conjecture de M. HUGUENS (*Coſm. p. 99*) il y avoit encore d'autres Satellites autour de Saturne, que le temps découvrira peut-être, ſur-tout entre les deux extrêmes, qui laiſſent entr'eux un intervalle trop grand pour avoir une juſte proportion avec les intervalles des autres, il n'y a pas à douter que le cercle de celui qui ſeroit entre le 5[me] & le 4[me], n'eût une inclinaiſon avec l'orbite de Saturne moyenne entre 13° 8′ & 31°; comme au contraire un Satellite plus éloigné que le cinquiéme ne manqueroit pas à coup ſûr d'avoir ſon inclinaiſon moindre que 13° 8′.

C I I I.

J'avouë cependant qu'une cauſe accidentelle, qu'on ne prévoit pas, pourroit démentir en aparence ma conjecture touchant un ſixiéme Satellite qui ſeroit entre les deux extrêmes; pouvant arriver que l'inclinaiſon de ſon cercle ſe trouvât hors des inclinaiſons des deux cercles voïſins. Nous en avons un exemple viſible dans le ſecond Satellite de Jupiter, dont le cercle décline un peu de ceux des trois autres, chacun deſquels circule autour de Jupiter, dans un plan commun & parallèle aux bandes de cette Planète, ce que feu M. CASSINI a obſervé le premier (V. les Mém. depuis *1666* juſqu'à *1699*, Tom. VIII) quoique ſans déterminer alors de combien l'inclinaiſon du ſecond differoit de celle des trois autres Satellites.

La vérité de ce Phénomène extraordinaire fut confirmée enſuite par les obſervations de M. MARALDI (V. Mém. de *1729*, p. *399*) en vertu deſquelles il donne 4° 33′ à l'inclinaiſon du cercle du ſecond Satellite à l'égard de l'orbite de Jupiter, & la fait d'un degré & demi plus grande que celle des autres.

Pour rendre quelque raiſon plauſible de la bizarrerie de ce phénomène, je remarque que Saturne & Jupiter, à cauſe de l'énorme groſſeur de leur corps par raport à la Terre, doivent

avoir

avoir auſſi leurs Tourbillons particuliers d'une étenduë beaucoup plus vaſte que celui de la Terre, tellement qu'à une diſtance aſſés grande, depuis la ſurface de ces gros corps, la direction du mouvement de leurs Tourbillons ne ſouffre point d'altération ſenſible par l'influence du Tourbillon general, mais qu'ils ſont obligés de ſuivre la direction commune du mouvement de rotation de ces deux Planètes, comme le Tourbillon general lui-même ſuit la direction de la rotation du Soleil.

C'eſt ce qui fait, comme je l'ai déja expliqué, que les quatre premiers Satellites de Saturne & ſon Anneau circulent ſelon le plan de ſon équateur, le ſeul cinquiéme s'en écartant, parce qu'il eſt à une diſtance, où le Tourbillon de Saturne commence à être déréglé un peu par l'action du grand Tourbillon ſolaire. Le Tourbillon de Jupiter ayant ſans doute la plus grande étenduë entre tous les Tourbillons particuliers, il faut convenir que tous ſes quatre Satellites ſont compris dans un eſpace autour de lui, juſqu'où l'action du Tourbillon Solaire ne ſauroit pénétrer, puiſque le plus éloigné des Satellites, auſſi-bien que le premier & le troiſieme, circule exactement ſelon le plan prolongé de l'équateur de Jupiter. Ainſi je penſe que de ce que le ſecond Satellite décline ſeul de l'équateur de Jupiter, on ne peut pas donner pour cauſe, celle qui fait décliner le cinquieme Satellite de Saturne de la direction commune de ſes compagnons.

C I V.

C'eſt pourquoi il faut recourir à une cauſe accidentelle, qui agiſſe en particulier ſur le ſecond Satellite de Jupiter, ſans que cette cauſe regarde les trois autres: mais je n'en trouve point de plus ſimple ni de plus naturelle, que celle-là même qui fait dériver les Planètes principales de la direction du grand Tourbillon, qu'elles prendroient ſi elles étoient parfaitement ſphériques.

Il n'y a donc qu'à dire, que les Satellites de ces deux grandes

Digitized by Google

Planètes ſont aparemment des Globes parfaits, excepté le ſecond de Jupiter, qui peut bien être ſphéroïde ou moins globe que les trois autres; raiſon ſuffiſante pourquoi ſon cercle autour de Jupiter décline un peu de l'équateur de cet Aſtre, pendant que les trois autres obſervent exactement (à cauſe de leur ſphéricité) en circulant, la ſituation commune avec le plan de l'équateur, ſans ſouffrir aucune déviation ſenſible, qui par cela même ſont vrai-ſemblablement des globes parfaits, à l'imitation des quatre premiers Satellites de Saturne.

Je ne décide rien ſur la figure du cinquieme, ni ſur celle de la Lune (que M. Newton dans ſes *Princ. Natur.* Part. III, prop. 38, fondé ſur l'hypothèſe d'attraction prend pour un ſphéroïde oblong, dont il veut que l'axe ſe dirige toûjours vers la Terre) ayant déja fait voir que l'inclinaiſon de leurs orbes peut avoir lieu, quand même ces deux corps ſeroient parfaitement ſphériques; ſavoir, parce qu'ils ſe trouvent ſi avant vers les extrémités des Tourbillons de Saturne & de la Terre, où la direction de leurs cours peut être alterée par la violence du grand Tourbillon Solaire, dont la direction eſt differente de la leur.

F I N.

JOHAN-

Digitized by Google

N°. CXLVII.

JOHANNIS BERNOULLI SOLUTIONES NOVORUM QUORUMDAM PROBLEMATUM MECHANICORUM.

Excerpta ex litteris ad Filium DANIELEM Petropolin *datis* *d.* 3 Jun. *St. n.* 1730.

PROBLEMA.

SIt ACK triangulum materiale rectangulum in K, quod ſuper plano horizontali DH ſine omni frictione moveri poſſit. Sit etiam corpus grave *m*, quod ſuper hypothenuſa AC poſitum ſua gravitate deſcendat, pariter ſine frictione; quo fiet ut, deſcendente corpore, triangulum jugiter ab eo preſſum retrocedere cogatur. Quæritur tum corporis, tum trianguli velocitas, tum etiam via quam corpus ex motu compoſito deſcribit, atque utriuſque lex accelerationis? *Comment. Acad. Petrop.* Tom. V. pag. 11. TAB. II. *Fig.* 1.

DEFINITIO.

Corpus aliquod vi acceleratrice *animari* dicitur, quando ab ea continuo ad motum urgetur, vel ſollicitatur ſecundum quamcunque directionem.

LEMMA I.

Si corpori alicui, cujus maſſa A, & vis acceleratrix qua animatur p, ſuperaddatur maſſa B nullam habens vim acceleratricem; animabitur maſſa compoſita vi acceleratrice $= pA:(A+B)$ [Vid. *Act. Lipſ.* 1714 † ubi hæc fuſius expoſui].

† N°. XCVI, pag 170, *Tom. II.*

LEMMA II.

TAB. LI. Fig. 2. Si corpus aliquod C animatur, ſimul duabus acceleratricibus uniformibus, ſecundum diverſas directiones CR & CS, quæ vires ſint ut ipſæ lineæ CR & CS, compleaturque parallelogrammum SR; movebitur corpus ſecundum diagonalem CT, eodem modo ac ſi una tantum vi uniformi expreſſa per CT animaretur. Et tres iſtæ longitudines CR, CS, CT eodem tempore percurrerentur, ſi corpus ſingulis iſtis viribus ſeorſim animaretur, eruntque velocitates acquiſitæ in R, S, T, ut ipſæ lineæ CR, CS, CT.

Patet ex compoſitione virium mortuarum.

LEMMA III.

Duo corpora animata diverſis viribus acceleratricibus *p* & *P*, ſi in motu ſint conſtituta temporibus, ſive æqualibus, ſive inæqualibus; erunt eorum velocitates ultimo acquiſitæ in ratione compoſita ex ſubduplicata virium & ſpatiorum percurſorum *s* & *S*, hoc eſt ut $\sqrt{p} \times \sqrt{s}$ ad $\sqrt{P} \times \sqrt{S}$. Demonſtratur in *Act. Lipſ.* 1713 *.

Sequitur nunc SOLUTIO *Problematis; prævia tamen præparatione.*

TAB. LI. Fig. 1. Ex puncto quolibet E in hypothenuſa AC trianguli rectanguli ACK erigatur recta verticalis EG, quæ repræſentet vim naturalem acceleratricem gravium, quam vocabo *g*; ſuper ea formetur triangulum rectangulum EFG, cujus latus EF ſit perpendiculare ad AC, alterum GF eidem AC parallelum; ductæ jam intelligantur FN, NL, LR, RS, ST, TV, &c. in infinitum, ea nimirum lege, ut prima, tertia, quinta &c. horizonti DH, ſecunda vero, quarta, ſexta, &c. hypothenuſæ AC ſint parallelæ. Hinc omnia triangula EGF, EFN, ENL, ELR, &c. ſunt inter ſe & ipſi triangulo CAK ſimilia.

Sit

* N°. XC, §. 4, pag. 517, Tom. I.

Sit itaque hujus trianguli altitudo AK $= a$, baſis KC $= b$, hypothenuſa AC $= \sqrt{(aa+bb)} = c$. Invenietur per analogias GF $= ga : c$, NL $= gabb : c^3$, RS $= gab^4 : c^5$, TV $= gab^6 : c^7$, &c. & ita porro: EN $= gbb : cc$, ER $= gb^4 : c^4$ ET $= gb^6 : c^6$, &c. atque ita deinceps; FN $= gab : cc$, LR $= gab^3 : c^4$, ST $= gab^5 : c^5$ &c. & ſic deinceps; FE $= gb : c$, LE $= gb^3 : c^3$, SE $= gb^5 : c^5$, VE $= gb^7 : c^7$, &c. & ſic ſemper. Quæ ſeries procedunt ſingulæ in progreſſione geometrica deſcendente in ratione cc ad bb. His præmiſſis, ita arguo: Cum pondus m, quod nunc in E eſſe concipimus, continuo premat æqualiter hypothenuſam AC, ſitque ejus vis acceleratrix GE ſeu g, qua nimirum ad deſcenſum verticalem animatur, atque in hac directione, ſi nihil obſtaret, actu deſcenderet: ſed cum triangulum pro parte obſtet deſcenſui, & inde a preſſione corporis aliquam vim acceleratricem ſecundum directionem horizontalem in ſe recipiat; videndum eſt quanta illa ſit, tum etiam quantam retineat corpus ſecundum directionem hypothenuſæ, & qualis retrocedente triangulo oriatur in corpore vis acceleratrix per compoſitionem utriuſque, quamque ideo viam AP corpus deſcribat a puncto A ad horiſontalem DH. In hunc finem, concipiatur vis GE reſolvi in GF & FE; illa GF ſola eſſet acceleratrix ſecundum directionem hypothenuſæ, ſi triangulum ACK eſſet immobile, utpote a cujus invincibili obſtaculo, vis altera normalis FE tota deſtrueretur; ſed quia triangulum eſt mobile, patet vim FE non omnino deſtrui, ſed tantum imminui, & quidem in ea ratione in qua aggregatum maſſæ trianguli & maſſæ corporis (quod aggregatum maſſarum vocabo M) majus eſt quam maſſa ſolius corporis m. Unde ſi triangulum ACK cedere poſſet ſecundum directionem FE, foret, per LEMMA I, vis acceleratrix totius ſyſtematis, hoc eſt, tam trianguli quam corporis in hac directione, $= \frac{m}{M}$ FE, manente interim etiam in corpore priore vi acceleratrice ſecundum directionem AC & expreſſa per GF. Sed quia triangulum non cedit ſecundum FE, propter oppoſitionem plani immobilis horizontalis DH: reſolvenda

venda

venda eſt vis acceleratrix $\frac{m}{M}$ FE, quatenus eſt in corpore, in FN & NE; & habebitur $\frac{m}{M}$ FN & $\frac{m}{M}$ NE, quarum illa $\frac{m}{M}$ FN animat ſyſtema, adeoque & ipſum triangulum ad retrocedendum ſecundum directionem horizontalem; hæc autem $\frac{m}{M}$ NE porro reſoluta in NL & LE, dat $\frac{m}{M}$ NL & $\frac{m}{M}$ LE, ex quibus illa $\frac{m}{M}$ NL contribuit cum priore GF ad motum corporis in directione AC, hæc vero $\frac{m}{M}$ LE [quæ contribuit ad animandum corpus m in directione LE, ipſi autem aſſociatur maſſa trianguli] ſimili modo tranctanda eſt ut antea cum FE factum eſt; erit namque per Lemma I, $\frac{m}{M} \times \frac{m}{M} \times$ LE, ſeu $\frac{mm}{MM}$ LE, nova pars vis acceleratricis, qua totum ſyſtema, hoc eſt corpus & triangulum, ſecundum LE ſolicitaretur, ſi planum immobile DH non obſtaret; reſolvatur ergo hæc vis $\frac{mm}{MM}$ LE in LR & RE, eritque $\frac{mm}{MM}$ LR, & $\frac{mm}{MM}$ RE, quarum illa $\frac{mm}{MM}$ LR dat novam partem vis acceleratricis priori adjiciendam ad animandum ſyſtema, ipſumque adeo triangulum in directione horizontali; hæc vero $\frac{mm}{MM}$ RE ulterius reſoluta in RS & SE dat $\frac{mm}{MM}$ RS & $\frac{mm}{MM}$ SE, quarum illa $\frac{mm}{MM}$ RS eſt iterum nova pars vis acceleratricis in corpore ad illud animandum in directione AC, ſed altera $\frac{mm}{MM}$ SE, ope Lemmatis I, tractata dabit etiam novam partem vis acceleratricis nempe $\frac{mmm}{MMM}$ ST, qua triangulum in directione horizontali animatur: atque ita deinceps procedatur in infinitum. Quo facto liquet, omnes particulares acceleratrices ſecundum GF, NL, RS, TV, &c. ſimul ſump-

tas

tas dare vim totalem acceleratricem, qua corpus m ſecundum directionem hypothenuſæ AC animatur, motuque uniformiter accelerato deſcendit; omnes vero particulares ſecundum FN, LR, ST &c. ſimul ſumptas, dare pariter vim acceleratricem totalem, qua triangulum, vel ſi mavis totum ſyſtema retro urgetur ſecundum directionem horizontali DH parallelam, ac proin etiam motu uniformiter accelerato movetur. His itaque in unum collectis, habebimus has duas progreſſiones; erit nempe vis acceleratrix totalis in corpore m ſecundum AC, $= GF + \frac{m}{M} NL + \frac{mm}{MM} RS + \frac{mmm}{MMM} TV +$ &c. Et vis totalis acceleratrix totius ſyſtematis ſeu trianguli ſecundum $DH = \frac{m}{M} FN + \frac{mm}{MM} LR + \frac{mmm}{MMM} ST +$ &c. Subſtitutis jam valoribus ſupra inventis linearum GF, NL, RS, nec non linearum FN, LR, ST &c. obtinebitur vis prior pro accelerando corpore ſecundum $AC = \frac{ga}{c} + \frac{m}{M} \times \frac{gabb}{c^3} + \frac{mm}{MM} \times \frac{gab^4}{c^5} + \frac{mmm}{MMM} \times \frac{gab^6}{c^7} +$ &c. Atque vis altera pro accelerando ſyſtemate ſecundum $DH = \frac{m}{M} \times \frac{gab}{cc} + \frac{mm}{MM} \times \frac{gab^3}{c^4} + \frac{mmm}{MMM} \times \frac{gab^5}{c^6} +$ &c. Quæ duæ progreſſiones ſunt manifeſte geometricæ & deſcendentes in ratione Mcc ad mbb, adeoque ſunt ſummabiles: invenitur nimirum ſumma progreſſionis prioris $= gacM : (ccM - bbm)$ ac ſumma poſterioris $= gabm : (ccM - bbm)$. Quod erat inveniendum pro utriuſque lege accelerationis.

COROLLARIUM I.

Quoniam $\frac{gacM}{ccM - bbm} : \frac{gabm}{ccM - bbm} = cM : bm$; erit vis acceleratrix corporis in directione hypothenuſæ, ad ejuſdem ut & trianguli vim acceleratricem in directione horizontali, in ratione compoſita ex ratione hypothenuſæ ad baſin trianguli, & ratione maſſæ totius ſyſtematis ad maſſam corporis.

COROLLARIUM II.

Hinc, quia corpus animatur ſimul duabus viribus acceleratricibus, una ſecundum hypothenuſam, altera ſecundum horizontalem, quæ ſe habent ut cM ad bm, ſi capiatur CP ita ut $cM : bm = c$, ſeu $AC : CP = \frac{mb}{M} = \frac{m}{M} \times CK$, ducaturque AP, erit, per *Lemma II*, AP via, quam corpus utraque vi animatum, realiter deſcribit. Quod erat inveniendum pro ſecundo.

COROLLARIUM III.

Cum ſit $CP = mb : M$, erit $KP = (Mb - mb) : M$, adeoque $CP : KP = m : M - m$; hoc eſt, ut maſſa corporis ad maſſam trianguli, & cum, per idem *Lemma II*, eo tempore, quo corpus ab A ad P deſcendit, triangulum ipſum retrocedat, per intervallum CP, ita ut apex trianguli C futurus ſit in eodem puncto P; manifeſtum eſt, ſi intelligatur tota quantitas materiæ trianguli concentrata in ſupremo trianguli apice A, fore CP, cui æqualis erit diſtantia quantitatis materiæ collectæ a perpendiculari AK, ad KP quæ eſt diſtantia corporis ab eadem perpendiculari AK verſus plagam oppoſitam ei verſus quam reperitur apex A, ut m ad $M - m$; hoc eſt, in ratione reciproca maſſarum corporis & trianguli, idque cum ſemper ſe habeat, ubicunque ſumatur punctum P in recta AP, liquet centrum commune gravitatis materiæ trianguli concentratæ & corporis deſcendere in eadem ſemper perpendiculari AK; per conſequens, etiam ſi materia per totum triangulum diffuſa ſit, tamen commune centrum gravitatis totius ſyſtematis durante motu in eadem ſemper linea verticali deſcendere. Quam quidem proprietatem ex alio etiam principio generaliſſimo demonſtrare poſſum.

COROLLARIUM IV.

Cum corpus aliquod grave, quod nempe vi acceleratrice na-

turali

Digitized by Google

turali g animatur, libere deſcendens per altitudinem AK ſeu a, acquirat velocitatem trianguli ultimo acquiſitam, poſtquam nempe apex C percurrit ſpatium CP, faciendum eſt per *Lemma III*, ut $\surd g \times \surd a$ ad $\surd(gabm : (ccM - bbm)) \times \surd(mb : M)$, ita $\surd a$ ad quartam $mb\surd(a : (ccMM - bbmM))$, quæ erit $=$ velocitati finali trianguli: ut vero habeatur velocitas corporis in P, poſtquam nempe re ipſa ſpatium AP percurrit, quærenda primo eſt longitudo AP ſeu $\surd(AK^2 + PK^2)$ & reperietur $\surd(MMaa + MMbb - 2Mmbb + mmbb) : M = \surd(MMcc - 2Mmbb + mmbb) : M$. Nunc faciendum eſt, per partem ſecundam *Lemmatis* ſecundi, ut CP ad AP, hoc eſt ut $mb : M$ ad $\surd(MMcc - 2Mmbb + mmbb) : M$, ſeu ut mb ad $\surd(MMcc - 2Mmbb + mmbb)$, ita velocitas inventa trianguli, quæ eſt $mb\surd(a : (ccMM - bbMm))$ ad velocitatem quæſitam realem corporis in P, quæ itaque erit $\surd((MMacc - 2Mmabb + mmabb) : (ccMM - bbMm))$; quod erat inveniendum pro primo.

COROLLARIUM V.

Hinc confirmatur conſervatio virium vivarum: multiplicando enim quadratum velocitatis finalis trianguli per ipſius maſſam, provenit vis viva trianguli $= (abbmmM - abbm^3) : (ccMM - bbmM)$; atque multiplicando quadratum velocitatis actualis corporis m in puncto P per maſſam ipſius, habebitur vis viva corporis $(accMMm - 2abbMmm + abbm^3) : (ccMM - bbmM)$, adeoque ſumma utriuſque $= (accMMm - abbMmm) : (ccMM - bbMm) = am$; hoc eſt $=$ vi vivæ ſolius corporis m ſi libere ex A in K caderet. *Q. E. D.*

COROLLARIUM VI.

Etiam hoc, curioſitatis gratia, ſolvi poteſt Problema; qualem nempe inclinationem dare conveniat hypothenuſæ AC, ita ut, manentibus maſſis tam corporis quam trianguli, ut & altitudine AK, triangulum velociſſime retro pellatur, ipſumque adeo

Digitized by Google

corpus in puncto P habeat minimam poſſibilem velocitatem? In hunc finem, ex vi acceleratrice trianguli, quæ eſt $gabm:(ccM-bbm)$, ſeu [ſubſtituta $aa+bb$ pro cc] $gabm:(aaM+bbM-bbm)$ faciendum eſt maximum, ſupponendo litteram b variabilem, reliquas vero omnes invariabiles: hoc pacto enim invenitur per communem regulam de maximis & minimis, $b=a\surd(M:(M-m))$; proinde $\surd(M-m):\surd M=a:b$; hoc eſt, ſinus totus debet eſſe ad tangentem anguli KAC in ſubduplicata ratione maſſæ trianguli & corporis. Unde ſequitur, angulum KAC ſemirecto ſemper majorem eſſe debere. Et nominatim, ſi M ſit duplum ipſius m, id eſt, ſi maſſa trianguli ſit æqualis maſſæ corporis, erit $a:b=1:\surd 2$, ſeu ut latus quadrati ad diagonalem; id quod facit ut angulus KAC, ceu ex Tabulis tangentium habetur, ſit quamproxime 54 grad. 44 min. qui etiam eſt angulus quem facere debet manubrium gubernaculi cum carina navis, ut hæc quampromptiſſime gyrari poſſit, ſicuti docui in meo *Manuario Nautico*, Cap. V. art. 17 †, nec non angulus obliquitatis ſub quo globus aliquis elaſticus impingere debet in duos alios, qui junctim ſumti habeant maſſam ipſi æqualem, ita ut hi quam celerrime a ſe invicem recedant. Vid. *Diſſert.* meam, Cap. XI. art. 14 *.

SCHOLION.

Non inconſultum duco oſtendere, quomodo alia hujuſmodi Problemata per methodum noſtram hic expoſitam ſolvi poſſint. Sit, exempli gratia, idem triangulum ACK gravitatis quidem expers, ſed datam quantitatem materiæ nullius gravitatis in ſe continens; quod moveri poſſit ſuper plano inclinato DH ad horizontem. Hypothenuſa CA ſupponitur horizontalis, latus AK perpendiculare ad baſin CK, incumbat vero hypothenuſæ AC corpus grave E, libertatem habeat fluendi ſuper AC ſine omni frictione; ſicuti triangulum materiale non grave ACK ſupponitur fluere poſſe liberrime ſuper plano de-

TAB. LI. *Fig.* 3.

clivi

† XCI. pag. 39, 40. *Tom. II.* * N°. CXXXV. pag. 63. ſupra.

Digitized by Google

clivi DH. Quæritur, ſi hoc triangulum a pondere corporis incumbentis preſſum deſcenderit, ac ſimul cum eo ipſum quoque corpus, qualem quovis in loco velocitatem habeat tam corpus quam triangulum?

SOLUTIO.

Quod attinet ad motum corporis E, haud difficulter intelligitur, illum continuo fieri in eadem verticali GE. Sed ut determinemus vim acceleratricem, qua deſcendit triangulum ſuper plano declivi DH; rem ita præſtabimus. Per GE exponatur gravitas, ſeu vis naturalis acceleratrix corporis E, quæ ut ante dicatur $= g$; reſolvatur ea in GF parallelam plano DH & in EF eidem normalem. Sit quoque hypothenuſa $AC = c$, $AK = a$, $CK = b$; maſſa corporis $= m$, maſſa totius ſyſtematis $= M$, adeoque maſſa trianguli $= M - m$. Erit ob ſimilia triangula GEF & ACK, $GF = ga : c$ & $EF = gb : c$. Concipiamus tantiſper ceſſare vel demtam eſſe vim GF, & ſolam agere vim FE; habebimus caſum præcedentem, ubi DH tanquam linea horizontalis, & FE tanquam vis verticalis conſiderari debet; hinc ergo per ſolutionem præc. inveniemus vim acceleratricem trianguli ACK ſecundum directionem DH; cui nunc ea, quam negleximus, iterum addi debet quæ ex GF reſultat, utpote quæ cum parallela ſit plano eidem DH, tota impenditur ad pellendum ſyſtema in directione DH; cognita ſic velocitate trianguli, cognoſcitur etiam velocitas realis corporis in E ſecundum directionem GE. Retentis itaque iiſdem litteris ponendum eſt $gbm : cM$ pro g, in $gabm : (ccM - bbm)$, quod vim acceleratricem trianguli denotabat in præcedenti caſu, & prodibit $gabbmm : (c^3 MM - bbcMm)$ pro vi acceleratrici, qua triangulum animatur, reſultante tantum ex FE in præcedenti caſu; huic nunc addendum eſt, quod inſuper acquirit a $GF = ga : c$, quod ideo eſt $gam : cM$; unde emergit trianguli vis acceleratrix totalis $= gabbmm : (c^3 MM - bbcMm) + gam : cM = gacm : (ccM - bbm)$. Quare faciendo hic

 etiam,

etiam, per *Lem. III*, ut $\sqrt{ga}$ ad $\sqrt{(gabbmm:(ccMM-bbMm)+gam:M)}$ ita $\sqrt{a}$, ſeu velocitas naturalis acquiſita ex caſu libero per altitudinem æqualem ipſi AK, ad velocitatem trianguli poſtquam apex C percurrit ſpatium ſuper DH æquale ipſi c ſeu hypothenuſæ AC, quæ itaque velocitas erit $= c\sqrt{(am:(ccM-bbm))}$. Eſt autem CA ad AK, ſeu c ad a, ut modo inventa trianguli velocitas ſuper plano DH ad actualem ſeu realem velocitatem corporis in directione verticali GE; unde velocitas corporis $= a\sqrt{(am:(ccM-bbm))}$. Quod erat inveniendum pro determinandis velocitatibus.

COROLLARIUM.

Etiam ex hac, ut ex præcedente ſolutione à priori inſtitutâ mirifice confirmatur conſervatio virium vivarum; etenim vis viva trianguli $= accm(M-m):(ccM-bbm)$, & vis viva corporis $= a^3mm:(ccM-bbm)$, quarum ſumma [inſtituto calculo] invenitur $= am$, quemadmodum fieri par eſt, ut conſervetur vis viva, quæ eſſet in corpore m libere deſcendente per altitudinem verticalem æqualem ipſi AK. Reducendo velocitates ad communem denominatorem, invenitur velocitas trianguli $= c\sqrt{aM}:\sqrt{(ccM-bbm)}$ & velocitas corporis $= a\sqrt{am}:\sqrt{(ccM-bbm)}$.

NOTA.

Si præterea velimus, ut ipſum quoque triangulum AKC gravitet pro ratione ſuæ maſſæ $M-m$; eodem ratiocinio, quo ante in ſolutione Scholio ſubjuncta fecimus, utendum eſt; niſi quod jam per GE exponenda ſit gravitas, ſeu vis naturalis acceleratrix in directione verticali, non tantum corporis E, ſed totius ſyſtematis; corpus quippe & triangulum in hoc caſu communem habent gravitationem naturalem. Hinc ergo jam ipſa GF, ſeu $ga:c$, deſignabit partem vis acceleratricis totius ſyſtematis & proinde trianguli, quam tantiſper ceſſare vel demtam

eſſe

Digitized by Google

eſſe concipiamus, dum altera tantum EF, ſeu $gb:c$, ſyſtema totum, proinde etiam corpus urget normaliter ad planum DH. Atque ita habebimus caſum primum, ubi DH tanquam horizontalis & FE tanquam vix acceleratrix verticalis, qua corpus animatur, conſideranda eſt. Quare ſi in $gabm:(ccM-bbm)$ [quod in illo primo caſu exprimebat vim acceleratricem totalem trianguli] ponamus $gb:c$ pro g, orietur $gabbm:(c^3M-bbcm)$ pro vi qua triangulum animatur, reſultante tantum ex FE in hoc caſu. Ei igitur addenda nunc eſt vis altera partialis, quam hactenus neglextimus, oriunda ex GF, quam vim modo vidimus eſſe $ga:c$. Et ita obtinemus pro præſenti caſu vim acceleratricem totalem trianguli $= gabbm:(c^3M-bbcm)+ga:c =$ [facta reductione] $gacM:(ccM-bbm)$. Faciendo nunc, per *Lemma III*, ut $\sqrt{ga}$ ad $\sqrt{(gaccM:(ccM-bbm)}$, ita $\sqrt{a}$, ſeu velocitas naturalis acquiſita ex deſcenſu libero per altitudinem æqualem ipſi AK, ad velocitatem trianguli, quam habebit poſtquam percurrit ſpatium æquale ipſi c ſeu hypothenuſæ AC; quare ergo velocitas erit $= \sqrt{(accM:(ccM-bbm))}$; faciendo nunc porro ut CA ad AK ſeu c ad a, ita modo inventa velocitas trianguli $\sqrt{(accM:(ccM-bbm))}$ ad $\sqrt{(a^3M:(ccM-bbm)}$; quæ erit velocitas realis corporis in directione verticali GE. *Q. E. I.*

COROLLARIUM.

Hinc quoque patet conſervari quantitatem virium vivarum; nam vis viva trianguli $= accM:(ccM-bbm)\times(M-m)$ $= (accMM-accMm):(ccM-bbm)$, & vis viva corporis $= a^3Mm:(ccM-bbm)$, quæ ſimul ſumtæ faciunt $(accMM - accMm+a^3Mm):(ccM-bbm) =$ [ob $cc-aa=bb$] $(accMM - abbMm):(ccM-bbm) = aM =$ vi vivæ quam acquireret totum ſyſtema grave, ſi libere ex altitudine verticali & æquali ipſi AK, ſeu a, caderet. *Q. E. D.*

JOHAN-

N°. CXLVIII.

JOHAN. BERNOULLI,

DEMONSTRATIO METHODI ANALYTICÆ,

Qua uſus eſt pro determinanda aliqua Quadratura exponentiali per ſeriem, traditam olim in Actis Eruditorum A. 1697. pag. 131 *.

I.

PRincipia calculi exponentialium, à me primum inventa, ac poſtea quoque publici juris facta in *Actis anni* 1697 *Menſe Martio*, pro ea qua fuerunt fœcunditate, uberrimam dederunt Eruditis materiam provehendi pomœria Geometriæ ſublimioris, per incrementum hoc novum calculi infiniteſimalis, antea non ſatis, vel omnino non cognitum.

II.

Inter exempla curvarum exponentialium, quæ ibi tractaveram, occurrit aliqua ex claſſe harum curvarum, cujus natura exprimitur hac æquatione $x^x = y$, nominando coordinatas x & y; vid. pag. 130 & 131 †; ubi poſtquam varias oſtendiſſem affectiones, inſervientes partim conſtructioni ipſiuſmet curvæ, partim ducendis tangentibus, partim etiam *Maximorum* vel *Minimorum* quorundam determinationi, quæ omnia circa inſolitam hanc materiam non ſpernenda videbantur, tandem in mentem venit aliquid dicere de aſſignanda quadratura, hoc eſt, de inveniendo [in hac curva] $\int y\,dx$ ſeu $\int x^x\,dx$. Quod quomodo perageretur, tunc quidem oſtendere non erat ex inſtituto meo; quocirca contentus fueram, unicum, quaſi in tranſitu, exponere caſum, qui præ cæteris ob inſignem ſui ſingularitatem videbatur mereri

* N°. XXXVI. pag. 185. *Tom. I.* † Pag. 184, 185. *Tom. I.*

Digitized by Google

Fig. 1.

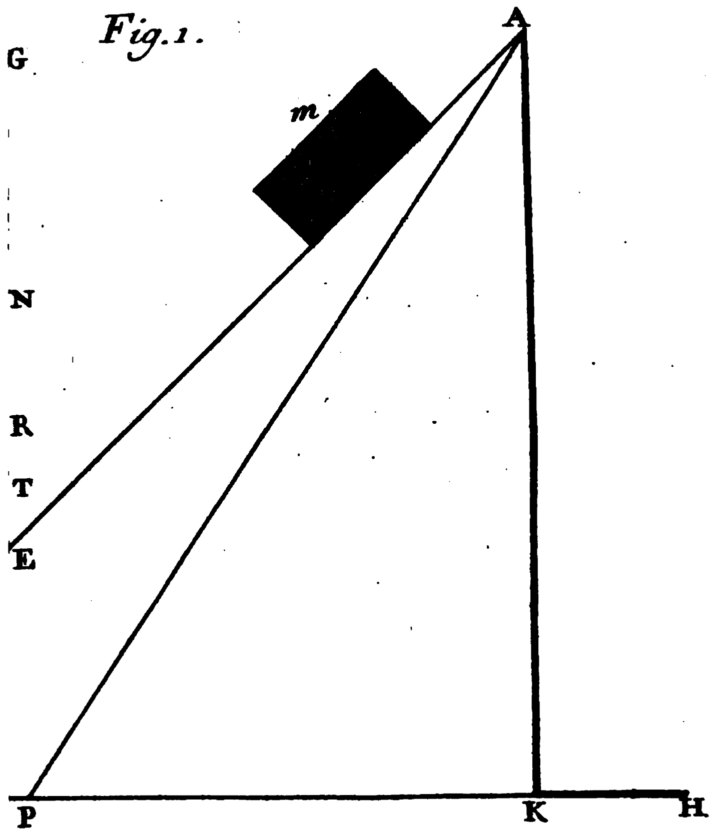
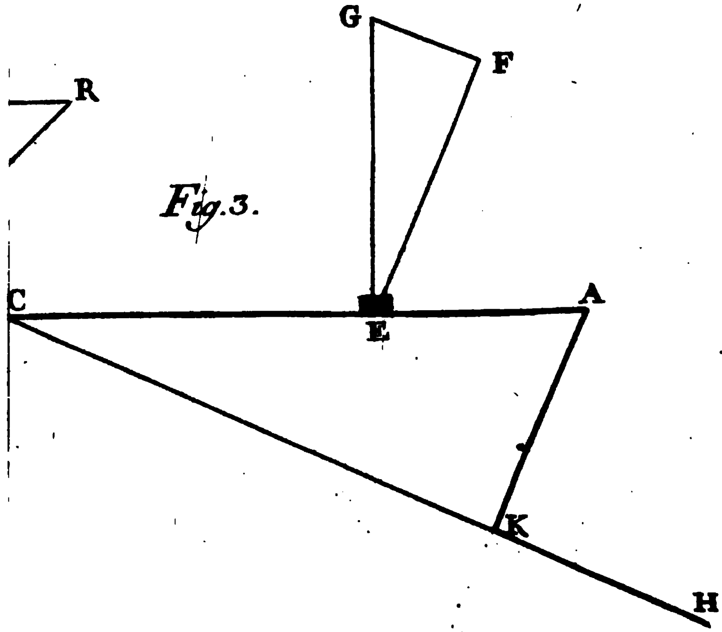


Fig. 3.



Digitized by Google

mereri aliquam attentionem, ſuppreſſa tamen in hunc uſque diem demonſtratione.

III.

Caſus autem, de quo hic ſermo, ita habet: Sit abſciſſa $x = 1$, adeoque etiam ordinatim applicata y ſeu $x^x = 1$; erit, ut tum jam inveneram & inſinuaveram, area curvæ hiſce ordinatis reſpondens, hoc eſt $\int x^x dx = 1 - 1:2^2 + 1:3^3 - 1:4^4 + 1:5^5 - \&c. . . \&c.$ Quæ ſeries mirabili adeo celeritate convergit, ut terminus decimus $1:10^{10}$ nonniſi unicam decimam milleſimam millioneſimam particulam conſtituat unitatis, ſeu termini primi.

IV.

Sicuti ſummus tum temporis Geometra LEIBNITIUS, cum quo frequens litterarum commercium colueram, ita quoque alii Viri inſignes, hujus ſeriei concinnitatem & elegantiam mirati, originem ejus, quam ſibi non obviam fuiſſe, ingenue fatebantur, a me edoceri maluerunt, quam ei inveſtigandæ diu fruſtra inſudare. Nec defuere, longo poſt tempore, qui ex locis non tantum vicinis, ſed procul quoque remotis, me convenientes, vel ſaltem per litteras compellantes, analyſin abs me peterent rei hujus, quæ tamen non adeo abſtruſa, vel inventu difficilis, tectam viam incedentibus apparebit.

V.

Ut itaque ulteriores prævenirem ſolicitationes, cum præſertim nuper admodum idem ad me factum fuerit petitum, tandem commodum fore judicavi atque utile ad avertendas importunas preces, ſi ſemel pro ſemper luci publicæ exponerem calculum nullo ſane myſterio dignum. En igitur proceſſum. Ex logarithmo poſito z invenitur numerus N, formando hanc ſeriem:

Digitized by Google

$N = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} +$ &c, id quod jam dudum cognitum eſt, atque nunc tritiſſimum.

V I.

Per naturam logarithmorum, ſcitur eſſe logarithmus ipſius $z^p = plz$ [per l intelligitur logarithmus quantitatis, quæ eandem litteram immediate ſequitur]; unde logarithmus ipſius $x^x = xlx$. Scribendo igitur in ſerie præcedente pro z, zz, z^3, z^4, z^5, &c. eorum valores xlx, x^2lx^2, x^3lx^3, x^4lx^4, x^5lx^5, &c. habebimus ipſum ejus numerum ſeu x^x expreſſum per ſuos logarithmos & logarithmorum potentias; hinc oritur ſequens ſeries: $x^x = 1 + xlx + \frac{x^2lx^2}{2} + \frac{x^3lx^3}{2.3} + \frac{x^4lx^4}{2.3.4} + \frac{x^5lx^5}{2.3.4.5} +$ &c. cujus ſinguli termini multiplicati per dx dabunt elementum $x^x dx$ figuræ quadrandæ.

V I I.

Reſtat ut integrentur ſinguli termini hujus ſeriei $(1 + xlx + \frac{x^2lx^2}{2} + \frac{x^3lx^3}{2.3} + \frac{x^4lx^4}{2.3.4} + \frac{x^5lx^5}{2.3.4.5} + \text{\&c})\,dx$, quod fit, ſi unusquiſque ſeparatim tractetur, ac debito modo convertatur in plures alios, qui bini & bini ſumpti ex ipſa formatione reddantur integrabiles; ſicuti hoc olim ita præſtiti in formatione meæ ſeriei univerſalis, omnes integrationes generaliſſime complectentis: vid. *Acta Erud. Menſe Nov. A.* 1694 *. Ita exempli gratia, ſi ſecundus terminus $(xlx)\,dx$ ſub hac facie exponatur $(xlxdx + \frac{1}{2}xxdlx) - \frac{1}{2}xdx$, cui revera æqualis eſt $xlxdx$, ideo quia $dlx = dx : x$, proinde $\frac{1}{2}xxdlx$ deſtruitur per $-\frac{1}{2}xdx$; erit igitur terminus $(xlx)\,dx$ abſolute integrabilis ſub hac facie

(x

* N°. XXI, pag. 125, *Tom. I.*

Digitized by Google

$(xlxdx + \frac{1}{2}xxdlx) - \frac{1}{2}xdx$ expreſſus; ejus namque integrale eſt $= \frac{1}{2}xxlx - \frac{1}{4}xx$; ſimili modo cum reliquis erit procedendum.

VIII.

Iſta itaque alterna ſignorum poſitio, qua quantitates ſub alia facie poſitæ deſtruunt præcedentes, ſi probe obſervetur, termini dx, $xlxdx$, x^2lx^2dx, x^3lx^3dx, &c. exponentur, ut ſequens refert Tabula;

$$dx = (dx)$$

$$xlxdx = (xlxdx + \tfrac{1}{2}xxdlx) - \tfrac{1}{2}xdx.$$

$$x^2lx^2dx = (x^2lx^2dx + \tfrac{2}{3}x^3lxdlx) - (\tfrac{2}{3}x^2lxdx + \frac{2}{3^2}x^3dlx) + \frac{2}{3^2}x^2dx$$

$$x^3lx^3dx = (x^3lx^3dx + \tfrac{3}{4}x^4lx^2dlx) - (\tfrac{3}{4}x^3lx^2dx + \frac{3\cdot2}{4^2}x^4lxdlx) + (\frac{3\cdot2}{4^2}x^3lxdx + \frac{3\cdot2}{4^3}x^4dlx) - \frac{3\cdot2}{4^3}x^3dx$$

$$x^4lx^4dx = (x^4lx^4dx + \tfrac{4}{5}x^5lx^3dlx) - (\tfrac{4}{5}x^4lx^3dx + \frac{4\cdot3}{5^2}x^5lx^2dlx) + (\frac{4\cdot3}{5^2}x^4lx^2dx + \frac{4\cdot3\cdot2}{5^3}x^5lxdlx) - (\frac{4\cdot3\cdot2}{5^3}x^4lxdx + \frac{4\cdot3\cdot2}{5^4}x^5dlx) + \frac{4\cdot3\cdot2}{5^4}x^4dx.$$

$x^5lx^5dx = ($ &c.

IX.

Hæc ita continuabuntur, quouſque libuerit, quorum ſi capiuntur integralia per partes ſingulis parentheſibus (...) incluſas, reſultabunt ſequentia:

$$\int dx = x.$$

$$\int x\,lx\,dx = \tfrac{1}{2}xx\,lx - \frac{1}{2^2}xx.$$

$$\int x^2lx^2dx = \tfrac{1}{3}x^3lx^2 - \frac{2}{3^2}x^3\,lx + \frac{2}{3^3}x^3$$

$$\int x^3lx^3dx = \tfrac{1}{4}x^4lx^3 - \frac{3}{4^2}x^4lx^2 + \frac{3.2}{4^3}x^4lx - \frac{3.2}{4^4}x^4.$$

$$\int x^4lx^4dx = \tfrac{1}{5}x^5lx^4 - \frac{4}{5^2}x^5lx^3 + \frac{4.3}{5^3}x^5lx^2 - \frac{4.3.2}{5^4}x^5\,lx + \frac{4.3.2}{5^5}x^5.$$

$$\int x^5lx^5dx = \&c.$$

X.

Lex progreſſionis terminorum cum ſatis ſit evidens, ſuperfluum foret explicare, quomodo hæc Tabula ſit ulterius extendenda; hoc tantum faciendum ſupereſt, ut integremus ex hac Tabula terminos ſeriei, in Artic. VII expoſitæ $\int\left(1 + x\,lx + \frac{x^2lx^2}{2} + \frac{x^3lx^3}{2.3} + \frac{x^4lx^4}{2.3.4} + \frac{x^5lx^5}{2.3.4.5} + \&c.\right)dx$, quæ erit æqualis quæſito $\int x^x dx$. In hunc finem multiplicentur valores terminorum $\int dx$, $\int x\,lx\,dx$, $\int x^2lx^2dx$, $\int x^3lx^3dx$, &c. per has fractiones reſpective ſumtas $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1.\,2}$, $\frac{1}{1.2.3}$ &c. eritque, poſitis columnis, quæ ſunt verticales, in ſitum horizontalem, area vel $\int x^x dx =$

$$\begin{array}{llllll}
x & + \frac{1}{2}x^2lx & + \frac{1}{2.\,3}x^3lx^2 & + \frac{1}{2.3.4}x^4lx^3 & + \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5}x^5lx^4 & + \&c. \\
 & - \frac{1}{2^2}x^2 & - \frac{1}{3^2}x^3lx & - \frac{1}{2.4^2}x^4lx^2 & - \frac{1}{2.3.5^2}x^5lx^3 & - \&c. \\
 & & + \frac{1}{3^3}x^3 & + \frac{1}{4^3}x^4lx & + \frac{1}{2.\,5^3}x^5\,l.\,x^2 & + \&c. \\
 & & & - \frac{1}{4^4}x^4 & - \frac{1}{5^4}x^5\,l\,x & - \&c. \\
 & & & & + \frac{1}{5^5}x^5 & + \&c.
\end{array}$$

X I.

XI.

Hinc primo obtutu ultro pateſcit, in caſu, quo $x = 1$, terminos omnes, in quibus reperiuntur lx, ejuſque potentiæ lx^2, lx^3, lx^4, &c. evaneſcere, ex natura logarithmorum, qua fit ut logarithmus unitatis ſit $= 0$. Deſtructis itaque iſtis terminis: ſuperſtites remanebunt initiales tantum termini ſerierum horizontalium, qui proinde [ſcribendo ubique unitatem pro x, x^2, x^3, &c.] formabunt hanc ſeriem $\int x^x\, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \&c.$ *Q. E. D.*

XII.

SCHOLIUM.

Modus Artic. VIII adhibitus, reſolvendi terminos $x\,lx\,dx$, $x^2\,lx^2\,dx$, $x^3\,lx^3\,dx$, &c. per alternam additionem & ſubtractionem æquivalentium, ad id inſtitutam ut integrabiles fiant, ſicuti oſtenſum eſt Artic. IX; modus, inquam, iſte poteſt reddi generalis, explicando nempe, quo artificio integrari poſſit terminus $x^m\,lx^e\,dx$, ubi m & e ſunt exponentes dati qualeſcunque quantitatum x & lx. En ipſum proceſſum $x^m\,lx^e\,dx = (x^m\,lx^e\,dx + \frac{1}{m+1}x^{m+1}\,dlx^e) - (\frac{e}{m+1}x^m\,lx^{e-1}\,dx + \frac{e}{(m+1)^2}x^{m+1}\,dlx^{e-1}) + (\frac{e.\,e-1}{(m+1)^2}x^m\,lx^{e-2}dx + \frac{e.\,e-1}{(m+1)^3}x^{m+1}\,dlx^{e-2}) - (\frac{e.\,e-1.\,e-2}{(m+1)^3}x^m\,lx^{e-3}dx + \frac{e.\,e-1.\,e-2}{(m+1)^4}x^{m+1}\,dlx^{e-3}) + \&c.$ Æqualitas iſta nititur deſtructione terminorum ſecundi & tertii, quarti & quinti, ſexti & ſeptimi, atque ſic porro; quo fit ut reipſa primus tantum terminus ſuperſtes maneat, æqualis utique ei, qui ad integrandum proponitur, dum interim progreſſio terminorum ea arte eſt facta, ut bini quilibet junctim ſumti, & ſignis parentheticis (...) incluſi, fiant integrabiles. Etenim integratione rite inſtituta,

habetur $\int x^m\, lx^e\, dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}\, lx^e - \frac{e}{(m+1)^2} x^{m+1}\, lx^{e-1}$ $+ \frac{e.e-1}{(m+1)^3} x^{m+1}\, lx^{e-2} - \frac{e.e-1.e-2}{(m+1)^4} x^{m+1}\, lx^{e-3} +$ &c.

XIII.

Corollarium.

Quotieſcunque exponens e eſt numerus integer affirmativus, liquet ſeriem abrumpi, atque tot acquirere terminos, quot ſunt unitates in $e+1$. Sed, ſi ſeries terminorum numero infinitorum pro quocunque caſu admittere velimus, alia inſuper ſuppetit methodus conſtruendi ejuſmodi ſeries haud ſane inconcinnas, quæ exprimunt valorem ipſius $\int x^m\, lx^e\, dx$. Rem ita exequor: Pono $(m+1)\, lx = y$, erit $x^{m+1} = ny$ [per ny intelligo numerum ipſius y, ſicuti ſemper per lx mihi intelligitur logarithmus ipſius x,] unde $lx^e = \frac{1}{(m+1)^e} y^e$. Eſt autem, ut dudum conſtat, $ny = 1 + y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2.3} y^3 + \frac{1}{2.3.4} y^4 +$ &c. Differentiando hanc ſeriem, habetur $d(ny)$ ſeu $(m+1)\, x^m\, dx = dy\,(1 + y + \frac{1}{2} yy + \frac{1}{2.3} y^3 + \frac{1}{2.3.4} y^4 +$ &c.); multiplicando membrum prius per $\frac{1}{m+1} lx^e$ & alterum per æquale $y^e : (m+1)^{e+1}$ prodibit $x^m\, lx^e\, dx = \frac{dy}{(m+1)^{e+1}} \times (y^e + y^{e+1} + \frac{1}{2} y^{e+2} + \frac{1}{2.3} y^{e+3} + \frac{1}{2.3.4} y^{e+4} +$ &c.); ſumtis autem actu ipſo integralibus terminorum ſingulorum, obtinebimus $\int x^m\, lx^e\, dx = \frac{1}{(m+1)^{e+1}} \times (\frac{y^{e+1}}{e+1} + \frac{y^{e+2}}{e+2} + \frac{y^{e+3}}{2(e+3)} + \frac{y^{e+4}}{2.3(e+4)} + \frac{y^{e+5}}{2.3.4(e+5)} +$ &c.) $=$ [ſubſtituto loco y ejus valore $(m+1)\, lx$] $\frac{lx^{e+1}}{e+1} + \frac{(m+1)^1\, lx^{e+2}}{e+2} + \frac{(m+1)^2\, lx^{e+3}}{2(e+3)} + \frac{(m+1)^3\, lx^{e+4}}{2.3.(e+4)} +$ &c.

Habe-

Habemus igitur jam aliam ſeriem, compoſitam quidem ſemper ex terminis numero infinitis, nihilominus tamen æqualem illi alteri ſupra inventæ $x^{m+1} \times \left(\frac{1}{m+1} lx^{e} - \frac{e}{(m+1)^2} lx^{e-1} + \frac{e.\,e-1}{(m+1)^3} lx^{e-2} - \frac{e.\,e-1.\,e-2}{(m+1)^4} lx^{e-3} + \&c\right)$ quæ conſtat ſemper terminis numero finitis, modo e ſit numerus integer & affirmativus.

XIV.

Quod ſupereſt, Lectorem benevolum ſcire volo, hæc a me jam olim aliquot annis ante finem ſuperioris ſeculi communicata fuiſſe in privatis meis literis ad Illuſtr. LEIBNITIUM, nunc vero demum edenda, ob rationem Artic. IV dictam, ſine qua lucem forſan nunquam viſura fuiſſent. Multa enim apud me premo, hiſce digniora, quæ tamen tanti non facio, ut in publicum emitti mereantur.

Digitized by Google

JOHAN.

Digitized by Google

N°. CXLIX.

JOHANNIS BERNOULLI LECTIONES MATHEMATICÆ, DE METHODO INTEGRALIUM, ALIISQUE;

CONSCRIPTÆ IN USUM

ILL. MARCHIONIS *HOSPITALII*;

Cum Auctor Pariſiis ageret
Annis 1691 & 1692.

Digitized by Google

Digitized by Google

LECTIONES MATHEMATICÆ

DE

METHODO INTEGRALIUM,

ALIISQUE.

LECTIO PRIMA.

De Natura & Calculo Integralium.

VIDIMUS in præcedentibus * quomodo quantitatum *Differentiales* inveniendæ ſunt: nunc vice verſa quomodo differentialium *Integrales*, id eſt, eæ quantitates quarum ſunt differentiales, inveniantur, monſtrabimus. Et quidem jam ex ſupra dictis notum eſt, dx eſſe differentialem ipſius x, & xdx differentialem ipſius $\frac{1}{2}xx$, vel $\frac{1}{2}xx$ + vel — quantitate conſtanti; $xxdx$ differentialem ipſius $\frac{1}{3}x^3$, aut $\frac{1}{3}x^3$ + vel

* *Intelligit Auctor Lectiones in calculum differentialem quæ præceſſerunt, quaſque ſupprimendas duxit, ſiquidem omnia, quæ in Lectionibus iſtis continentur, ab* Illuſtr. HOSPITALIO *relata fuerunt in Librum ſuum quem inſcripſit*, Analyſe des infiniment petits, *qui in omnium manibus verſatur.*

— &c. Et $x^3 dx$ differentialem ipſius $\frac{1}{4}x^4$ ſive $\frac{1}{4}x^4$ + vel — quant. conſt.

etiam adx differentialem ipſius - - ax, &c.
$axdx$ - - - - - - - - $\frac{1}{2}axx$, &c.
$axxdx$ - - - - - - - - $\frac{1}{3}ax^3$, &c.
ax^3dx - - - - - - - - $\frac{1}{4}ax^4$, &c.
&c. &c.

Ex quibus hæc Regula formari poteſt

$$ax^p dx \textit{ differentialis eſt quantitatis } \frac{a}{p+1}x^{p+1}$$

Igitur ſi alicujus quantitatis differentialis quantitas integralis ſumenda ſit; ante omnia conſiderandum eſt, an quantitas propoſita ſit productum alicujus differentialis in multiplum ſuæ abſolutæ ad certam quandam poteſtatem elevatæ: quod ſignum eſt ejus Integralem per hanc regulam inveniri poſſe. Ex. gr. ſi quantitatis $dy\sqrt{(a+y)}$ integralis invenienda ſit, video primo, dy, multiplicatam eſſe per multiplum ſuæ abſolutæ $1a+1y$ ad poteſtatem $\frac{1}{2}$ elevatæ: dein quæro per hanc Regulam ipſius integralem videlicet $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(a+y)^{(\frac{1}{2}+1)}$, id eſt, $\frac{2}{3}(a+y)\sqrt{(a+y)}$.

Sic invenitur integralis ipſius $xdx\sqrt[3]{(aa+xx)}$ quæ eſt $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+1}$ $(aa+xx)^{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{8}(aa+xx)\sqrt[3]{(aa+xx)}$; ipſius $dy:\sqrt{(a+y)}$ integralis $= 2\sqrt{(a+y)}$; ipſius $dx:x$ integralis $= \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}\times 1 = \infty$.

Notandum eſt occurrere nonnunquam quantitates, quarum Integrales non poſſe inveniri per hanc Regulam primo intuitu videtur, ſed poſt quandam variationem facile inveniuntur, ut in ſequentibus caſibus.

I. Si pro $dx\sqrt{(aaxx+x^4)}$ ſcribatur $xdx\sqrt{(aa+xx)}$ invenitur integrale: nempe $(\frac{1}{3}aa+\frac{1}{3}xx)\sqrt{(aa+xx)}$. Et ſi pro $dx\sqrt{(a^3+3aax+3axx+x^3)}$ ſcribatur $(adx+xdx)\sqrt{(a+x)}$ invenitur integralis $\frac{2}{5}(aa+2ax+xx)\sqrt{(a+x)}$.

II. Et vice verſa occurrit, ut nonnunquam una vel aliquot litteræ involvendæ ſint ſub ſigno radicali, priuſquam integrale ſumi poſſit, ut in ſequenti exemplo $(3ax^3dx+4x^4dx)\sqrt{(ax+xx)}$.

Hujus

Digitized by Google

Hujus integrale per Regulam ſumi poſſe non videtur, ſed ſi involvatur una x, provenit $(3axxdx + 4x^3 dx)\sqrt{(ax^3 + x^4)}$ cujus nunc integrale per regulam invenitur $= \frac{2}{3}(ax^3 + x^4)\sqrt{(ax^3 + x^4)}$.

III. Si occurrit fractio cujus denominator eſt, vel quadratum, vel cubus, vel alia poteſtas; Radix ſumenda eſt pro quantitate abſoluta, ut in hac $xdx : (a^4 + 2a^2x^2 + x^4)$ pro quantitate abſoluta ſumendum eſt $aa + xx$ & habebitur $- 1 : (2aa + 2xx)$. Si pro quantitate abſoluta ſumeretur $a^4 + 2aaxx + x^4$, integrale fractionis per Regulam haberi non poſſet.

IV. Si duarum quantitatum ſeparatim ſumptarum integrale inveniri nequit; accidit interdum, ut ex conjunctis haberi poſſit. Ex. gr. $adx : \sqrt{(2ax + xx)} + xdx : \sqrt{(2ax + xx)}$; neutrius habetur integrale ſeorſim ſumtæ, ſed additarum $(adx + xdx) : \sqrt{(2ax + xx)}$ integrale eſt $\sqrt{(2ax + xx)}$.

V. Fractio aliquando integralem habere non videtur; ſed ſi ejus numerator & denominator per eandem quantitatem multiplicentur, ejus tunc integralis facile haberi poteſt. Ut $(adx + xdx) : \sqrt{(3a + 2x)}$; multiplicetur numerator & denominator per x habebitur $(axdx + xxdx) : \sqrt{(3ax^2 + 2x^3)}$, cujus integrale eſt $\frac{1}{3}\sqrt{(3axx + 2x^3)}$.

VI. Viciſſim, interdum numerator & denominator dividendi ſunt per eandem quantitatem, ut integrale haberi poſſit. Ex. gr. $axxdx : \sqrt{(aax^2 + x^4)}$; dividatur uterque terminus per x & habebitur $axdx : \sqrt{(aa + xx)}$; cujus integrale ſecundum Regulam eſt $a\sqrt{(aa + xx)}$.

VII. Contingit quoque, ut quantitatis propoſitæ integrale per Regulam haberi non poſſit; ſed ſi alia quantitas, cujus integrale habetur, iſti addatur, provenit quædam, cujus integrale ſumi poteſt; ſi itaque ab hoc auferatur integrale quantitatis additæ, remanebit integrale quæſitum. Verbi gr. $xdx\sqrt{(a + x)}$; ſit ſumendum ejus integrale, quod quia ſimpliciter fieri non poteſt, addatur quantitati propoſitæ hæc $adx\sqrt{(a + x)}$, & habebitur $(adx + xdx)\sqrt{(a + x)}$; cujus integrale per Regulam invenitur $= \frac{2}{5}(a + x)^2\sqrt{(a + x)}$; ab hoc ſi auferatur in-

tegrale ipſius $adx\sqrt{(a+x)}$ quod eſt $\frac{2}{3}a(a+x)\sqrt{(a+x)}$ remanebit $\frac{2}{5}(a+x)^2\sqrt{(a+x)} - \frac{2}{3}a(a+x)\sqrt{(a+x)}$ pro integrali quantitatis propoſitæ $xdx\sqrt{(a+x)}$. Eodem modo invenitur integrale ipſius $xxdx\sqrt{(a+x)}$. Habetur enim integrale ipſius $(aa+2ax+xx)dx\sqrt{(a+x)}$, ut & quantitatis $aadx\sqrt{(a+x)}$ & per modo inventum ipſius $2axdx\sqrt{(a+x)}$, habebitur itaque etiam integrale reliqui $xxdx\sqrt{(a+x)}$. Pari ratione invenietur integrale quantitatis $x^3dx\sqrt{(a+x)}$ vel $x^4dx\sqrt{(a+x)}$ & quantitatis ipſius $x^p dx\sqrt{(a+x)}$. Sic etiam, ſi proponatur quantitas ex pluribus membris conſtans; ejus integrale habetur per partes, qualis eſt $(2ax^3+x^4)dx\sqrt{(a+x)}$ quæro primum integrale prioris membri $2ax^3dx\sqrt{(a+x)}$, & demum poſterioris $x^4dx\sqrt{(a+x)}$, quorum ſumma dabit integrale totius.

MONITUM.

Et hi ſunt præcipui caſus, qui occurrere poſſunt in ſumendis integralibus. Plures quidem, & vel infiniti alii reſtant, quorum ope ad integralia pervenitur; ſed, tum quia omnes in memoriam non cadunt, tum etiam quia plerique ad allatos reduci poſſunt, adeo ut & per hos ad optatum perveniri poſſit; vel denique quia attente conſideranti mille ſolvendorum modi, variique caſus pro datarum quantitatum natura ſponte ſeſe offerunt; impoſſibile non minus quam inutile eſſet, ſi plures alios præter appoſitos afferre vellemus: id annotaſſe ſufficiat, ſi dixerimus quod ab Integralium inventione illuſtriora quæque Matheſeos Problemata & Theoremata dependeant, tum ea quæ jam inventa ſunt, tum quæ adhuc inveniri deſiderantur; qualia ſunt quadraturæ ſpatiorum, rectificationes curvarum, cubificationes ſolidorum, methodus tangentium inverſa, vel inventiones naturæ curvarum ex proprietatibus tangentium datis &c: non minus quam ea quæ ad Mechanica ſpectant, ut ſunt; modus inveniendi centri gravitatis, percuſſionis, oſcillationis &c. Habentur quoque per inventionem Integralium evolutiones curvarum,

Digitized by Google

rum, moduſque earum naturas determinandi, & evolutionis ope ipſas curvas rectificandi, ſicuti fecit Dn. TSCHIRNHAUS in ſuis Cauſticis. Sed ut tam facile eſt cujuſcunque quantitatis propoſitæ reperire differentiale, ita, e contrario, tam difficile eſt aſſignare integrale cujuſcunque differentialis, adeo ut interdum, nequidem certo aſſerere poſſimus an quantitatis propoſitæ integrale poſſit ſumi, nec ne; id ſaltem affirmare audeo, quod cujuſcunque quantitatis integræ & rationalis multiplicatæ vel diviſæ per $x^p\sqrt{(aa-xx)}$, $x^p\sqrt{(ax-xx)}$, $x^p\sqrt{(aa+xx)}$ integrale vel haberi poſſit, vel ad quadraturam circuli aut hyperbolæ ſit reducibile; ut in ſequentibus docebimus. Omnino itaque & caute animadvertendum eſt, num quantitas propoſita, ex qua integrale elici debet, poſſit, vel per multiplicationem, vel per diviſionem, vel etiam per extractionem radicis, redigi ad quantitatem in qua habeatur unum horum ſignorum radicalium ductum in quantitatem rationalem & integram. Hoc ſi fieri poteſt, prompte aſſeverandum, quod integrale quantitatis datæ haberi poſſit; vel ſecus, quod id dependeat & reduci poſſit ad quadraturam circuli, aut hyperbolæ. Ut ſi, ex. gr. proponatur hæc quantitas, cujus integrale ſit ſumendum $(a^3+axx-x^3)dx\sqrt{\left(\frac{a+x}{x}\right)}$. Primo intuitu quidem videtur hujus integrale, nec ſumi poſſe, nec relationem habere ad quadraturam circuli. Si enim pro quantitate abſoluta accipiatur id quod eſt poſt ſignum radicale, nempe fractio $(a+x):x$, erit & ejus differentialis fractio, ita ut inde, juxta Regulam, nihil concludi poſſit. Ad hoc itaque evitandum, multiplico numeratorem & denominatorem fractionis irrationalis per numeratorem & productum numeratoris in ſeipſum, per reſiduum quantitatis rationale, ita ut exinde fiat fractio, cujus numerator eſt pure rationalis, & denominator irrationalis; erit nempe, $(a^3+axx-x^3)dx\sqrt{\left(\frac{a+x}{x}\right)} =$ huic quantitati $(a^4+aaxx+a^3x-x^4)dx:\sqrt{(ax+xx)}$, quæ mihi indicat, quod ſuum integrale, vel haberi, vel ad qua-

quadraturam hyperbolæ redigi queat; quo pacto autem id cognoſci poſſit & fiat, infra dabuntur Regulæ.

Quod ſupereſt, antequam ad Calculi Integralis uſum & applicationem perveniamus, oſtendemus alium modum Integralia ſumendi, qui interdum uſui venire poteſt, & qui methodum generalem non parum compendioſam reddit. Etenim aliquando, ob quantitatum propoſitarum prolixitatem, illico non patet, an illa reduci poſſit ad unum allatorum caſuum; adeoque an integrale habeat, vel non: hic autem modus quantitatem ad pauciora redigit membra, ut exinde nullo labore integrale quæſitum reperiatur. Hoc vero fit ponendo quantitatem quæ ſub ſigno radicali includitur, vel quantitatem quæ pro abſoluta ſumitur, æqualem literæ cuidam ſoli, & convertendo quantitatem datam, ſecundum hanc poſitionem, in aliam, quæ conſtat ex puris his literis ſubrogatis: hujus quantitatis, quæ plerunque multo brevior evadit, ſumatur integrale; quod iterum converti poteſt in integrale quæſitum, ſubſtituendo valorem litteræ aſſumtæ. Hoc melius per Exemplum patebit: Sit quantitas cujus integrale quæritur $= (ax + xx)dx\sqrt{(a + x)}$; pono in hunc finem $\sqrt{(a + x)} = y$; erit $x = yy - a$, proinde $dx = 2y\,dy$; totaque quantitas $(ax + xx)dx\sqrt{(a + x)} = 2y^6\,dy - 2ay^4\,dy$, cujus nunc integrale facile, & abſque omnibus ambagibus, ſtatim invenitur $= \frac{2}{7}y^7 - \frac{2}{5}ay^5$, vel, ſubſtituto valore ipſius y, habetur $\frac{2}{7}(x+a)^3\sqrt{(x+a)} - \frac{2}{5}a(x+a)^2\sqrt{(x+a)}$.

Eodem modo invenitur integrale quantitatis $(aa + 2xx)dx : \sqrt{(aa + xx)}$, ponendo $\sqrt{(aa + xx)} = y$; erit $x = \sqrt{(yy - aa)}$ & $dx = y\,dy : \sqrt{(yy - aa)}$; proinde quantitas $(aa + 2xx)dx : \sqrt{(aa + x^2)} = (2y^3 - aay)\,dy : \sqrt{(y^4 - aayy)}$. Hujuſque integrale eſt $= \sqrt{(y^4 - aayy)}$.

Non ſecus ſi habetur $(a - x)dx : \sqrt{(2ax - xx)}$; ponatur $\sqrt{(2ax - xx)} = y$; erit $x = a \pm \sqrt{(aa - yy)}$, $dx = \mp y\,dy : \sqrt{(aa - yy)}$ & $(a - x)dx : \sqrt{(2ax - xx)} = dy$, cujus integrale eſt $= y = \sqrt{(2ax - xx)}$.

Hæc itaque Regula in infinitis aliis applicari poteſt; & quidem in illis caſibus, qui ob prolixitatem quaſi pro deſperatis haberi

Digitized by Google

beri poſſunt : nam præterquam quod iſta Regula quantitatem propoſitam aliquando multo breviorem reddit, hunc inſuper uſum obtinet, quod ſtatim ob oculos ponat, an ex quantitate ita mutata integrale ſumi poſſit.

Omnibus his modis integralia inveniendi, addi poteſt & ſequens, qui ob magnam ſuam utilitatem & facilitatem omnibus fere cæteris præferri poteſt. Modus autem iſte circa illas duntaxat quantitates verſatur, quæ cum ſignis irrationalibus conjunctæ ſunt. Tota itaque illius praxis conſiſtit in hoc, ut quantitates irrationales in rationales convertantur, ita ut tota quantitas propoſita induat rationalitatem, ex qua dein integrale, ſi fieri poteſt, facile ſumitur. Non parum ergo conducunt ad hoc Quæſtiones *Diophanteæ*, quæ in hujuſmodi occaſionibus inſignem opem ferunt, ceu in exemplis clarius patebit: Sit ex. gr. $a^3dx : x\sqrt{(ax - xx)}$ ſumendum integrale, quod per nullum præcedentium modorum fieri poteſt, per hunc vero id ita præſtabitur : Quia $\sqrt{(ax - xx)}$ eſt quantitas irrationalis; ut rationalis reddatur, oportet ut $ax - xx$ ſit quadratum : ſit itaque $ax - xx = aaxx : mm$; erit ex hac ſuppoſitione $x = amm : (mm + aa)$ & proinde $\sqrt{(ax - xx)} = aam : (mm + aa)$, $dx = 2a^3 mdm : (mm + aa)^2$, adeoque tota quantitas propoſita $a^3dx : x\sqrt{(ax - xx)}$ erit $= 2a^3dm : mm$, cujus integrale facile habetur, nempe $= - 2a^3 : m$. Subſtituto nunc valore ipſius $m = \sqrt{(aax : (a - x))}$, habebitur $\sqrt{((4a^5 - 4a^4x) : x)} = 2aa \sqrt{((a - x) : x)} =$ integrali ipſius $a^3dx : x\sqrt{(ax - xx)}$. Pariter ſi integrale ſumendum eſt ex $dx\sqrt[3]{(xx + 2ax + aa)} : x$ oportet ut $xx + 2ax + aa$ ſit cubus : ſit ergo $x + a = y^3$, erit $x = y^3 - a$ & $dx = 3yydy$, & $\sqrt[3]{(xx + 2ax + aa)} = yy$; erit ideoque tota quantitas $dx\sqrt[3]{(xx + 2ax + aa)} : x = 3y^4dy : (y^3 - a)$, cujus ſi integrale haberi poteſt, habebitur etiam integrale quantitatis datæ.

Digitized by Google

LECTIO SECUNDA.

De Quadratura Spatiorum.

INter varios uſus, quos ex Calculo Integralium quærimus; primus fere ac præcipuus eſt, qui occurrit in quadrandis ſpatiis. Conſiderantur autem ſpatia ut diviſa in infinitas partes, quarum unaquæque pro differentiali ſpatii haberi poteſt; ita ut ſi integrale hujus differentialis, id eſt, ſumma harum partium habeatur, exinde quoque innoteſcat quadratura quæſita. Partes autem iſtæ infiniteſimæ, in ſpatiis planis, conſiderari poſſunt diverſis modis, prout commodiſſime permittunt omnes circumſtantiæ planorum. Vel enim, quod communiſſimum eſt, di-
TAB. LII. *Fig.* 1. *Fig.* 2. *Fig.* 3. *Fig.* 4.
viduntur plana per infinitas parallelas, ut *Fig. I*, vel per infinitas rectas in puncto coëuntes, ut *Fig. II*; vel per infinitas tangentes ut *Fig. III*; vel per infinitas ad curvam normales ut *Fig. IV*. Hæ diviſiones planorum generales ſunt, & quælibet cuilibet ſpatio accommodari poteſt. Spatium enim, utcunque diviſum, conſtat ex omnibus ſuis partibus. Plerunque autem is dividendi modus ſeligitur qui cum natura, vel generatione ſpatii quam aptiſſime convenit, & per quem breviſſime & facillime ad quadraturam pervenitur. Inſolitum etenim, & contra bonæ methodi leges eſſet, ſi quis quadraturam Parabolæ quæreret per diviſionem quam monſtrat *Fig. II*; & e contra ingentem laborem fruſtra ſubiret, ſi quis quadrare vellet quaſcunque Spirales ope diviſionis parallelæ, qualis exſtat in *Fig. I.* Natura enim Parabolæ, Paraboloideorum, & hujuſmodi curvarum poſcit dividentes parallelas; Spiralium autem generatio convergentes potius adhibendas eſſe monſtrat. Aliæ inſuper diviſiones ſpeciales in uſum vocari poſſunt, prout id cujuſdam curvæ natura vel proprietas quam aptiſſime ſuadet. Spatium ex. gr.
TAB. LII. *Fig.* 5.
ABCD conchoidale conſiderari poteſt, ut diviſum in infinita trapezia, quorum latera convergunt in centro E. Verum interim eſt, quod interdum occurrant ſpatia, quæ æque facile

uno

Digitized by Google

uno vel altero modo diviſa intelligi, & ad calculum revocari poſſunt; ut id apparet in Circulo & Hyperbola, in quibus ſpatium circulare & hyperbolicum, vel ſecundum applicatas parallelas, vel ſecundum lineas a centro ad curvam divergentes æque commode dividi poteſt.

Quocunque demum modo (ut tandem ad quadraturas ipſas perveniamus) ſpatia diviſa concipiantur; ſi exinde area totius haberi cupiatur, oportet ut unius partium indefinite parvarum quæratur valor, qui non niſi litteris determinatis & unica tantum ſpecie indeterminatarum conſiſtat; quod ſemper haberi poteſt per naturam & generationem curvæ; & hujus quantitatis, tanquam differentialis, inveniendum eſt integrale; quod deſignabit quadraturam ſpatii.

Si diviſiones ſpatii ſunt parallelæ, differentiale ſpatii, ſuppoſita abſciſſa x & applicata y, erit ydx, rectangulum nempe inter applicatam & differentiale abſciſſæ. Si itaque AC ſit curva data, habebit y certam rationem ad x, ita ut ydx in puris x pronuncietur. Ex. gr. Sit AC Parabola, & proinde $ax = yy$, vel $y = \sqrt{ax}$; erit $ydx = dx\sqrt{ax}$; hujus itaque integrale, quod eſt $\frac{2}{3}x\sqrt{ax}$, vel $\frac{2}{3}xy$, erit ſpatium quæſitum. TAB. LII. Fig. 6.

Si diviſiones coëunt in puncto, differentiale ſpatii eſt $\frac{1}{2}ydx$; triangulum nempe, cujus unum latus eſt y, & altitudo, arcus infinite parvus, puncto concurſus tanquam centro, per extremitatem minoris y deſcriptus, qui pro recta linea habendus eſt; hic autem arculus certam ſemper relationem habet ad y, pro data natura curvæ. Sit, v. gr., ABC ſpatium logarithmicum ſpirale; quia itaque y angulum conſtantem facit ad curvam, habebit dy ad dx rationem conſtantem: Sit ut a ad b; erit $dx = bdy : a$; proinde $\frac{1}{2}ydx = ybdy : 2a$; hujus ergo integrale $byy : 4a$ eſt æquale ſpatio. TAB. LII. Fig. 7.

Eodem modo ratiocinandum eſt in aliis diviſionum modis. Si autem integrale ipſius ydx vel $\frac{1}{2}ydx$ ſumi non poteſt, tentatis omnibus methodis quas ſupra dedimus, ſignum eſt ſpatium propoſitum quadrabile non eſſe; vel ſaltem illius quadraturam nondum haberi. Hoc nobis contingit in inquiſitione quadraturæ

Digitized by Google

Circuli & Hyperbolæ; ubi pervenimus ad valorem ydx, cujus integrale hucuſque invenire nequimus. Aliorum tamen ſpatiorum, quorum differentialia ydx exprimuntur per quantitatem rationalem, ductam, vel diviſam in applicatam Circuli vel Hyperbolæ, quadratura ſemper, vel omnino habetur, aut ſaltem ad quadraturam Circuli vel Hyperbolæ reduci poteſt; id quod ſupra promiſimus, nunc effectui dabimus. Videamus autem prius quoſdam modos, quibus differentiale ſpatii circularis vel hyperbolici

TAB.LII. *Fig.* 8. exprimi poteſt. Sit ADC ſemicirculus, $AC = 2a$, $AB = x$, ergo $DB = \sqrt{(2ax - xx)}$, & proinde differentiale ſpatium $BDdb = dx\sqrt{(2ax - x)}$, cujus integrale dat ſegmentum ABD.

Sit $BE = x$, erit $BD = \sqrt{(aa - xx)}$; ſpatium differentiale $BDdb = dx\sqrt{(aa - xx)}$.

Sit AB iterum x, erit portiuncula curvæ $dD = adx : \sqrt{(2ax - xx)}$, proinde triangulum $DEd = aadx : 2\sqrt{(2ax - xx)}$; cujus integrale dat ſectorem AED.

Sit $BE = x$, erit $dD = adx : \sqrt{(aa - xx)}$ & triangulum $DEd = aadx : 2\sqrt{(aa - xx)}$.

TAB.LII. *Fig.* 9. Sit ABD ſemicirculus, $AD = a$, $AB = x$; erit $BD = \sqrt{(aa - xx)}$, proinde $BC = xdx : \sqrt{(aa - xx)}$ & triang. $ABC = xxdx : 2\sqrt{(aa - xx)}$, cujus integrale = ſegmento AB.

TAB.LII. *Fig.* 10. Sit nunc, ABC Hyperbola æquilatera, $BD = 2a$, $BF = x$; erit $AF = \sqrt{(2ax + xx)}$, & ſpatium differentiale $AFfa = dx\sqrt{(2ax + xx)}$, cujus integrale = ſpatio AFB.

Sit $EF = x$, ergo $AF = \sqrt{(xx - aa)}$ & diff. ſp. $AFfa = dx\sqrt{(xx - aa)}$.

Sit $EH = x$, erit $HI = \sqrt{(aa + xx)}$ $EI = \sqrt{(aa + 2xx)}$ ideoque triang. $EKI = \frac{1}{2}aadx : \sqrt{(aa + xx)}$, cujus integr. = ſp. EBI.

Si $HI = x$ provenit triang. $EKI = \frac{1}{2}aadx : \sqrt{(xx - aa)}$.

Omnes hæ diverſæ expreſſiones, eandem quadraturam Circuli videlicet, & Hyperbolæ, ſed diverſo modo ſumptam includunt; ſi itaque differentiale cujuſdam ſpatii ad unam harum formularum redigi poteſt, poterit dari Circulus, vel Hyperbola, aut ſegmentum Circuli vel Hyperbolæ ſpatio dato æquale; omnia autem

Digitized by Google

N°. CXLIX.

Fig. 2.



Fig. 3.

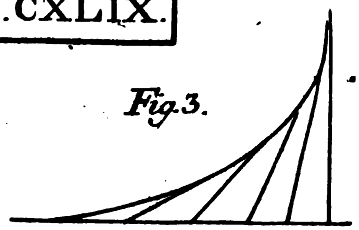


Fig. 6.

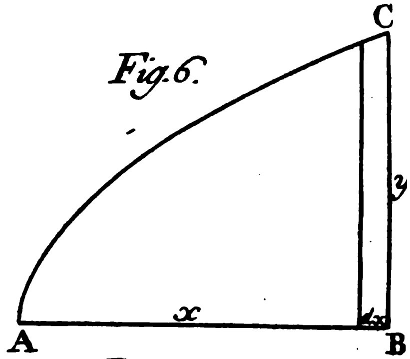


Fig. 5.

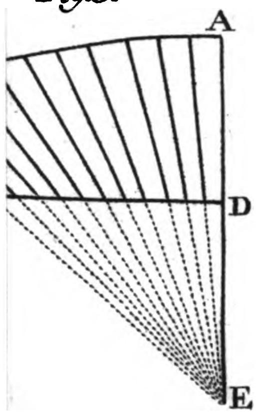


Fig. 10.

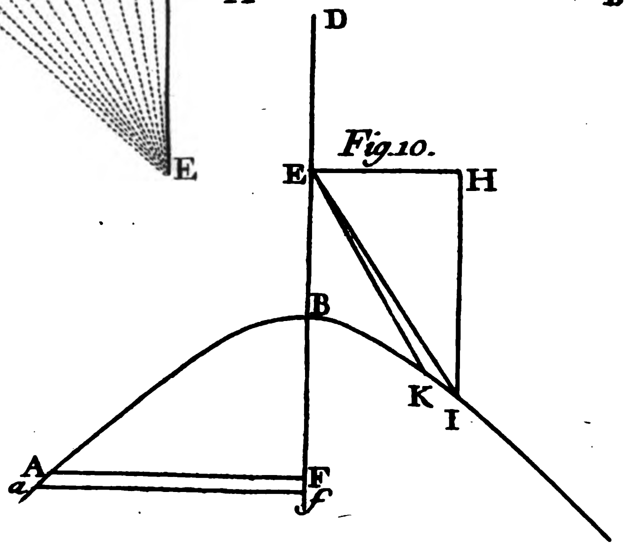
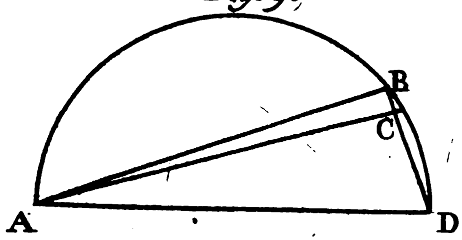


Fig. 9.



Digitized by Google

autem iſta ſpatia, quorum differentiale exprimitur per quantitatem rationalem, multiplicatam, vel diviſam, per applicatam Circuli vel Hyperbolæ, id eſt, vel per $\sqrt{(ax - xx)}$, vel per $\sqrt{(aa - xx)}$, vel per $\sqrt{(ax + xx)}$, vel per $\sqrt{(aa + xx)}$, vel per $\sqrt{(xx - aa)}$ &c. omnia inquam iſta ſpatia aut quadrabimus, aut Circulo vel Hyperbolæ æquabimus. Quod ita fit. Si quantitas rationalis propoſiti differentialis conſtat uno, vel pluribus membris; obſervandum eſt, num quid addi vel demi poſſit quantitati datæ, ita ut integrale exinde poſſit ſumi; hoc facto, ſi additi vel dempti etiam habeatur integrale, innoteſcet quoque integrale quantitatis datæ; ſi vero additum, vel demptum, ſit differentiale ſpatii circularis vel hyperbolici, patet & integrale quæſitum ad hujuſmodi ſpatium redigi poſſe. Ex. gr. Quæritur integrale ex hac quantitate $xdx \sqrt{(2ax + xx)}$. Ad hoc faciendum, procedatur hoc modo: $xdx \sqrt{(2ax + xx)} = (adx + xdx) \sqrt{(2ax + xx)} - adx \sqrt{(2ax + xx)}$; quia nunc integrale prioris habetur, & poſterioris indicat quadraturam Hyperbolæ, erit quæſito ſatisfactum.

Si vero quid addendum demendumve ſit non innoteſcat; id tamen per Regulam generalem ſolvi poteſt, quæ vult ut ante omnia ſignum radicale transferatur in denominatorem, ut numerator omnino rationalis evadat; dein membrum numeratoris, ubi littera indeterminata plurimas habet dimenſiones, ad plures adhuc dimenſiones elevetur, ſicut & radix ſurda, quæ,

 quo-

NB. Hujuſmodi quantitas $\frac{a^3 dm \pm aamdm}{bm \pm mm}$ poteſt conſtrui per Logarithmicam. Si nimirum quæratur per quotam poteſtatem ipſius m, multiplicandus ſit numerator & denominator, ita ut numerator evadat multiplex vel ſubmultiplex ipſius denominatoris differentiati. Ita etiam hæc quantitas reduci poteſt ad Logarithmicam, nempe $\frac{adm}{am + mm}$; eſt enim æqualis huic quantitati $\frac{adm + omdm}{am + mm}$ quæ jam reduci poteſt ut ante; non minus etiam reducitur $\frac{adm}{aa - mm}$, ſed oportet ut prius in præcedentem convertatur, ſupponendo $m = n + a$.

quotieſcunque membrum ſuperius multiplicatur per dimenſionem quandam indeterminatæ, iſta per duplam dimenſionem multiplicatur; ſic enim fractio ſemper æqualis manebit: multiplicatio itaque eouſque continuari debet, donec litteræ indeterminatæ plurima dimenſio in radice unitate excedat membrum ejuſdem litteræ plurimæ dimenſionis in numeratore; & tunc huic membro, in talem formam reducto, addatur vel de illo dematur quantitas talis ut de ſumma integrale ſumi poſſit; id quod ſemper fieri poteſt. Hoc facto, idem peragi debet cum hac addita vel dempta, ſed cum ſigno contrario, cui adjungitur proxime ſequens: & ita tandem deſcenditur ad ultimum membrum ex quo neceſſario poteſt integrale ſumi, aut Circulo vel Hyperbolæ æquari; id quod melius per exemplum apparet.

Sit quantitas cujus integrale quæritur $= (aax + x^3)\, dx \sqrt{(xx - aa)}$. Hoc ſic perficitur; $(aax + x^3)\, dx \sqrt{(xx - aa)}$ $= \frac{(x^5 - a^4 x)dx}{\sqrt{(xx - aa)}} =$ (A) $\frac{x^9 dx - \frac{4}{5} aax^7 dx}{\sqrt{(x^{10} - aax^8)}}$ — (B) $\frac{a^4 x dx}{\sqrt{(xx - aa)}} +$ $\left[\frac{\frac{4}{5} a^2 x^5 dx}{\sqrt{(x^6 - aax^4)}}\right]$ (C) $\frac{\frac{4}{5} a^2 x^5 dx - \frac{8}{15} a^4 x^3 dx}{\sqrt{(x^6 - aax^4)}}$ + (D) $\frac{\frac{8}{15} a^4 x dx}{\sqrt{(xx - aa)}}$. Quantitas itaque propoſita $(aaxdx + x^3 dx) \sqrt{(xx - aa)} =$ A + B + C + D: Verum A & C habent integralia, per conſtructionem, ut & B & D reſidua, quæ per ſe patent; ideoque totius quantitatis integrale inventum eſt.

Eodem modo, ſi proponatur quantitas cujus integrale inveniendum eſt $(2ax - xx)\, dx \sqrt{(2ax - xx)}$, habeo primo per multiplicationem hanc æquationem $(2ax - xx)\, dx \sqrt{(2ax - xx)} =$ $\frac{(4aaxx - 4ax^3 + x^4)dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} =$ (A) $\frac{(x^7 - \frac{7}{4} ax^6)dx}{\sqrt{(2ax^7 - x^8)}}$ + (B) $\frac{(-\frac{9}{4} ax^5 + \frac{15}{4} a^2 x^4)dx}{\sqrt{(2ax^5 - x^6)}}$ + (C) $\frac{(\frac{1}{2} aax^3 - \frac{3}{8} a^3 x^2)dx}{\sqrt{(2ax^3 - x^4)}}$ + (D) $\frac{(\frac{3}{8} a^3 x - \frac{3}{8} a^4)dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ + (E) $\frac{\frac{3}{8} a^4 dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ Poteſt autem integrale ſumi ex quantitate A, B, C, D, & reſiduum E oſtendit adhibendum eſſe Circulum, ut patet ex ſupra dictis; ideoque integrale quantitatis datæ reductum eſt ad quadraturam Circuli. *Q. E. F.*

Invenien-

Inveniendum ſit integrale ex quantitate $a^4dx : xx\sqrt{(xx\pm aa)}$. Sit $x = aa : m$; erit $dx = -aadm : mm$. Æquatio inventa convertetur in hanc, $-aamdm : \sqrt{(a^4 \pm a^2m^2)}$, cujus integrale eſt $\mp\sqrt{(a^4 \pm aamm)}$: ſubſtituto valore habetur $\mp\sqrt{(a^4 \pm a^6 : xx)}$. Eodem modo ſi proponatur $aadx : (aa+xx)^{\frac{3}{2}}$; eſto $aa+xx = mm$, erit $xx = mm - aa$ & $dx = mdm : \sqrt{(mm - aa)}$, & tota quantitas $aadx : (aa+xx)^{\frac{3}{2}} = aadm : mm\sqrt{(mm - aa)}$, cujus integrale per modum præcedentem facile invenitur.

LECTIO TERTIA.

Variarum Curvarum Quadraturæ.

HÆc, quæ hactenus dicta ſunt de ſpatiis, facile accommodari poſſunt ſolidis: Plana quippe, quæ dividunt ſolida in partes infinitas, conſiderari poſſunt, ut lineæ quæ ſpatia dividunt; ſiquidem id conceptui non repugnat, ſi modo plana iſta per litteram conſtantem diviſa ponantur, ex qua poſitione emergent lineæ conſtituentes ſpatium, quod, reſpectu quadraturæ ſuæ, eandem magnitudinem habet quam obtinet ſolidum propoſitum, reſpectu ſuæ cubificationis. Corporibus itaque cubificandis ſeorſim non immorabimur; ſed ſaltem varia ſpatia tum quadranda, tum Circulo vel Hyperbolæ adæquanda, ut calculi hujus uſus pateat, promiſcue proponamus. Ubi primo notandum, quod ſi pro integrali differentialis ſpatii propoſiti proveniat quantitas negativa, id indigitet non eſſe ſpatium immediate ſuper abſciſſa contentum, quod per hanc quantitatem exprimatur; ſed eſſe ſpatium oppoſitum, id eſt, illud quod reſiduo axi inſiſtit. Sit ex. gr. DGE Hyperboloides, cujus natura eſt [ſuppoſito BF TAB. LIII. Fig. 11. $= x$, FG $= y$; conſtans quædam $= a$] $a^3 = xxy$, ergo $y = a^3 : x^2$ & $ydx = a^3\,dx : xx$. Hujus autem integrale $= -a^3 : x$. Hoc, quia eſt negativum, oſtendit non eſſe æquale ſpatio ABFGD, ſed reliquo GFCE: quod vel exinde patet, quod quo majus x eſt, quantitas $a^3 : x$ evadat minor; ut ideo pro hoc non

ſit

ſit ſumendum ſpatium ABFGD, quippe quod creſcente x & ipſum creſcit. Hoc ut in poſterum obſervetur dixiſſe ſufficit: ſequuntur nunc quædam Problemata.

TAB. LIII. *Fig.* 12.

I. Sit BCE, curva quædam, AB $= a$, AD $= x$, DC $= y$: natura curvæ eſt hæc $a^7 x - a^8 = x^6 yy$, quæritur quadratura ſpatii, vel ſaltem Circulus ipſi æqualis? Quod ſic fit: Per datam æquationem eſt $y = a^3 \surd (ax - aa) : x^3$, ideoque $y dx = a^3 dx \surd (ax - aa) : x^3$; ſit $x = aa : m$, erit ergo $dx = - aadm : mm$, $x^3 = a^6 : m^3$ & $\surd (ax - aa) = a \surd ((a - m) : m)$, proinde tota quantitas propoſita $a^3 dx \surd (ax - aa) : x^3 = - dm \surd (am - mm)$, cujus integrale, quia eſt quantitas negativa, oſtendit, non ſpatio BCD, ſed reliquo FDCE eſſe æquale. Si itaque ſuper AB deſcribatur ſemicirculus AGB, & ſumatur BH $= m = aa : x$, erit ſegmentum BHG $=$ ſpatio FDCE; ex quo ſequitur totum ſpatium BCEF æquale eſſe ſemicirculo AGB, & proinde ſegmentum AHG $=$ ſpatio BCD. Ubi obiter notandum, quod ſi BD $= \frac{1}{5}$ AB, DC ſit omnium applicatarum maxima.

In hoc Problemate, ſi ſupponatur $a = x$, erit $x^6 yy = 0$, & per conſequens $y = 0$; ex quo concluditur, curvam Problemati ſatisfacientem inchoare in puncto B. Si vero $x = \infty$, $x - a = x$, & $a^7 x = x^6 yy$, $a^7 = x^5 yy$; reducta æquatione in proportionem $x^5 : a^5 = aa : yy$; quia itaque x^5 eſt infinities major quam a^5, erit aa quoque infinities major quam yy; ergo y in hoc caſu $= 0$, id eſt, curva BCE & recta ABF occurrunt invicem in infinito.

TAB. LIII. *Fig.* 13, 14. & 15.

II. ADK [*Fig.* XIII.] eſt Curva Conchoidalis; quæritur ſpatium ABGD? Sit AB $=$ GD $=$ BC $= a$, HC $= x$, HI $= dx$, HB : BC $=$ HI : IG; erit ergo IG $= adx : \surd (xx - aa)$; CG : CD $=$ GI : DF; proinde DF $= (ax + aa) dx : x \surd (xx - aa)$. Verum (DF $+$ GI) $\times \frac{1}{2}$ DG $=$ trapezio FG, ideoque trapezium FG $= (2a^2 x + a^3) dx : 2x \surd (x^2 - a^2)$. Hujus itaque integrale æquale eſt ſpatio ABGD: ſumitur autem hoc modo: $(2a^2 x + a^3) dx : 2x \surd (x^2 - a^2) = a^2 dx : \surd (x^2 - a^2) + a^3 dx : 2x \surd (x^2 - a^2)$. Integrale prioris habetur,

betur, facta Hyperbola æquilatera MNO [*Fig. XIV*,] cujus ſemidiameter $NQ = a$, $QP = x$, erit ſpatium $QMN =$ Integr. $\frac{1}{2} a^2 dx : \surd (x^2 - a^2)$; reſtat igitur ut integrale ſumatur ex $a^3 dx : 2x \surd (x^2 - a^2)$. Ad hoc præſtandum ſit $xx - aa = xx - 2mx + mm$, erit $x = (aa + mm) : 2m$, $dx = (mmdm - aadm) : 2mm$, $\surd (xx - aa) = (aa - mm) : 2m$, & tota quantitas $= a^3 dx : 2x \surd (xx - aa) = a^3 dm : (aa + mm)$. Si itaque fiat curva cujus abſciſſa $= m$ & ordinata $z = a^3 : (aa + mm)$, erit ſpat. $=$ integrali $a^3 dm : (aa + mm)$, vel zdm. Ut itaque hoc ſpatium habeatur, quæratur ejus complementum $NOR =$ integr. $mdz = (aa - az) dz : \surd (az - zz) = \frac{1}{2} aadz : \surd (az - zz) + (\frac{1}{2} aa - az) dz : \surd (az - zz)$. Prioris integrale eſt quadruplum ſectoris Circuli, cujus diameter $= a$, & abſciſſa $= z$; poſterioris vero integrale $= \frac{1}{2} a \surd (az - zz)$; proinde integrale ipſius $zdm = mz -$ quadr. ſect. $- \frac{1}{2} a \surd (az - zz)$.

Erit itaque ſpatium Conchoidale æquale ſpatio hyperbolico, rectilineo, & circulari.

NB. Integrale ipſius $a^3 dx : 2x \surd (xx - aa)$ aliter haberi ſic poteſt. Sit $x = aa : n$, erit $dx = - aadn : nn$, $\surd (xx - aa) = a \surd (aa - nn) : n$, ideoque $a^3 dx : 2x \surd (xx - aa) = - aadn : 2 \surd (aa - nn)$. Integrale hujus habetur, ſi fiat quadrans circuli TRW [*Fig. XV*] & abſcindatur $SR = n = aa : x$ & erit, ob ſignum $-$, ſector TRV integrale quantitatis $a^3 dx : 2x \surd (xx - aa)$; ideoque ſpatium conchoidale $=$ ſpatio hyperbolico QMN [*Fig. XIV*] + Sect. TRV [*Fig. XV*].

III. Data eſt curva AC, cujus natura eſt [poſito $AB = x$, $BC = y$,] $a^5 xxyy - x^9 = a^6 y^3$; quæritur ſpatium ABC? Sit $y = xx : m$ & formabitur æquatio in hanc, $a^5 m - m^3 x^3 = a^6$; erit ideoque $x = a \sqrt[3]{(aam - a^3)} : m$ & $y = aa \sqrt[3]{(aam - a^3)^2} : m^3$; proinde quoque $dx = a^3 dm : 3m \sqrt[3]{(aam - a^3)^2} - adm \sqrt[3]{(aam - a^3)} : mm$ & $ydx = a^5 dm : 3m^4 - (a^5 m - a^6) dm : m^5 = a^6 dm : m^5 - 2a^5 dm : 3m^4$; horum integralia, quæ ſunt $- a^6 : 4m^4 + 2a^5 : 9m^3$ dabunt ſpatium quæſitum, vel, ſubſtituto valore ipſius $m = xx : y$, habebitur ſpatium $ABC = - a^6 y^4 : 4x^8 + 2a^5 y^3 : 9x^6$. Q. E. F. TAB. LIII. *Fig.* 16.

TAB. LIII. *Fig.* 17. 18. 19. IV. Datur alia curva DEB, [*Fig. XVII*] AC $= x$; CE $= y$. Natura ejus eſt $y^4 - 6aayy + 4xxyy + a^4 = 0$; quæritur ſpatium curvilineum? Quod ſic peragitur. Per æquationem invenitur $x = \surd(-y^4 + 6aayy - a^4) : 2y$. Sit $(y^4 - 2aayy + a^4) : 4yy = mm$, erit $(yy - aa) : 2y = m$, ac etiam $(aa - yy) : 2y = m$. Per priorem ſuppoſitionem eſt $y = +m + \surd(mm + aa)$; per alteram vero $y = -m + \surd(mm + aa)$. Invenitur pro $x = \surd(-y^4 + 6aayy - a^4) : 2y = \surd(aa - mm)$, $dy = +dm + mdm : \surd(mm + aa)$, vel $dy = -dm + mdm : \surd(mm + aa)$; proinde $xdy = \pm dm \surd(aa - mm) + mdm \surd(aa - mm) : \surd(mm + aa)$. Integrale prioris habetur, ſi fiat circulus ABE [*Fig. XVIII*] cujus radius AD $= a$, CD $= m$, erit ſegmentum BCDE integrale ipſius $\pm dm \surd(aa - mm)$, quod addendum, vel auferendum eſt, prout y majus vel minus eſt quam a, ab integrali poſterioris $mdm \surd(aa - mm) : \surd(aa + mm)$ quod ſic invenitur. Sit $aa + mm = nn$, erit $mdm = ndn$; $\surd(aa - mm) = \surd(2aa - nn)$; $\surd(aa + mm) = n$; proinde tota quantitas $mdm \surd(aa - mm) : \surd(aa + nn) = dn \surd(2aa - nn)$; cujus integrale ſic invenitur: Conſtruatur circulus FGH [*Fig. XIX*] cujus radius FK $= a\surd 2$, IK $= n$, erit GIKH integrale quæſitum. Summa itaque, vel differentia, horum ſegmentorum eſt æqualis ſpatio quæſito.

TAB. LIV. *Fig.* 20. V. Datur curva BDE, in qua AC $= x$, CD $= y$, AB $= a$; natura curvæ exprimitur per hanc æquationem $a^3 : (xx + aa) = y$; quæritur ſpatium curvilineum AD? Hoc duplici modo ſolvi poteſt: *Primus*. Sit $xx + aa = mm$, erit $x = \surd(mm - aa)$, $dx = mdm : \surd(mm - aa)$, & $y = a^3 : (xx + aa) = a^3 : mm$ proinde $ydx = a^3 dm : m \surd(mm - aa)$: hujus nunc integrale ſumitur ut ſupra in Conchoide factum †. *Secundus*. Quærendum eſt complementum ſpatii curvilinei; quod ita fit. $a^3 : (xx + aa) = y$; ergo $a^3 = xxy + aay$, & $\surd(a^3 - aay) : \surd y = x$, proinde $xdy = ady \surd(a - y) : \surd y = (aa - ay) dy : \surd(ay - yy) = \frac{1}{2} aady : \surd(ay - yy) + (\frac{1}{2} aady - aydy) : \surd(ay - yy)$. Integrale poſterioris æquale eſt $a \surd(ay - yy)$; prioris vero habetur, ſi conſtruatur circulus AKB ſuper diametro AB, & producatur

† Pag. præced. ab init.

N°. CXLIX

Fig. 12.

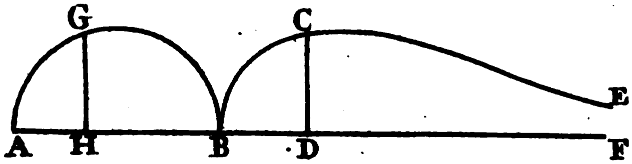
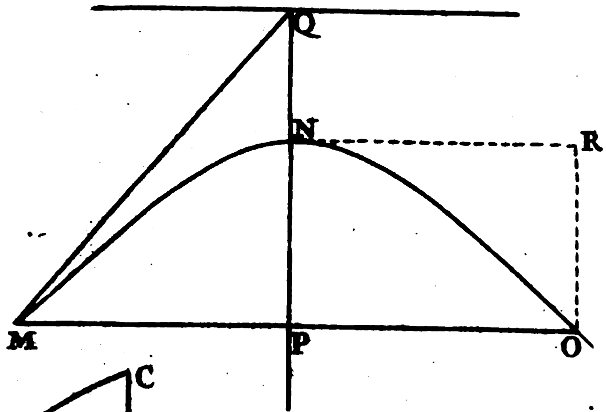


Fig. 14.



16.

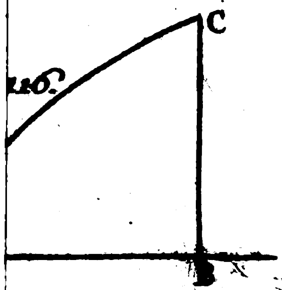
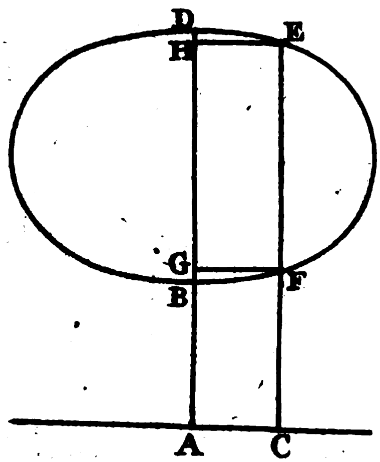


Fig. 17.



g.19.



Digitized by Google

tur DG parallela ipſi AC uſque ad K; erit quadruplum ſectoris KHA integrale ipſius $\frac{1}{2}aady : \sqrt{(ay - yy)}$. Spatium itaque FAGDE æquale eſt 4 ſect: KHA + rectang. AB × KG. Notetur quod ſi ſumatur $AC = AB\sqrt{\frac{1}{3}}$, punctum D ſit punctum flexus curvæ BDE.

VI. Iiſdem poſitis ſit $axx : (xx + aa)$, erit $axx = xxy + aay$; proindeque $x = \sqrt{ay} : \sqrt{(a - y)}$, & $xdy = ady\sqrt{y} : \sqrt{(a-y)} = aydy : \sqrt{(ay - yy)} = (-\frac{1}{2}aady + aydy) : \sqrt{(ay - yy)} + \frac{1}{2}aady : \sqrt{(ay - yy)}$.

Integrale prioris eſt $= -a\sqrt{(ay - yy)}$; pro poſteriori vero fiat circulus AKB cujus diameter ſit AB; erit producta DG ad K quadruplum ſectoris KHA = integrali ipſius $\frac{1}{2}aady : \sqrt{(ay - yy)}$; erit ergo ſpatium AGD = 4 ſect: HKA — rectang. AB × KG. Sequitur ex his, quod ſpatia iſta duo ABEF [*Fig.* XX & XXI] in infinitum protenſa ſint inter ſe æqualia, utrumque etenim æquatur 4 ſemicirculis AKB. Hoc & verum eſſe conſtat exinde, quoniam hæ duæ curvæ ſunt eadem, & alia differentia inter eas non eſt, niſi quod in priore linea AF ſit pro axe ſumpta, quæ in poſteriore aſymptota eſt BE. TAB. LIV. *Fig.* 21.

LECTIO QUARTA.

Variarum Curvarum Quadratura.

VII. Invenire quadraturam ſpatii curvilinei ABC, vel ABD, cujus natura eſt [poſito $AB = x$, BC vel $BD = y$] $x^3 + y^3 = axy$? Hoc iterum duplici modo ſolvitur. TAB. LVI. *Fig.* 24.

Primus. Sit $y = axx : mm$, æquatio propoſita reducetur ad hanc $m^6 + a^3x^3 = aam^4$, proinde $x^3 = (aam^4 - m^6) : a^3$, & $xxdx = 4aam^3dm : 3a^3 - 6m^5dm : 3a^3$; hoc ſi multiplicetur per $a : mm$, provenit $ydx = 4\,aamdm : 3a^2 - 6m^3dm : 3a^2$; hujus itaque integrale $\frac{2}{3}mm - \frac{1}{2}m^4 : a^2 =$ ſpatio quæſito, vel, ſubſtituto valore ipſius m, habebitur $\frac{2}{3}ax^2 : y - \frac{1}{2}x^4 : y^2$. Hinc ſi $x = y = \frac{1}{2}a$, id eſt, ſi punctum D cadit in E, erit ſpa-

Digitized by Google

tium ADB $= \frac{5}{24} aa$; a quo ſi auferatur triangulum ABE $= \frac{1}{8} aa$, remanebit ſpatium AED $= \frac{1}{12} aa$ vel totum ACEDA $= \frac{1}{6} aa$. Hoc modo, idem aliter quoque inveniri poteſt; ponendo $y = mxx : a^2$, mutabitur æquatio naturam exprimens in aliam $a^6 + m^3x^3 = a^5 m$, ideoque $x^3 = (a^5 m - a^6) : m^3$, & $xxdx = (-2a^5 m dm + 3a^6 dm) : 3m^4$, idcirco $ydx = mxxdx : aa = -2a^3 dm : 3m^2 + a^4 dm : m^3$. Sumantur integralia $2a^3 : 3m - a^4 : 2mm =$ ſpatio curvilineo; ſubſtituatur valor ipſius m habebitur $2ax^2 : 3y - x^4 : 2y^2 =$ ſpatio ABC.

Secundus modus. Convertatur æquatio curvæ in aliam, in qua litteræ exprimunt relationem AF ad FC, ubi axis erit linea AE biſecans angulum rectum IAB. Sit itaque AF $= s$, FC $= t$, erit ob CB $=$ BL, quia ang. CLB $=$ angulo FAB $= 45$ grad. ideoque triangulum CBL iſoſceles, $s = (x + y)\sqrt{\frac{1}{2}}$ & $t = (x - y)\sqrt{\frac{1}{2}}$; per priorem invenitur $x = s\sqrt{2} - y$; ſi itaque in æquatione $x^3 + y^3 = axy$ ſubſtituatur ejus valor, proveniet $2s^3\sqrt{2} - 6ssy + 3syy\sqrt{2} - asy\sqrt{2} + ayy = 0$, quia autem $t = (x - y)\sqrt{\frac{1}{2}}$, erit $y = x - t\sqrt{2} = s\sqrt{2} - y - t\sqrt{2}$, ideoque $y = (s - t)\sqrt{\frac{1}{2}}$, ſubrogetur valor ipſius y in æquatione inventa, id eſt

2s

N O T A.

Ex æquatione $x^3 + y^3 = axy$, apparet primo x & y habere ſimiles poſitiones, id eſt, ſive x conſideretur ut abſciſſa, & y ut applicata, ſive y ut abſciſſa & x ut applicata, provenire eandem naturam curvæ.

Secundo, Si x ſupponatur $= y$; eſſe etiam $= \frac{1}{2} a$. Et ſi $x = 0$, y quoque $= 0$. Unde concluditur, lineam AE angulum rectum IAB biſecantem eſſe axem hujus curvæ.

Si in ſecundo modo $s = a : \sqrt{2}$, $t = \frac{0}{\sqrt{7a}} = 0$, & ſi $s = 0$, $t = \frac{0}{\sqrt{a}} = 0$. Ex quo ſequitur AE curvam ſecare in A & E. Si s major quam $a : \sqrt{2}$, erit $t = \sqrt{}$ quantitatis negativæ, quod fieri non poteſt; ergo E vertex hujus curvæ.

Si s ſumatur ex adverſa parte, id eſt, ſi ſumatur $-s$, erit etiam t ſigno $-$ affectum; quod indicat curvam ADEC, continuatam ab utraque parte, ſe ipſam ſecare in puncto A, &c.

Digitized by Google

$$
\begin{array}{rcl}
2s^3\sqrt{2} & = & +4s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\
-6ssy & = & -6s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}+6sst\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\
+3syy\sqrt{2} & = & +3s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}-6sst\sqrt{\tfrac{1}{2}}+3stt\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\
-asy\sqrt{2} & = & -ass \quad +ast \\
+ayy & = & +\tfrac{1}{2}ass \quad -ast+\tfrac{1}{2}att \\
\hline
0 & = & s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}ass \quad +3stt\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}att
\end{array}
$$

Erit ergo $tt=(ass-s^3\sqrt{2}):(3s\sqrt{2}+a)$ & $t=s\sqrt{(a-s\sqrt{2})}:\sqrt{(3s\sqrt{2}+a)}$. Sit nunc $a-s\sqrt{2}=mm$, erit $s=(a-mm):\sqrt{2}$, $ds=mdm\sqrt{2}$, $s\sqrt{(a-s\sqrt{2})}=(am-m^3):\sqrt{2}$, $\sqrt{(3s\sqrt{2}+a)}=\sqrt{(4a-3mm)}$, ideoque tds $[s\sqrt{(a-s\sqrt{2})}ds:\sqrt{(3s\sqrt{2}+a)}]=(-amm+m^4)dm:\sqrt{(4a-3m^2)}=(-am^5+m^7)\,dm:\sqrt{(4am^6-3m^8)}$. Hujus itaque integrale $=-\tfrac{1}{12}\sqrt{(4am^6-3m^8)}=-\tfrac{1}{12}m^3\sqrt{(4a-3mm)}$ vel, ſubſtituto valore ipſius m, habetur $-\tfrac{1}{12}\sqrt{(a-s\sqrt{2})^3}\sqrt{(a+3s\sqrt{2})}=$ ſpatio AFC, aut potius EFC; nam ſuppoſito $AF=s=0$, ita ut ſpatium AFC ſit nihil, invenitur tamen pro ſpatio quadrando $-\tfrac{1}{12}aa$; id quod manifeſte oſtendit, quod ſit ſpatium EFC intelligendum, ſiquidem & ſupra invenimus quod ECA ſit $=\tfrac{1}{12}aa$. Obiter hic animadvertendum, quod ſumpta $AG=\tfrac{1}{3}AE$, id eſt, $s=-\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, t deveniat $=\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{4}{3}a}:\sqrt{0\,a}=\infty$, id eſt, quod GH ſit aſymptota curvæ propoſitæ DAL. Notabile quoque eſt, quod ſpatium ECA ſit $=$ ſpatio KAGH; nam poſito $s=-\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ provenit $-\tfrac{1}{12}\sqrt{(a-s\sqrt{2})^3}\sqrt{(a+3s\sqrt{2})}=$ nihilo, ideoque ſpatium affirmativum ECA æquari debet ſpatio negativo KAGH. Si $AF=a\sqrt{\tfrac{1}{8}}$, erit FC applicatarum maxima.

VIII. Data eſt curva EGB [*Fig. XXIII*], $AC=2a$, $AF=x$, $FG=y$; natura illius explicatur per hanc æquationem $y=\tfrac{1}{2}aa:\sqrt{(2ax-x^2)}-xx:\sqrt{(4aa-xx)}$; quæritur ſpatium DAFGE? Id ita peragitur: $ydx=\tfrac{1}{2}aadx:\sqrt{(2ax-xx)}-xxdx:\sqrt{(4aa-xx)}$; oportet itaque ut horum integralia inveniantur, quorum differentia dabit ſpatium quæſitum DAFGE: TAB. LIV. Fig. 23. 24.

TAB. LIV. *Fig.* 24. reperiuntur autem illa hoc modo. Conſtruatur ſemicirculus HLO [*Fig. XXIV*] cujus diameter HO ſit = lineæ AC, & fiat HM = AF, ductaque perpendiculari ML, erit ſector HNL = integrali ipſius $\frac{1}{2}aadx : \surd(2ax - xx)$: ſi vero abſcindantur HI & IK æquales ipſi HM, erunt duo ſegmenta circularia HI, & IK = integrali alterius $xxdx : \surd(4aa - xx)$; quoniam utrumque eſt dimidium integralis $xxdx : \surd(4aa - xx)$. Erit ideoque ſpatium quæſitum DAFGE [*Fig. XXIII*] = ſectori LNH, demptis duobus ſegmentis HI, IK [*Fig. XXIV*], id eſt, ſpatio mixtilineo LNHIK; vel rectilineo LNHIL, ſi K cadit in L. Hoc autem poſſibile eſſe patet, dum ratio HM ad ML ſumi poteſt quavis ratione minor; quo caſu punctum K cadet ab hac parte ipſius L; & ſi ſumatur HM = HN, K cadet ab altera parte ipſius L. Oportet igitur ut K cadat alicubi in L. Quia autem K ſemel tantum cadit in L, inter omnia ſpatia DAFGE [*Fig. XXIII*] non niſi unum erit quod quadraturam admittit; alioquin, ſi K non cadit in L, haberetur quadratura ſegmenti KL; id quod fieri nondum, & forſan nunquam poteſt. Perperam itaque Dn. Tschirnhaus aſſeruit, ſpatia geometrica, aut nullam quadraturam, aut infinitas admittere: vidimus enim in curva propoſita, quæ geometrica eſt, non niſi unicum ſpatium eſſe quadrabile.

Si poteſt inveniri punctum P [*Fig. XXIII*] ita ut ducta PQ parallela aſymptotæ CR, ſpatium BPQ ſit = ſpatio DABGE; habebitur quadratura ſegmenti circularis KL [*Fig. XXIV*]. Nam Sector *l*NH — Segment. HX — Segm. XZ = 0. Sector *l*NH = ſegm. HX + ſegm. XZ, demptoque eo quod habent commune; trapez: HXTN = portioni *l*TZ; dempto igitur ab utraque parte triangulo *l*TZ, erit ſegm. *l*Z = figuræ rectilineæ. *Q. E. D.*

Etſi inter omnia ſpatia DAFGE, non niſi unum ſit quod quadraturam admittat; tamen infinita alia adhuc poſſunt inveniri quorum ſumma vel differentia ſit quadrabilis. Ex. gr. Detur in linea AC [*Fig. XXIII*] punctum quodvis F ita ut ſpatium DAFGE non ſit quadrabile: Sumta in ſemicirculo

[*Fig.*

Digitized by Google

[*Fig. XXIV*] HM = AF, abſciſſiſque ſegmentis HI, IK, quorum ſubtenſæ = HM, cadet punctum K cis vel ultra punctum L. Si cis, inveniatur alia linea Af, ita ut ductis Hm = Af, & HX, XZ utraque = Hm, Z cadat ultra punctum l, & quidem ut arcus KL = lZ; erit Sector HNL — Segm. HI — Segm. IK + Sect. HNl — Segm. HX — Segm. XZ, id eſt, ſumma ſpatiorum DAFGE, DAfgE, [*Fig. XXIII*] quadrabilis. Eſt enim hæc ſumma = Figuræ Rectilineæ HIKLN [*Fig. XXIV*] + Segmento KL + Figuræ rectilin. HXTN — triang. TlZ — Segm. lZ; id eſt (quia KL = lZ) = Figuræ rectilin. HIKLN + trapez. HXTN — triang. TlZ.

LECTIO QUINTA.

Inventio Curvarum, quæ unicum habeant ſpatium quadrabile.

AD confirmationem ejus quod diximus, dari ſpatium curvilineum geometricum, quod unico modo ſit quadrabile, & non infinitis, ut Dn. TSCHIRNHAUS aſſerit *; innumera alia ſpatia geometrica, præter illud, quod modo protulimus, conſtrui poſſunt; quæ omnia ſi plures partes quam unicam quadrabiles haberent, exinde quadratura Circuli vel Hyperbolæ ſequeretur. Non abs re itaque erit, ſi modum tradamus conſtruendi has curvas; fortuito etenim ſeſe haud offerunt, ut nec illa quam Lect. 4 propoſuimus, & quæ a Dno. LEIBNITIO ſolvenda proponebatur Dno. TSCHIRNHAUS, caſualiter eidem Dno. LEIBNITIO incidit, ſed poſtquam illam dedita opera ſynthetice conſtruxiſſet, ut analytice denuo reſolvatur, exhibuit; id quod longe difficilius eſt quam ejuſmodi curvarum conſtructio, quæ nullo labore mille modis perfici poteſt, ut ex regula patebit quam damus.

REGU-

* *Acta Erud.* 1687. Sept. pag. 526. Videantur A°. 1684. Maj. pag. 235, & Dec. pag. 586. 1686. Jun. pag. 292.

Digitized by Google

REGULA

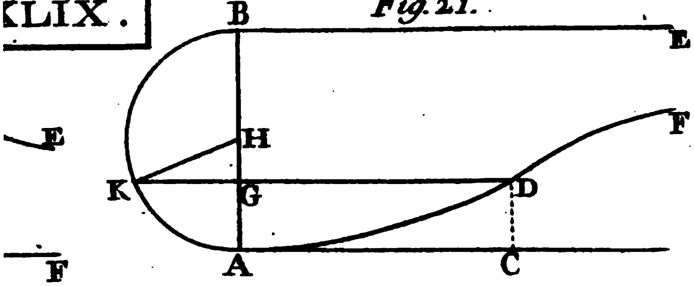
Pro inveniendis curvis, quarum omnia ſpatia dependent à quadratura Circuli vel Hyperbolæ, præter unicum, quod quadrabile exiſtit.

Id duobus modis peragitur, vel per differentiam duorum ſpatiorum circularium, aut hyperbolicorum, vel per ſummam eorundem. Si differentiam adhibere velimus, eligenda ſunt duo ſpatia circularia aut hyperbolica acceſſione creſcentia, quæ certam relationem ad ſe invicem obtineant, & quarum differentia, ſi aliquouſque perveniant, ſit figura rectilinea. Si vero per ſummam ſpatiorum circularium aut hyperbolicorum rem peragere lubet, talis relatio duobus ſpatiis circularibus vel hyperbolicis accommodanda eſt, ut alicubi eorum ſumma ſit figura rectilinea. Si nunc hujuſmodi duo ſpatia habeantur, eorum differentialium differentia, in illo; ſumma vero, in hoc caſu, applicanda eſt ad rectam ipſi x in Circulo vel Hyperbola ſumptæ æqualem: ſi itaque hæc applicata vocetur y, & æquatio ad rationalitatem reducatur, prodibit nova æquatio exprimens naturam hujus curvæ, quæ generatur per applicationem differentialium differentiæ vel ſummæ: patet autem ex conſtructione, quod ſpatium iſtius curvæ ſit æquale differentiæ vel ſummæ ſpatiorum circularium aut hyperbolicorum; quia vero differentia illa, vel ſumma, unico tantum in caſu quadrabilis eſt, liquet &c. Ut hactenus dicta melius intelligantur, quatuor dabimus exempla, duo per differentiam binorum ſpatiorum circularium & hyperbolicorum, & duo per ſummam eorundem.

TAB. LV. *Fig.* 25. & 26. I. Sit ABC [*Fig. XXV*] Circulus; $AF = a$, $AE = x$; nunc ad libitum ſumo quantitatem pro linea AD, ita tamen ut tandem ſit æqualis ipſi AE, & pro differentia ſpatiorum circularium ſumo ſectorem AFB — ſegmen. ADG; ideoque ſi $AD = AE$, erit differentia iſta triangulum BEF; in omnibus vero aliis differentia eſt ſpatium mixtilineum GBFD, cujus quadratura abſque quadratura ſegmenti GB non habetur. Sit ita-

XLIX.

Fig. 21.



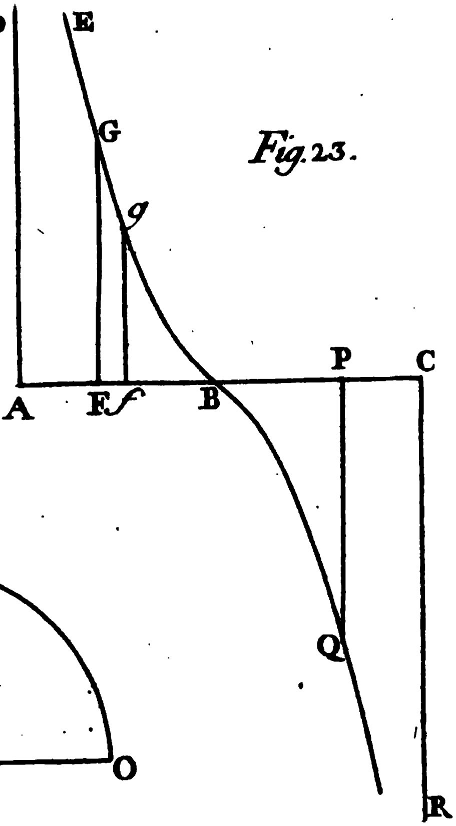
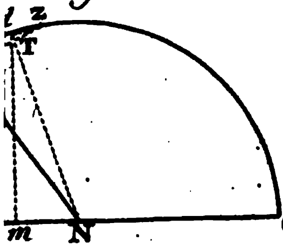


Fig. 23.

Fig. 24.



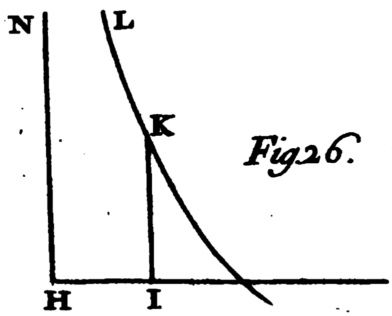


Fig. 26.

Digitized by Google

Digitized by Google

itaque $AD = 2xx : a$; erit differentiale ſegmenti $ADG = 4xdx \sqrt{(4aaxx - 4x^4)} : aa$, differentiale ſectoris $AFB = \frac{1}{2}aadx : \sqrt{(2ax - xx)}$. Si itaque fiat curva LK [*Fig. XXVI*] ejus naturæ, ut ſumpta $HI = AE = x$, IK ſit $= \frac{1}{2}aa : \sqrt{(2ax - xx)} - 4x\sqrt{(4aaxx - 4x^4)} : aa = y$, erit ſpatium $NHIKL =$ Sectori AFB — Segm. ADG [*Fig. XXV*]. Ut vero minus appareat quod curva iſta a natura circuli ſit deſumpta; æquatio inventa redigenda eſt ad rationalitatem.

II. Sit nunc ABC [*Fig. XXVII*] Hyperbola æquilatera, $DA = a$, $DF = x$, $DE = xx : a$, erit differentiale ſpatii $ADFC = dx\sqrt{(aa + xx)}$ & ſectoris $ADB = aaxdx : \sqrt{(a^4 + x^4)}$; erit itaque $y = \sqrt{(aa + xx)} - aax : \sqrt{(a^4 + x^4)}$; proinde ſi ſumatur RS [*Fig. XXVIII*] $= RT = a$, erit $SV = y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ & ſpatium TRSV = triangulo CDF, in eo enim caſu B cadit in C. TAB. LV. *Fig.* 27, & 28.

Duo ſequentia Exempla erunt per additionem ſpatiorum circularium & hyperbolicorum. TAB. LVI. *Fig.* 29. & 30.

III. Sit Circulus ABC [*Fig. XXIX*], $AC = 2a$, $AF = x = AD$, perpendiculari ad AC; erit differentiale Segm. $AFB = dx\sqrt{(2ax - xx)}$; ipſius vero $ADE = adx - dx\sqrt{(aa - xx)}$: conſtruenda ergo eſt curva GHI [*Fig. XXX*] ita ut ſi GL eſt $= AF = x$, LH ſit $= a + \sqrt{(2ax - xx)} - \sqrt{(aa - xx)} = y$. Erit GLH = AFB + ADE; proinde, ſi $GK = a$, erit ſpatium $GKI = aa$, quia tunc E cadit in B.

IV. Sit BFA [*Fig. XXXI*] Hyperbola, $AD = a$, $DC = x + 2AG$, differentiale ſpat. $DCFA = dx\sqrt{(aa + xx)}$, diff. ſpat. $AGB = \frac{1}{2}dx\sqrt{(ax + \frac{1}{4}xx)}$; conſtructa itaque curva, ut in prioribus factum, ita ut applicata ſuper abſciſſa x ſit $= \sqrt{(aa + xx)} + \frac{1}{2}\sqrt{(ax + \frac{1}{4}xx)} = y$; erit illa curva quæ quæritur, in qua ſi abſcindatur $x = \frac{4}{3}a$, erit ſpatium curvilineum $= \frac{20}{9}aa$, quia tunc B & F coincidunt. TAB. LVI. *Fig.* 31.

Patet ex his, quod infinita alia ſpatia inveniri poſſint, quæ omnia dependent a quadratura Circuli & Hyperbolæ; in unico vero caſu quadrabilia ſunt. Patet vero quoque, quod ſi, loco Circuli & Hyperbolæ, adhibeantur alia ſpatia curvilinea, conſ-

conſtrui poſſint curvæ, quarum areæ dependeant a quadratura ſpatiorum aſſumptorum, uno vero modo poſſint quadrari.

LECTIO SEXTA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

SAtis, ni fallor, oſtenſum eſt quod curvæ, quas hactenus explicuimus, unicum habeant ſpatium quadrabile; id tamen, ut Dno. Tschirnhaus quadantenus cedamus, non ſtricte intelligendum eſt, ac ſi plane nullam aliam, præter unicam quadraturam admittant; poſſunt enim ſegmenta ſumi intermedia, & quidem infinita, quæ utique quadrari queunt. Si ergo dicimus unicum duntaxat eſſe quadrabile; ſubintellige, inter ea quæ ab initio curvæ abſcinduntur, & non inter ea quæ intercipiuntur. Modum enim oſtendemus quadrandi infinita ſpatia intercepta in ejuſmodi curvis, quæ generantur ex additione vel ſubſtractione duorum ſpatiorum circularium vel hyperbolicorum; in illis vero curvis, quæ ex aliorum ſpatiorum additione vel ſubtractione oriuntur, infinita ſpatia intercepta quadrari nequeunt, niſi poſſint ſumi duo ſegmenta æqualia in illis ſpatiis ex quorum additione vel ſubtractione curvæ ſunt genitæ; in quolibet autem ſpatio duo ſegmenta æqualia ſumere, nondum inventum eſt; adeo ut etiamſi in Circulo, &, ceu demonſtrabimus, in Hyperbola id fieri poſſit, tamen generaliter omnes curvas, quæ unum ſpatium quadrabile habent, infinita alia habere Dnus. Tschirnhaus male aſſeruerit. Quomodo autem infinita ſpatia, in curvis ex additione vel ſubtractione ſpatiorum circularium vel hyperbolicorum genitis, quadrari poſſint, per exempla ſupra allata docebimus.

In Exemplo primo * Sector AFB — Segm. ADG [*Fig. XXXII*], id eſt mixtilineum BGDF, eſt = ſpatio LKIHN
TAB. LV. *Fig.* 32, & 33. [*Fig. XXXIII*]; & ſi AE = AM = $\frac{1}{2}a$, vel $\frac{1}{2}$AF; erit AD etiam = AM; ideoque, quia tunc G cadit in B, mutabitur mixtilineum FBGD in triangulum FOM; quod ideoque erit

* pag. 408, 409.

æquale

æquale ſpatio LKIHN. Si vero AE majus quam AM; fiet quoque AD majus quam AE; ex quibus manifeſtum eſt, quod quo magis E accedit ad M, eo magis etiam puncta B & G ad ſe invicem accedant; ſi vero E tranſit M, puncta B & G iterum a ſe invicem recedant: neceſſe itaque eſt ut citra & ultra punctum M infinita dentur puncta E & *e*, ita ut ductis DG, *dg*, abſcindantur arcus æquales BG, *bg*, & proinde ſegmenta æqualia GB, *bg*; & quidem, dato uno puncto E, poteſt alterum *e* geometrice inveniri. Hoc bene intellecto, ſumatur AE ad libitum & quæratur exinde A*e*, & fiat HI = AE, & H*i* = A*e*; dico ſpatium LKIHN + ſpat. L*ki*HN eſſe = trapezio rectilineo BGDF + triang. P*d*F — triang. rectilin. *b*P*g*. Nam LKIHN = trapez. rectilin. BGDF + ſegm. BG, & L*ki*HN = triang. P*d*F — triang. rectil. *b*P*g* — ſegm. *bg*. Quia autem duo ſegmenta BG & *bg* ſunt æqualia, ſequitur dictorum ſpatiorum haberi quadraturam.

In Hyperbola idem eodem modo demonſtratur; ſed quia arcus æquales non ſunt uniformes, nec abſcindunt ſegmenta æqualia, ſicut in Circulo; non injucundum erit, ſi demonſtrabimus, quo pacto duo vel plura ſegmenta æqualia, in una eademque Hyperbola, poſſint abſcindi geometrice.

Sit ABCD Hyperbola æquilatera vel inæquilatera; KL, KH ejus aſymptotæ, AB ſegmentum datum, cui aliud æquale inveniendum eſt. A punctis A & B ducantur parallelæ AE, BF ipſi aſymptotæ LK, & ſumpta qualicunque KG, fiat KE : KF = KG : KH, & per puncta G & H agantur parallelæ GC, HD; Dico ſegmentum interceptum CD, dato AB eſſe æquale. Quia enim FB : EA = KE : KF = KG : KH = HD : GC; erit *componendo* & *alternando* FB + EA : HD + GC = EA : GC = KG : KE = HK : KF = GH : EF; ideoque trapez. CH = trapez. AF. Dividatur nunc GH in infinitas partes æquales G*g*, *gg*, &c. & EF etiam in infinitas, E*e*, *ee*, &c. ita tamen ut EF : GH = E*e* : G*g*; ductiſque parallelis GC, *gc*, &c. ut & EA, *ea* &c. Quia nunc E*e* : TAB. LV. Fig. 34.

Digitized by Google

Gg = EF: GH = KE: KG = GC: EA; erit rectang. Ae = rectang. Cg; pariter demonſtratur, quod rectang. *ae* ſit = rectang. *cg*, & ita deinceps; ideoque totum ſpatium curvilineum AF = toti ſpatio curvilineo CH; quia vero demonſtratum eſt trapez. AF = trapez. CH, erit quoque ſegmentum AB = ſegm. CD. *Q. E. D.*

TAB. LV. Fig. 35. Ex omnibus, quæ dicta ſunt, ſequitur, quod ſi duæ Hyperbolæ FG, HI communes habeant aſymptotas AB, AC, earum portiones HE, FE a parallelis interceptæ ſint ut HD ad FD: ideoque ſi fiat AK *eo ordine* media proportionalis inter AD & AE, qui indicatur a ratione FD ad DH, erit HK = FE; id eſt, ſi FD = $\frac{1}{2}$ DH, AK debet eſſe media proportionalis inter AD & AE; ſi FD = $\frac{1}{3}$ DH, AK debet eſſe prima duarum mediarum proportionalium inter AD & AE, &c.

LECTIO SEPTIMA.

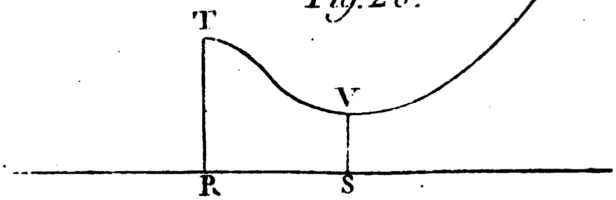
Quomodo completa reddenda ſit Integralis inventa.

EX his ſatis patere arbitror, quod illa tantum ſpatia ſint infinite quadrabilia quæ generantur ex ſpatiorum additione vel ſubtractione, ita tamen ut in his poſſint duo & plura ſegmenta æqualia geometrice reſcindi; ſecus enim, non niſi unici habebitur quadratura ſpatii; ubi nempe additio vel ſubtractio ſpatiorum deſinit in figuram rectilineam.

Pauca hæc quæ de integralium inventione dicta ſunt ſufficiant. Obſervandum interim eſt quod, quemadmodum differentiale propoſitum infinita habet integralia, prout unicuique integrali addatur dematurve quantitas conſtans; ita etiam illud integrale, quod per regulas invenitur, non ſemper quæſito ſatisfaciat; ſed oporteat, ut prius certa quædam quantitas integrali invento addatur, vel dematur, ut ad finem optatum perveniatur: quia autem non ſtatim innoteſcit, quænam ſit iſta quantitas, quæ addi

N.° CXLIX.

Fig. 28.



ig. 30.

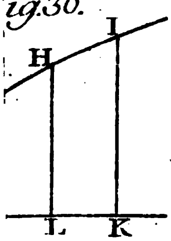
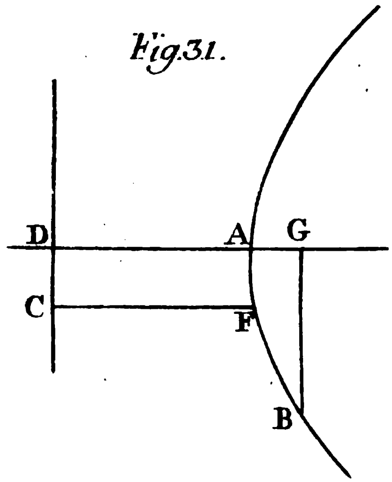


Fig. 31.



L

Fig. 33.

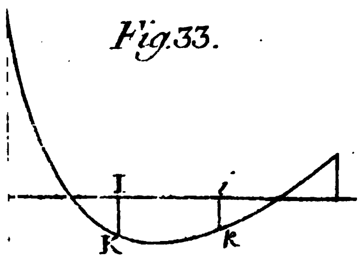
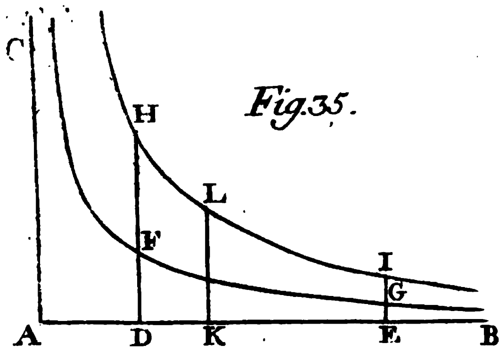


Fig. 35.



addi vel demi debet; operæ prætium erit, ut regula detur, per quam id ſciri poſſit; qualis eſt ſequens.

Spatium, cujus integrale inventum eſt, ſupponi debet æquale nihilo; & ſi tunc integrale, quod ex hac ſuppoſitione emergit etiam eſt = o; ſignum erit, quod omnibus aliis integralibus nihil, neque addendum, neque auferendum ſit. Si vero, ex iſta ſuppoſitione, integrale adhucdum reſtat quantitas poſitiva; hæc ipſa quantitas ab omnibus aliis integralibus auferenda; ſi vero ſit quantitas negativa, in reliquis integralibus addenda erit.

Ut in exemplo ſuperiori, ubi oſtendimus quod ſpatium BGF [*Fig. XVII*] ſit æquale ſegmento KIGH [*Fig. XIX*] — ſegm. BCDE [*Fig. XVIII*]; hoc autem ſtricte non ita ſe habet; ſed certum quoddam ſpatium addendum eſt, quod ita invenitur. Supponatur ſpatium BGF = o., erit $m = a$, proinde CD = AD, & IK = FK; differentia itaque iſtorum ſegmentorum erit quadrans FKH — quadr. ADE, id eſt, ipſe quadrans ADE, vel ſemiquadrans FKH: quoniam autem ſpatium BGF, quando eſt = o, non poteſt ſimul eſſe æquale ſemiquadranti FKH; indicium eſt quod, ad reliquorum ſpatiorum verum valorem obtinendum, a differentia ſegmentorum KIGH & DCBE ſemper ſit auferendus ſemiquadrans FKH. Hinc ſi CF = a, erit ſpatium BGF = $\frac{1}{2}aa$. Hoc in uno exemplo annotaſſe ſatis eſt; in reliquis idem obſervari debet. TAB. LIII. *Fig.* 17. 18. & 19.

LECTIO OCTAVA.

De Methodo Tangentium Inverſa.

HÆc ita appellatur, ad diſtinctionem Methodi tangentium directæ, per quam indifferenter omnium curvarum tangentes determinantur, quæque jam in Calculo differentialium explicata eſt: ad eam enim nullo Calculo integralium opus ha-

betur. Methodus autem tangentium inverſa eſt illa, per quam, ex datis tangentium, vel ſpatiorum curvilineorum, vel curvarum proprietatibus, naturæ ipſarum inveniuntur. Sicuti autem omnium integralium differentialia, ſed non omnium differentialium integralia haberi poſſunt; ita etiam omnium datarum curvarum tangentes facillime determinantur; ſed viceverſa non æque facile, imo interdum plane non, ex tangentibus natura curvæ indagari poteſt; adeo ut, quemadmodum in Methodo ſumendi integralia, certæ Regulæ exhiberi nequeunt, per quas omnium differentialium integralia inveniantur, ſed tantum illæ proponuntur quæ in pluribus, & quidem in innumeris, locum obtinent; ſic quoque in methodo tangentium inverſa, Regula generalis reddi nunquam poſſit. Hinc evenit ut variæ formari debeant Regulæ, prout natura rei id exigit, quinimo dici poteſt, quodlibet fere exemplum ſuam propriam habere regulam, quæ ut aptiſſime formetur dependet a ſagacitate ejus qui Problema reſolvere ſuſcipit; adeo ut certas Regulas præſcribere, tam ſit inutile, quam impoſſibile.

Ideoque modum pertractandi hujuſmodi Problemata per exempla duntaxat demonſtrabimus, in quibus omnibus tamen præcipue obſervanda ſunt ſequentia: 1°. Quærenda eſt ex datis æquatio, quæ conſiſtat in dx & dy. 2°. Omnes quantitates in quibus y & dy reperiuntur, ad unam partem, in quibus vero x & dx ad alteram, ſi fieri poteſt, reducendæ ſunt. 3°. Ex his quantitatibus reductis, ſi poſſibile eſt, ſumendum eſt integrale, quod naturam curvæ indicabit. His præmiſſis, ſequentia exempla ita reſolvuntur.

TAB. LVI. Fig. 36. I. Quæritur qualis ſit curva AB, cujus applicata BD ſemper eſt media proportionalis inter datam E & ſubtangentem CD? Sit $E = a$, $AD = x$, $DB = y$, erit per hypotheſin $CD = yy : a$; eſt autem $dy : dx = y : CD = \frac{yy}{a}$; habebitur ergo æquatio hæc $ydx = yydy : a$ vel $adx = ydy$; & ſumptis utrobique integralibus, habebitur $ax = \frac{1}{2}yy$, vel $2ax = yy$; quod oſtendit curvam quæſitam AB eſſe Parabolam, cujus parameter $= 2a$.

II. Si

II. Si nunc applicata BD eſt media proportionalis inter ſubtangentem DC & inter datam E, minus abſciſſa AD; natura curvæ AB reperitur ſic. Quia, per hypoth. E — AD: BD: = BD: DC, erit DC $= yy : (a - x)$; verum $dy : dx = y : DC = \frac{yy}{a-x}$; ideoque erit $ydx = yydy : (a - x)$, &, reducta æquatione, $adx - xdx = ydy$; ſumptiſque integralibus $ax - \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}yy$, vel $2ax - xx = yy$; ex quo patet curvam AC eſſe Circulum, cujus diameter æquatur duplæ E. TAB. LVI. *Fig.* 37.

III. Indagatur natura curvæ AC, quæ hanc habet proprietatem, ut quadratum applicatæ BC ubique ſit medium proportionale inter quadratum datæ E, & ſpatium curvilineum ABC? Sit AB $= x$, BC $= y$, E $= a$. Eſt itaque ex hyp. ſpat. ABC $= y^4 : aa$; proinde ejus differentiale $4y^3 dy : aa = ydx$, & reducta æquatione $4yydy = aadx$; quorum ſi ſumantur integralia, habebitur $\frac{4}{3}y^3 = aax$, vel $y^3 = \frac{3}{4}aax$; ideoque curva quæſita eſt Parabola cubicalis prima, cujus parameter $= a\sqrt{\frac{3}{4}}$. TAB. LVI. *Fig.* 38.

LECTIO NONA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

HOc modo invenitur natura omnium curvarum, ex datis tangentium vel ſpatiorum proprietatibus. Interim tamen occurrunt caſus, in quibus integralia, poſt reductionem æquationis ab una parte ad x & dx & ab altera ad y & dy, vel infinita ſunt, vel plane ſumi nequeunt; cum nihilominus curva quæſita poſſit eſſe geometrica: adeo ut inde nihil concludi queat. In his itaque, & aliis ejuſmodi occaſionibus, recurrendum eſt ad alia media; quorum unum erit, ut quærantur integralia ex quantitatibus in quibus x, y, dx & dy promiſcue reperiuntur: alterum vero medium eſt, ut quidem quantitates in quibus ſunt x & dx ſint ſeparatæ a quantitatibus in quibus y & dy; ſed ſi integralia ex illis ſumi non poſſunt; ut duo ſpatia formentur, quorum

Digitized by Google

quorum unius natura exprimitur per quantitates ubi x habetur; alterius vero ubi y exiſtit; & ſi ratio inveniri poteſt inter duo iſta ſpatia, id eſt, ſi parti unius haberi poteſt pars alterius æqualis, ſignum eſt quod curva quæſita ſit geometrica, illiuſque natura inveniri queat; ſi vero unum ſpatium alteri æquari non poſſit, erit curva quæſita ex numero mechanicarum.

Antequam modus primus explicetur, ſumendi nempe integralia ex quantitatibus mixtis ex utroque genere indeterminatarum; oportet ut in anteceſſum hujuſmodi differentialium geneſis conſideretur; quo eo melius, retrogrado ordine, ad cognitionem integralium deveniatur, eorumque generalis formetur idea, quæ deducat ad naturam curvæ quæſitæ. Notum eſt, ex calculo differentialium, quod quantitates quæ hic afferentur habeant illa differentialia quæ ipſis adnectuntur *; ex. gr.

Quant. $y:x$ . . . diff. $(xdy - ydx):xx$
Qu. $yy:x$ . . . diff. $(2xydy - yydx):xx$
Qu. $y^3:x$ . . . diff. $(3xy^2dy - y^3dx):xx$
- - - - - - - - - - - - - - - -
Quant. $y^a:x$ . . . . diff. $(axy^{a-1}dy - y^a dx):xx$

Ex quibus vice verſa ſequitur, quod ſi differentiale quoddam, $axdy - ydx$, ſit æquale nihilo; ad inveniendum illius integrale, multiplicandum ſit per $y^{a-1}:xx$; tunc enim quantitas proveniens etiam erit æqualis nihilo; id eſt, $axdy - ydx = 0 = (axdy - ydx) \times y^{a-1}:xx = 0$, hujus itaque integrale, quod eſt per conſtructionem $y^a:x$, debet eſſe æquale cuilibet quantitati conſtanti, quoniam differentiale eſt $=0$; erit ergo integrale $(axdy - ydx) = 0$, ſcilicet $y^a:x =$ quantitati conſtanti b. His

* Notandum eſt univerſim, quotieſcunque plures habentur differentiales diviſæ per ſuas reſpective integrales, & ſimul ſumptæ æquales nihilo, fore productum ex omnibus integralibus ad dimenſionem æqualem ſuo reſpective coefficienti elevatis, æquale quantitati conſtanti; ex. gr. ſit $adx:x + bdy:y + cdz:z +$ &c. $=0$; dico fore $x^a y^b z^c$ &c. $=$ conſtanti alicui.

His præliminatis, ſequentia Problemata facile ſolvuntur in hunc modum.

I. Quæritur qualis ſit curva AB cujus ſubtangens CD eſt æqualis duplæ abſciſſæ AC? Sit AC $= x$, BC $= y$, erit, per hypotheſin, $2x : y = dx : dy$; ideoque $ydx = 2xdy$. Si hoc, per Regulam primam, invenire vellemus, æquatio reducenda eſſet ad hanc $dx : x = 2dy : y$. Quoniam autem utriuſque integrale æquatur infinito; ex hoc natura curvæ non habetur; ideoque Problema reſolvi debet per hunc alterum modum: $ydx = 2xdy$, ergo $2xdy - ydx = 0 = (2xdy - ydx) \times y : xx$; Hujus itaque integrale, quod, per præcedentia, eſt æquale $yy : x$, debet æquari conſtanti cuidam. Sit igitur $yy : x = b$; habebitur $yy = bx$; ex quibus ſequitur curvam quæſitam AB eſſe Parabolam, cujus parameter æqualis eſt cuilibet aſſumptæ b. TAB. LVI. *Fig.* 39.

II. Sit nunc ſubtangens DC $= 3$ AC, erit, per hypotheſin, $3x : y = dx : dy$, proinde $ydx = 3xdy$, & $3xdy - ydx = 0 = (3xdy - ydx) \times yy : xx$. Hujus autem integrale, per præcedentia, eſt $y^3 : x$; erit ergo $y^3 : x = bb$, vel $y^3 = bbx$; quæ æquatio eſt pro Parabola cubicali prima cujus parameter $= b$.

III. Sit generaliter DC $= a \times$ AC, erit $ax : y = dx : dy$, ideoque $ydx = axdy$, & $axdy - ydx = 0 = (axdy - ydx) \times y^{a-1} : xx$; cujus integrale eſt $y^a : x$, ideoque $y^a : x = b^{a-1}$, vel $y^a = b^{a-1} x$; quod denotat curvam ex Paraboloïdeorum genere.

IV. Determinanda eſt natura curvæ AB, quæ hanc habet proprietatem, ut ſpatium ACB $= s$, ſit ſemper ſubtriplum rectanguli circumſcripti ADBC. Per hypoth. $3s = xy$, proinde $3ds$, id eſt, $3ydx = xdy + ydx$; & $2ydx - xdy = 0 = (2ydx - xdy) \times x : y^2$. Hujus ergo integrale, quod eſt $xx : y$, æquabitur b, vel $xx = by$; quod oſtendit curvam AB iterum eſſe Parabolam. TAB. LVI. *Fig.* 40.

Accidit interdum, ut æquatio proveniens in x, y, dx, & dy, non conſtet tantummodo duobus membris, ſicuti in exem-

plis

plis hactenus allatis; opus itaque eſt, ut per immutationem quandam & ſubſtitutionem litterarum, ſi fieri poteſt, ad æquationem bimembralem redigatur; cum qua ſi more conſueto procedatur, devenietur ad æquationem naturam curvæ exprimentem, in qua litteræ immutatæ reſtituendæ ſunt.

TAB. LVI. *Fig.* 41. V. AB eſt curva quæſita, $AC = x$, $CB = y$, $E =$ conſtanti a; ſubtangens DC ubique eſt æqualis $(2ax + xx):(a + x)$; quærenda eſt curvæ natura? Per hypoth. eſt $\frac{2ax+xx}{a+x} : y = dx : dy$, proinde $ydx = (2axdy + xxdy):(a+x)$ & $2axdy + xxdy = aydx + xydx$. Ponatur nunc $2ax + xx = zz$; erit, propter hanc poſitionem, $adx + xdx = zdz$. Si itaque, in æquatione inventa, ponatur utrobique valor ipſius x & dx; mutabitur illa in hanc $zdy = ydz$, proinde $zdy - ydz = 0$ $= (zdy - ydz) \times 1 : zz$, cujus integrale eſt $y : z$, quod ergo æquatur $a : b$, vel $by = az$, & $bbyy = aazz$; &, reſubſtituto valore ipſius $zz = 2ax + xx$, invenitur $bbyy = 2a^3x + aaxx$, quæ æquatio pro Hyperbola.

LECTIO DECIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

HActenus exempla protulimus in quibus æquatio ad cyphram eſt reducenda, & ex ea dein, modo quo diximus, integrale ſumendum, quod naturam curvarum monſtravit: nunc quædam proponemus, in quibus, ſi æquatio ad cyphram reduceretur, integrale haberi non poſſet; ideoque æquatio ita ab utraque parte diſponenda eſt, ut ſimul ex utroque haberi poſſit integrale, quod etiam oſtendit naturam curvæ.

TAB. LVI. *Fig.* 42. VI. Invenire qualis ſit curva AC ita ut ſit $E^2 : BC^2 = BC : DA$? Sit $AB = x$, $BC = y$, $E = a$; per hypoth. eſt $DA = y^3 : aa$; ideoque $DB = (y^3 + aax) : aa$; eſt autem $dx :$

dy

N°. CXLIX.

Fig. 37.

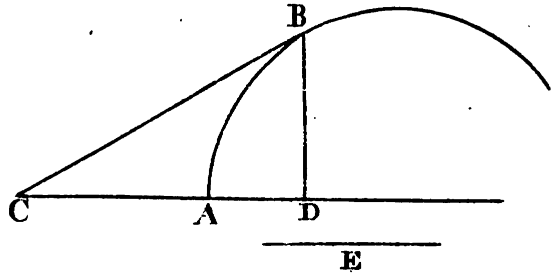


Fig. 39.

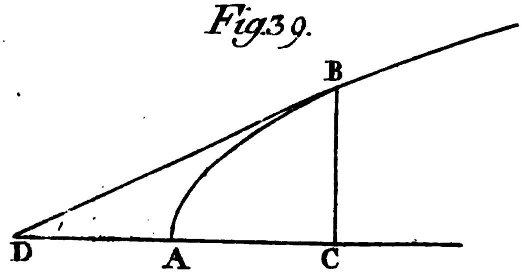


Fig. 41.

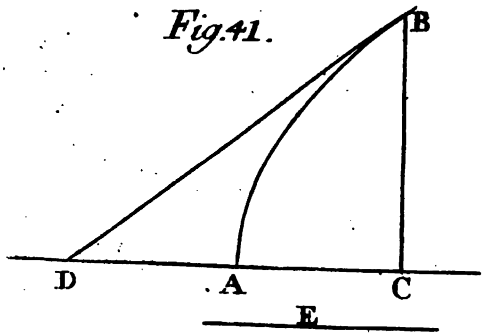
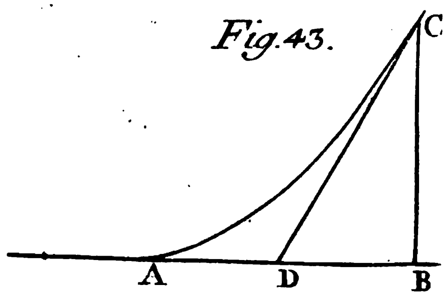


Fig. 43.



Digitized by Google

Digitized by Google

$dy = DB : BC = \frac{y^3 + aax}{aa} : y$; proinde $(y^3 dy + aaxdy) : aa = ydx$, & $y^3 dy + aaxdy = aaydx$, vel $y^3 dy = aaydx - aaxdy$; ut itaque ex utroque poſſit ſumi integrale, divido utrumque per yy, habebit $ydy = (aaydx - aaxdy) : yy$, quorum integralia ſunt $\frac{1}{2}yy = aax : y$, vel $y^3 = 2aax$; ideoque curva propoſita eſt Parabola cubicalis prima cujus parameter $= a\sqrt{2}$.

VII. Reperire naturam curvæ AC quæ talis eſt ut ſubtangens BD ſit $= \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$? Per hypoth. $\frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx} : y = dx : dy$. Invenietur, reducta æquatione, $3xxydx + 3x^3dy = 2axydy - ayydx$, diviſo per xx habebitur $3ydx + 3xdy = (2axydy - ayydx) : x^2$; ſumptiſque integralibus, erit $3xy = ayy : x$, vel $3xx = ay$, quod Parabolam oſtendit.

Alter nunc oſtendendus eſt modus, qui quotieſcunque æquatio ita diſponi poteſt, ut x & dx ſint ſeparatæ a litteris y & dy, omnino eſt generalis, tam pro curvis mechanicis, quam pro geometricis. Modus autem hic conſiſtit in hoc, ut quantitates quæ cum dx multiplicatæ ſunt, eleventur, ſi ſunt lineares, & deprimantur, ſi ſunt ſolidæ vel altioris generis, ad planum; eodem modo quoque procedendum eſt cum quantitatibus quæ cum dy multiplicatæ ſunt. Elevatio autem iſta, vel depreſſio, fit per multiplicationem, vel diviſionem, quantitatis cujuſdam conſtantis a, aa, a^3 &c. & non per quandam indeterminatam; ſecus res non ſuccederet. Horum itaque planorum differentialia erunt lineæ, quæ ductæ ſunt in dx & dy, quæ, propter æquationem ita inventam, debent eſſe æqualia; proinde ſi iſtæ lineæ applicentur ad ſuas reſpective dx & dy formabuntur duæ curvæ, quorum ſpatia, quia horum differentialia ſunt æqualia, æquabuntur; ideoque, ſi parti unius ſpatii ſuper y formati ſumatur æqualis pars alterius ſpatii ſuper x poſiti, & ſi extremitates iſtarum partium producantur, erit communis ſectio punctum in curva quæſita. Hinc patet, cujus mentionem ſupra fecimus, quod ſi duo iſta ſpatia ſint quadrabilia, vel ſaltem rationem geo-

metrice exprimibilem inter ſe habeant; curva propoſita ſit geometrica, cujus natura facile inveniri poteſt: Si vero, nec quadraturam, nec mutuam rationem geometricam admittant; natura curvæ quæſitæ aliter haberi non poterit, quam conceſſa quadratura dictorum ſpatiorum, id eſt, curva iſta erit mechanica. Omnia hæc clarius patebunt per exempla.

TAB. LVII. *Fig.* 44. I. Reſumamus exemplum jam ſuperius allatum, videlicet; Quæritur natura curvæ AC in qua ſubtangens DB = 2 AB; ſit AB = x, BC = y. Per hypoth. erit $2x : y = dx : dy$, proinde $2dy : y = dx : x$. Horum autem integralia inveniri non poſſunt, vel potius ſunt infinita; ideoque ut plana evadant, multiplico differentialia per aa, prodibit igitur $2aady : y = aadx : x$. Ad inveniendam per hoc naturam curvæ quæſitæ AC, producatur BA, & per punctum A agatur perpendicularis EF, ita ut AE indefinita repræſentet omnes applicatas BC, id eſt AG æqualis eſt BC: erigatur ergo in puncto G perpendicularis GH = $2aa : y$, & in omnibus aliis punctis idem faciendum; generabitur exinde curva hyperbolica IKH, cujus aſymptotæ ſunt AD, AG, & ſemiaxis AK = $2a$: eodem modo in B ducenda eſt BL perpendicularis = $aa : x$; idemque peragetur in omnibus aliis punctis; curva quæ inde formabitur NML erit etiam Hyperbola; cujus aſymptotæ AF, AB & ſemiaxis AM = $a\sqrt{2}$. Quoniam itaque $2aady : y$, id eſt, different. Hyperbolæ IKH æquatur $aadx : x$, id eſt different. Hyperbolæ NML, erunt omnia differentialia, id eſt ſpatium hyperbolicum KG = omnibus differentialibus, id eſt ſpatio MB. Reſtat itaque ad naturam curvæ AC determinandam, ut ſpatio hyperbolico KG ſumatur aliud MB æquale; tunc enim productis LB, HG, erit punctum occurſus C in curva quæſita. Per ea autem, quæ ſupra * dicta ſunt, dato ſpatio hyperbolico ab aſymptotis & applicatis contento inveniri poteſt aliud ipſi æquale; & quidem, hoc in caſu, quia KA : AM = $2 : \sqrt{2}$, vel potius quia ſi iiſdem aſymptotis AD, AG, fiat Hyperbola eadem, vel æqualis cum NML, ordinatim applicatæ Hyperbolæ IKH ſunt duplæ applicatarum illius; faciendum eſt $AO^2 : AG^2 = AP :$ AB;

* Lect. VII. pag. 412.

Digitized by Google

AB; erit ſpatium KG = ſpat. MB. Quia autem AP : AB = $AO^2 : AG^2 = PS^2 : BC^2$; liquet curvam ASC eſſe Parabolam. *Q. E. I.*

Eodem modo, ſi BD = 3 AB, invenitur quod $PS^3 : BC^3$ = AP : AB; & proinde quod ASC ſit Parabola cubicalis; pariter in quacunque poſitione rationis DB ad AB, invenitur ſemper natura curvæ ASC.

II. Quæritur natura curvæ BDC, cujus ſubtangens ſemper ſit æqualis conſtanti a? Per hypotheſin eſt $dy : dx = y : a$; proin $ydx = ady$ & $dx = ady : y$; multiplicato utroque per a, habebitur $adx = aady : y$; ideoque ad curvam conſtruendam, ducantur indefinite normales BI, LH; & ad omnes AB, AN, AO, &c. quæ ipſis y ſunt æquales, applicentur KB, NE, OF, &c. = $aa : y$; fiet curva KEF Hyperbola cujus aſymptotæ AO, AL; & ad AG, AH applicentur GP, HQ &c. = a; erit IPQ linea recta & parallela AH. Sumpto igitur ſpatio hyperbolico KN æquali rectangulo AP, & KO æquali AQ; erunt puncta concurſus D, C &c, in curva quæſita. Hinc ſi AG, AH, &c. ſunt arithmetice proportionales, erunt AB, AN, AO &c. geometrice proportionales; quia ſpatia KN, EO, &c. debent eſſe æqualia; proinde curva BDC eſt Logarithmica. TAB. LVII. *Fig.* 45.

LECTIO UNDECIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

PRoblemata, quæ hactenus propoſuimus, ſoluta ſunt per ipſarum litterarum primo poſitarum extractionem integralium: nunc quædam ſequuntur, in quibus, antequam integralia poſſint accipi, ſubſtitutio litterarum adhibenda eſt, & quidem talis, quæ cuilibet exemplo conveniens eſt: certa enim Regula pro hoc tradi nequit. Habentur tamen quædam Regulæ generales, pro ſeparatione indeterminatarum per ſubſtitutionem facienda.

Digitized by Google

Sic omnes æquationes differentiales, ubi nulla reperitur littera conſtans pro ſupplendis homogeneis, poſſunt reduci ad alias ſeparabiles; ſi pro x ſubſtituatur zy, & pro dx, $zdy + ydz$; vel contra, pro y, zx & pro dy, $zdx + xdz$.

Item omnes æquationes differentiales, ubi indeterminatæ x & y primam dimenſionem non tranſcendunt, poſſunt reduci ad ſeparabiles, ſi omnes quantitates, quibus dx afficitur, ponantur $= z$; quo ſubſtituto, omnes deinde, quibus dy afficitur, alii litteræ t ponendæ ſunt æquales; donec tandem perveniatur ad æquationem, in qua nulla littera conſtans invenitur, quæ nempe vicem ſubeat homogeneæ. Ultima hæc æquatio mutatur demum in ſeparabilem per modum ante dictum.

Idem præſtari poteſt, ſi ponatur $x = z +$ conſtante quadam incognita, & $y = t +$ alia quadam conſtante incognita, eorumque valore ſubſtituto in æquatione, ſi termini ubi reperiuntur cognitæ in utroque membro æquentur nihilo; hoc enim modo invenitur quid pro incognitis conſtantibus ſumendum ſit, ut, illis in æquatione evaneſcentibus, appareat æquatio conſiſtens homogeneis ſolis indeterminatis; quæ igitur ſolvi poteſt ut ſupra.

Præcipue tamen tentandum, ut, per ſubſtitutionem hanc, dimenſiones litterarum diminuantur; vel, ut ejus ope indeterminatæ cum ſuæ ſpeciei differentialibus ſecerni, & ad partem alteram ſeparatim poni poſſint.

Primum exemplum quod damus oſtendit ſubſtitutionem quæ dimenſiones litterarum diminuit. Sequens vero per ſubſtitutionem monſtrat ſeparationem indeterminatarum.

I. Indagatur natura curvæ, in qua ſi abſciſſa $= x$, ordinatim applicata $= y$, ſubtangens eſt $= (3x^3 - 2axy) : (3xx - ay)$.

Solutio: Per hypoth. eſt $dx : dy = \frac{3x^3 - 2axy}{3xx - ay} : y$; proinde $3x^3dy - 2axydy = 3xxydx - ayydx$. Ut dimenſiones deprimantur, ponatur $y = mx$, erit $dy = mdx + xdm$; ex æquatione inventa ſubſtituatur valor ipſius y & dy, habebitur itaque, reductis reducendis, $3xxdm - 2amxdm = ammdx$; ponatur nunc

$x =$

Digitized by Google

$x = mn$, erit $dx = mdn + ndm$; proinde in ultima æquatione ſubſtituto valore ipſius x & dx, proveniet $3nndm - 3andm = amdn$. Sit $n = aa:r$, erit $dn = -aadr:rr$; æquatio ergo inventa reducetur ad hanc $3adm - 3rdm = -mdr$. Sit $r - a = t$, erit $dr = dt$, habebitur æquatio hæc $3tdm = mdt$, vel $3tdm - mdt = 0 =$ [ut integrale poſſit ſumi, per modum ſupra explicatum] $(3tdm - mdt) \times mm : tt$; hujus itaque integrale, quod eſt $m^3 : t$ erit $=$ quantitati conſtanti b, proinde $m^3 = bt$. Et quidem hæc eſt æquatio, quæ explicat naturam curvæ quæſitæ. Ut autem illa habeatur in litteris x & y, oportet ut retrogrado ordine ſubſtituatur valor litteræ unius poſt alteram, donec tandem deveniatur ad æquationem, in qua x & y ſolum reperiuntur. Subſtitutio autem hæc fit hoc modo: $m^3 = bt =$ [ob $t = r - a$] $br - ba =$ [ob $r = aa:n$] $aab:n - ba =$ [ob $n = x:m$] $aabm:x - ba$; ideoque habebitur $m^3 x = aamb - bax$: quia autem $m = y:x$, æquatio inventa convertetur in hanc $y^3 : xx = aaby : x - bax$, vel reducta æquatione, $y^3 + bax^3 = aabyx$, vel, ut æquatio ubique æquales dimenſiones habeat, ſit littera conſtans & ad libitum aſſumpta $b = 1:a$; proveniet $y^3 + x^3 = ayx$; quæ deſignat naturam illius curvæ, cujus ſupra * quadraturam invenimus.

II. Alterum hoc exemplum, quod damus, propoſitum fuit Dno. DESCARTES a Dno. de BEAUNE, cujus ſolutio in ejus operibus non extat, quam tamen inveniſſe ait in libro Epiſtolarum †. Solutionem itaque, juxta noſtram methodum, hic appoſuiſſe non pœnitebit; præſertim cum primo intuitu appareat Problema per hanc methodum (ob indeterminatarum inſeparabilitatem) impoſſibile eſſe ſolutu; videbitur autem quod, poſt levem quandam ſubſtitutionem indeterminatæ, facile ab invicem ſeparari, & ob id Problema plenarie ſolvi poſſit; ſuppoſita tamen quadratura Hyperbolæ: eſt enim curva iſta quæſita mechanica.

Problema autem propoſitum eſt tale: Recta AC facit angulum ſemirectum cum axe AD, & E eſt linea data conſtans; quæritur TAB. LVII. *Fig.* 46 47 & 48.

* Lect. IV. pag. 403 & ſeq. † *Tom. III.* Epiſt. 71.

quæritur natura curvæ AB; in qua ordinatim applicata BD eſt ad ſubtangentem FD, ut data E ad BC? *Solut.* Sit AD $= x$, DB$=y$, E $= a$; erit per hypoth. $dy : dx = a : y - x$; proinde $adx = ydy - xdy$; ex hac igitur æquatione oporteret invenire curvæ naturam, aut ſumendo integralia, aut redigendo y cum dy ad unam, x vero cum dx ad alteram partem, ut inde duo plana poſſint formari, ex quorum comparatione pervenitur ad naturam curvæ; quoniam autem ex æquatione inventa, nec poſſunt ſumi integralia, nec x & dx ſeparari ab y & dy; oportet ut æquatio mutetur in aliam, ſubſtituendo valorem alterutrius indeterminatarum. Sit ergo $y - x = z$; erit $y = z + x$, & $dy = dz + dx$; æquatio itaque inventa convertetur in hanc $adx = zdz + zdx$, vel $adx - zdx = zdz$ & $dx = zdz : (a - z)$. Sic igitur duas indeterminatas ſeparavimus; ideoque ad curvam conſtruendam multiplicetur utrumque per a, erit $adx = azdz : (a - z)$. Et, ductis normalibus GT, NH [*Fig. XLVII*] ſumatur GN$=$GH $= a$, & per puncta H, N, ducantur ipſi GT parallelæ HV, MR, ſumptoque NR $=$ NG, agatur perpendicularis RS, & aſymptotis RM, RS, & per punctum G ducatur hyperbola LKG: ſi itaque GO $= z$ & GQ$= x$, erit KO $= az : (a - z)$, & quia QI ſemper æquatur ipſi a; oportet ut ſpatio hyperbolico KGO ſumatur æquale rectangulum HQ, & producantur lineæ IQ, KO; erit punctum concurſus P in curva GPW, quæ ſatisfacit æquationi inventæ $adx = azdz : (a - z)$. Ut autem ex hac conſtruatur curva quæſita AB, nihilo alio opus eſt quam ut QP producatur ad Z [*Fig. XLVIII*] ita ut PZ ſit æqualis abſciſſæ GQ, erit punctum Z in curva quæſita AB: quia enim PZ $=$ GQ$= x =$ AD, [*Fig. XLVI*] & QP [*Fig. XLVIII*]$= z$, erit QP + PZ $= z + x = y =$ DB [*Fig. XLVI*]. *Q. E. I.* *

Coroll. I. NR [*Fig. XLVII*] eſt aſymptota GPW, & QP$=$BC [*Fig. XLVI*]; hinc curva quæſita AB, habet etiam aſymptotam ipſi AC parallelam.

Coroll. II. Spatium ADB $= xy + ax - \frac{1}{2} yy$.

LEC-

* Vid. N°. IX, pag. 62; N°. XI, pag. 65; & N°. XXVII, pag. 145, *Tom. I.*

LECTIO DUODECIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

III. INvenire naturam curvæ AB [*Fig. XLIX*], quæ ad tangentem BD ſit ubique in data ratione. Problema hoc indeterminatum eſt, & varias admittit ſolutiones; nonnunquam enim curva AB eſt geometrica, nonnunquam mechanica, pro variatione rationis datæ inter curvam AB & inter tangentem BD, ceu melius patebit ex ſolutione. Sit AC $= x$, BC $= y$, AB $= s$, & ratio AB ad DB ut a ad 1. Per hypoth. eſt $dy : ds = y : (s : a,)$ proinde $ayds = sdy$, & $ayds - sdy = 0 = (ayds - sdy) \times s^{a-1} : yy$. Hujus itaque integrale, quod eſt $s^a : y$, erit æquale quantitati conſtanti. Sit ergo $s^a : y = b$; erit $s^a = by$, vel $s = \sqrt[a]{by}$ & $ds = \frac{b\,dy}{a\sqrt[a]{(by)^{a-1}}}$. Ut jam calculus eo facilior evadat, ſit $a = 2$, habebitur $ds = bdy : 2\sqrt{by}$, eſt autem $ds^2 = dx^2 + dy^2$, erit ergo $bdy^2 : 4y = dx^2 + dy^2$, &, reducta æquatione, $bdy^2 - 4ydy^2 = 4ydx^2$ vel $dy\sqrt{(b - 4y)} = 2dx\sqrt{y}$, & $dx = dy\sqrt{(b - 4y)} : 2\sqrt{y} = (bdy - 4ydy) : 2\sqrt{(by - 4yy)} = (\frac{1}{4}bdy - ydy) : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)} = (\frac{1}{8}bdy - ydy) : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)} + \frac{1}{8}bdy : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)}$; ideoque proveniet $x = \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)} +$ integ. $\frac{1}{8}bdy : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)}$; hoc autem integrale habetur ſi fiat ſemicirculus EGH, [*Fig.L*] cujus diameter EH $= \frac{1}{4}b$, & EF $= y$, erit arcus EG $=$ Int. $\frac{1}{8}bdy : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)}$; eſt autem etiam FG $= \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)}$; proinde AC, vel x, vel FI $=$ FG $+$ GE, ſeu GE $=$ GI, id eſt curva EI in hac, vel AB, in priori Figura, eſt Cyclois. Sit nunc $a = \frac{3}{2}$, erit $ds = bdy : a\sqrt[a]{(by)^{a-1}} = bdy : \frac{3}{2}\sqrt[3]{by}$, ideoque $ds^2 = dx^2 + dy^2 = bbdy^2 : \frac{9}{4}\sqrt[3]{bbyy}$ & reducta æquatione invenitur $dx = dy\sqrt{(4bb - 9\sqrt[3]{bbyy})} : 3\sqrt[3]{by}$. Ut integrale hujus haberi poſſit, ponatur $by = m^3$, erit

TAB. LVII. Fig. 49 & 50.

$dy = 3mmdm : b$; proinde $dy\sqrt{(4bb - 9\sqrt[3]{bbyy})} : 3\sqrt[3]{by} = mdm\sqrt{(4bb - 9mm)} : b$; hujus autem integrale eſt $= -\frac{1}{27}(bb - \frac{9}{4}mm)\sqrt{(bb - \frac{9}{4}mm)} = x$, ideoque ſubſtituto valore ipſius m, provenit æquatio in x & y quæ exprimit naturam curvæ quæſitæ. Hoc ergo in caſu, ſi nempe $a = \frac{3}{2}$, curva erit geometrica; ſi vero $a = 2$, curva ut vidimus eſt mechanica. Si itaque ſolutionem generalem abſolvere velimus, eodem modo procedendum eſt videlicet $ds^2 = dx^2 + dy^2 = bbdy^2 : aa\sqrt[a]{(by)^{2a-2}}$, & $dx^2 = bbdy^2 : aa\sqrt[a]{(by)^{2a-2}} - dy^2$, ideoque $dx = dy\sqrt{(bb - aa\sqrt[a]{(by)^{2a-2}})} : a\sqrt[a]{(by)^{a-1}}$. Ponatur $(by)^{a-1} = m^a$, erit $y = \sqrt[a-1]{m^a} : b$ & $dy = am^{a-1}dm : (ab - b)\sqrt[a-1]{m^{aa-2a}}$; proinde habebitur pro $dx = dy\sqrt{(bb - aa\sqrt[a]{(by)^{2a-2}})} : \sqrt[a]{a(by)^{a-1}} = am^{a-2}dm\sqrt{(bb - aamm)} : (ab - b)\sqrt[a-1]{m^{aa-2a}}$. Hæc formula oſtendit, quod quotieſcunque integrale ſumi poteſt ex hac quantitate, curva ſemper ſit geometrica; ſin minus erit mechanica: prout enim ſumatur littera a, quantitas iſta etiam mutatur. Sic quod diximus verum eſt, Problema nempe hoc infinitas habere ſolutiones.

TAB. LVIII. *Fig.* 51, & 52.

IV. Invenire naturam curvæ, quæ talis ſit ut DC : BC = E : AD; [vid. *Fig. LI*] Sit AC $= x$, CD $= y$, AD $= s$: ex hypoth. $dy : dx = a : s$, proinde $dy = adx : s$; ut autem littera s tolli poſſit [id quod ſemper neceſſe eſt ad curvas determinandas] ſic procedendum eſt. $dy^2 = aadx^2 : ss$, ideoque $ds^2 = [dx^2 + dy^2] = (ssdx^2 + aadx^2) : ss$, & $ds = dx\sqrt{(ss + aa)} : s$; ergo $dx = sds : \sqrt{(ss + aa)}$, eorumque integralia $x = \sqrt{(ss + aa)}$; hinc invenitur $s = \sqrt{(xx - aa)}$, & $ds = xdx : \sqrt{(xx - aa)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; reducta æquatione, invenitur $xxdy^2 - aady^2 = aadx^2$, & tandem $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$. Idem hoc invenitur aliter, & facilius hoc modo: Quia $s = adx : dy$, erit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = addx : dy$ ideoque $dy = addx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Ut utrobique poſſit ſumi integrale, multiplicetur utrumque per dx, habebitur $dxdy = adxddx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sumptis integralibus, erit $xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, reductaque æquatione, erit $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$, ut ante. *Q. E. I.*

Sequi-

N.° CXLIX.

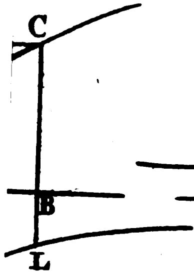


Fig. 45.

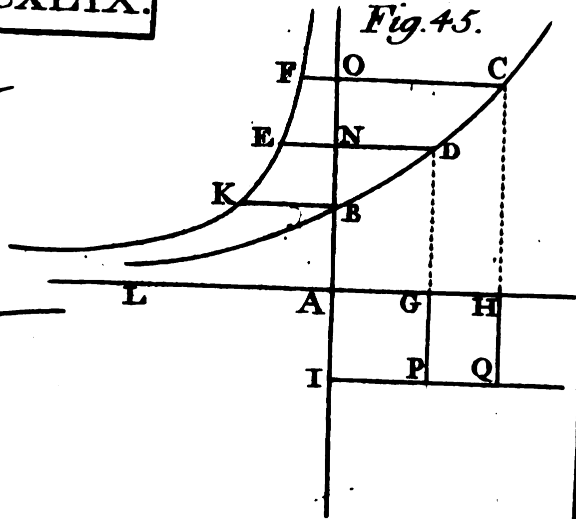


Fig. 47.

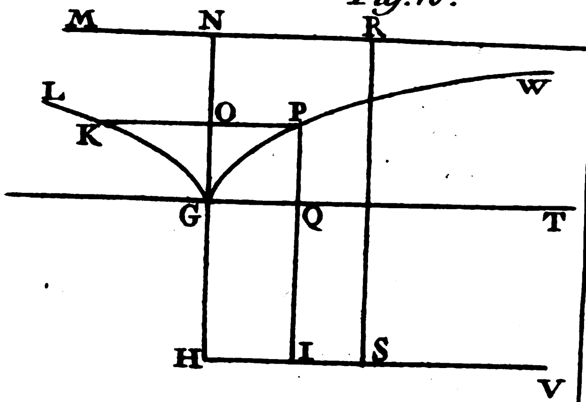


Fig. 49.

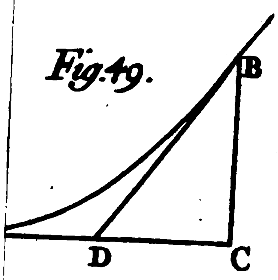
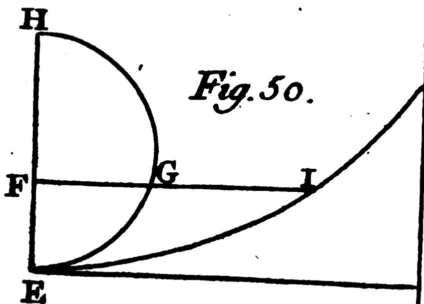


Fig. 50.



Digitized by Google

Sequitur nunc conſtructio hujus curvæ, ubi primo obſervandum eſt quod cum x ſit $= \sqrt{(ss+aa)}$ & proinde $>$ quam s, initium immutabile ipſius x ſit ultra verticem A, & quidem diſtantia E, quia ſi $s=0$, devenit $x=a$. Si itaque velimus, ut initium ipſius x ſit in ipſo vertice, ſupponendum eſt $x=x+a$, & mutabitur æquatio $dy=adx:\sqrt{(xx-aa)}$ in hanc $dy=adx:\sqrt{(2ax+xx)}$; quam triplici modo ſic conſtruimus. Multiplicetur æquatio per a & erit $ady=aadx:\sqrt{(2ax+xx)}$ Ductis nunc normalibus AK, GH ſeſe ſecantibus in B [*Fig. LII*] ſumatur $BA=a$, & vertice B, centroque A, deſcribatur Hyperbola æquilatera BC; conſtructaque curva DI hanc habente naturam ut B A ſit ubique media proportionalis inter KC & KD, id eſt ut KD ſit $=aa:\sqrt{(2ax+xx)}$, agatur parallela AF, & ſumatur rectangulum AG = ſpatio HBKDI; erit, productis DK & FG, punctum occurſus E in curva quæſita. Quæ aliter, & facilius, ſic conſtruitur. Ducatur recta A C & duplo ſpatio hyperbolico ABC ſumatur rectangulum AG æquale; erit, productis CK & FG, punctum E iterum in eadem curva quæſita. Adhuc aliter per rectificationem curvæ parabolicæ ſic conſtruitur. Quia $dy=adx:\sqrt{(2ax+xx)}$, erit $dy+(adx+xdx):\sqrt{(2ax+xx)}$ [diff. EK + KC vel EC] $=(2adx+xdx):\sqrt{(2ax+xx)}=dx\sqrt{(2a+x)}:\sqrt{x}$; quærenda itaque eſt curva quædam BL, cujus differentiale ſit $dx\sqrt{(2a+x)}:\sqrt{x}$; & proinde ipſa $BL=EC$: hæc autem ita invenitur; a $(2adx^2+xdx^2):x$ auferatur dx^2, & remanebit $2adx^2:x$, ideoque $dx\sqrt{2a}:\sqrt{x}=$ different. KL, & integr. $dx\sqrt{2a}:\sqrt{x}$, id eſt, $\sqrt{8ax}$, erit æquale ipſi KL; curva igitur BL eſt Parabola cujus parameter $=8$ AB; quæ BL ſi extendatur & applicetur ad punctum C, alter terminus E erit itidem in curva quæſita AE.

Coroll. Curva BE eſt æqualis KC applicatæ in Hyperbola. Nam ſi BE dicatur s, erit $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(dx^2+aadx^2:(2ax+xx))}=dx\sqrt{((aa+2ax+xx):(2ax+xx))}$ $=(adx+xdx):\sqrt{(2ax+xx)}=$ differ. KC.

Digitized by Google

LECTIO DECIMA TERTIA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

QUoniam in Problemate præcedente duos modos oſtendimus, per quos ad eandem ſolutionem pervenimus; quorum prior erat ordinarius, & qui ex ſimplici calculo integralium petebatur, poſterior vero differentialium differentialia adhibebat; ex hujus occaſione afferemus adhuc unum vel alterum, quæ per vulgarem methodum vix ſolvi poſſunt, ſed peculiari calculo opus habent, in quo non ſolum quantitatum indeterminatarum differentialia in conſiderationem ducuntur, ſed etiam ipſorum differentialium differentialia. Regulæ pro hoc ex ipſo calculo patebunt.

TAB. LVIII. *Fig.* 52. V. Datur curva AC, [AB $= x$, BC $= y$, AC $= s$; E $= a$;] proprietate talis, $adsddx = dy^3$; poſito quod ds ſit quantitas conſtans, id eſt, quod dds ſit $= 0$. *Solut.* Quia $dx = \surd(ds^2 - dy^2)$, erit $ddx = -dyddy : \surd(ds^2 - dy^2)$, proinde $adsddx\ [dy^3] = -adsdyddy : \surd(ds^2 - dy^2)$ vel $dy^2 = -adsddy : \surd(ds^2 - dy^2)$; quoniam autem neutrius poteſt ſumi integrale, dividatur utrumque per dy^2 & habebebitur hæc æquatio $1 = -adsddy : dy^2 \surd(ds^2 - dy^2)$; poſterioris nunc quidem habetur integrale per Regulas in calculo integralium traditas, cum autem unitas non ſit differentiale, & proinde integrale non habeat, utrumque multiplicandum eſt per differentiale conſtans ut per ds & ſic habetur $ds = -ads^2 ddy : dy^2 \surd(ds^2 - dy^2)$; proinde integrale ipſius ds, quod eſt s, erit æquale integrali alterius $-ads^2 ddy : dy^2 \surd(ds^2 - dy^2)$, quod per Regulam penultimam LECT. ſecunda * traditam invenitur $ads^2 \surd(ds^2 - dy^2) : ds^2 dy = a \surd(ds^2 - dy^2) : dy$. Formatur itaque hæc æquatio $s = a \surd(ds^2 - dy^2) : dy$, vel $sdy = a \surd(ds^2 - dy^2)$; reducta æquatione invenitur $ssdy^2 + aady^2 = aads^2$ & $(ss + aa)\, dy^2 : aa = ds^2$; quoniam autem $ds^2 - dy^2 = dx^2$, erit ergo $ssdy^2 : aa = dx^2$; ideoque $sdy = adx$, id eſt, $dy : dx = a : s$, quod oſten-

* pag. 399 ab init.

tendit eſſe curvam cujus naturam in Problemate præcedente explicuimus.

VI. AC [*Fig.LIV*] eſt curva proprietate talis, ut DB^2 ſit ad BC^2 ut E ad AC; quæritur illius natura? *Solut.* Ex hypoth. $dx^2 : dy^2 = a : s$, ideoque $s = ady^2 : dx^2$, & [poſito $ddx = 0$] $ds = 2adyddy : dx^2 = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, proinde $2adyddy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx^2$. Sumantur utrobique integralia $2a\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = xdx$, & reducta æquatione provenit $dx\sqrt{(xx - 4aa)} = 2ady$; ex qua æquatione curva ſic conſtruitur: Ductis normalibus FB, AC, [*Fig. LV*] ſumptoque BA $= 2a$, centro A & vertice B deſcribatur Hyperbola æquilatera BD, ducaturque AG parallela BF; erit ſumpto rectang. AH æquali ſpat. hyperbolico BDI, punctum occurſus E in curva quæſita. TAB. LVIII. *Fig.* 54 & 55.

VII. Poſitis quæ ſupra, ſit $dx^2 : dy^2 = s : a$. *Solut.* Per hypoth. $s = adx^2 : dy^2$, proinde, mutatis mutandis, erit eadem curva, niſi quod x occupat locum ipſius y, & viceverſa.

VIII. AC [*Fig. LVI*] eſt curva ejus proprietatis, ut ſit CB ad ſubtangentem, ut quadratum G ad ſpatium ACFD. *Solut.* Sit AB $= x$, BC $= y$, ſpatium ACFD $= s$, G $= a =$ AD. Per hypoth. $dy : dx = aa : s$; erit $sdy = aadx$, eorumque differentialia (poſito $ddy = 0$) $ady^2 - xdy^2 = aaddx$; multiplicetur utrumque per dx, habebitur $adxdy^2 - xdxdy^2 = aadxddx$; nunc ſumantur eorum integralia & erit $axdy^2 - \frac{1}{2}xxdy^2 = \frac{1}{2}aadx^2$, vel $2axdy^2 - xxdy^2 = aadx^2$; invenitur itaque $dy = adx : \sqrt{(2ax - xx)}$. Ex hac æquatione curva ita conſtruitur: Diametro AL [*Fig. LVII*] $= 2$ AD [*Fig. LVI*] deſcribatur ſemicirculus AHL, ductaque ordinata HBC ſumatur BC $=$ arcui AH; punctum C erit in curva quæſita: nam differentiale arcus AH eſt æquale $adx : \sqrt{(2ax - xx)}$ æquale different. BC. TAB. LVIII. *Fig.* 56. & 57.

LECTIO DECIMA-QUARTA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

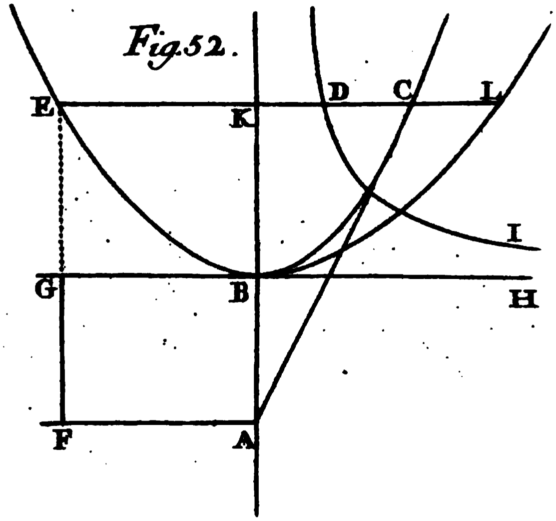
OMnes curvæ, quarum naturas hucuſque invenimus, aut fuerunt geometricæ, id eſt, quarum ordinatæ ad abſciſſas habent relationem æquatione algebraïca exprimibilem, aut fuerunt mechanicæ, id eſt, quarum natura per æquationem non habetur, niſi ſuppoſita quadam quadratura vel rectificatione cujuſdam curvæ geometricæ. Si itaque hæc curva, a cujus rectificatione vel quadratura dependet alterius quæ quæritur natura, ipſa eſt mechanica; erit curva quæſita non ſimpliciter mechanica, ſed ex ſecundo genere mechanicarum; & ſi curva generatrix [generatricem appello a cujus quadratura vel rectificatione dependet quæſita] eſt ex ſecundo genere, erit quæſita ex tertio genere mechanicarum, & ſic deinceps. Exemplum unum addidiſſe ſufficiat, ubi generatrix eſt ſimpliciter mechanica, vel ex primo genere.

TAB. LIX. *Fig.* 58, 59, & 60. IX. AC [*Fig. LVIII*] eſt curva quæſita, $AB = x$, $BC = y$, $E = a$; proprietas eſt talis [poſito $ddx = 0$] $2axddy^2 - xxddy^2 = dx^4$; quæritur natura curvæ propoſitæ?

Solut. Per æquationem datam eſt $ddy^2 = dx^4 : (2ax - xx)$, proinde $ddy = dx^2 : \sqrt{(2ax - xx)} = dx \times dx : \sqrt{(2ax - xx)}$; multiplicetur utrumque per a, & erit $addy = adx \times dx : \sqrt{(2ax - xx)}$; integrale prioris habetur; poſterioris autem dependet a rectificatione curvæ circularis: ad quod conſtruendum fiat ſemicirculus DFG diametro $DG = 2E$ [*Fig. LIX*], & abſcindatur $DH = x$, erit arcus DF = integr. $adx : \sqrt{(2ax - xx)}$; ſit itaque arcus $DF = s$, quia autem integr. $addy = ady$, erit $ady = sdx$; curva igitur quæſita ſic conſtruitur: Ductis perpendicularibus IK, LN [*Fig. LX*] ſumatur $IL = a$; & per L ducatur parallela LQ, appliceturque ad $IN = x$, recta $NM = s$, progenerabitur curva IM, in Probl. præced. explicata, quæ mechanica eſt; ſumpto ergo rectang. LP æquali ſpatio IMN, erit punctum occurſus O in curva quæſita IO.

X. Datur

Fig.52.



ig.53.

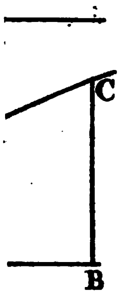


Fig.55.

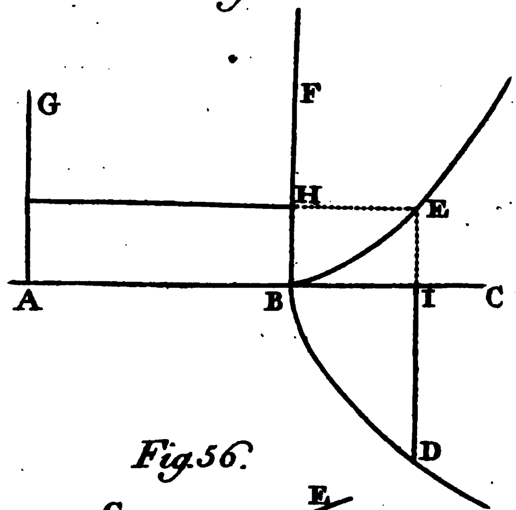
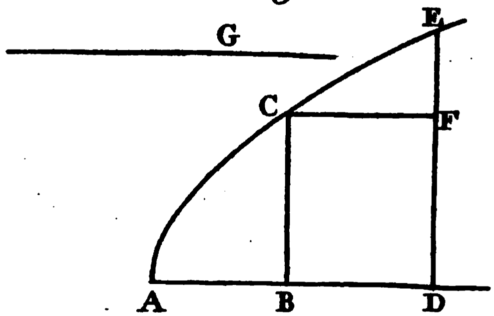


Fig.56.



Digitized by Google

X. Datur curva AE, quæritur natura alterius cujuſdam AC, ita ut perpendicularis DC, ſit æqualis applicatæ DE? Sit AB $= x$, BC $= y$, AD $= m$, DE $= n =$ DC. Quia Dd : dO $=$ DC : BD, id eſt $dm : dn = n : \frac{ndn}{dm} =$ BD, proinde AB $= m - ndn : dm = x$; eſt autem DC$^2 -$ BD$^2 =$ BC^2, id eſt $nn - nndn^2 : dm^2 = yy$, proinde $\sqrt{(nn - nndn^2 : dm^2)} = y$. Quia vero AE eſt curva data, quantitas $dn : dm$, vel $dn^2 : dm^2$, ſemper per æquationem ſe deſtruet; adeo ut AB & BC in quantitatibus algebraïcis proveniat: hinc quotieſcunque AE eſt curva geometrica, quæſita AC quoque erit geometrica. Sit, verbi gratia, AE Parabola, parameter $= a$, AD $= m$, DE $= n = \sqrt{am}$; ideoque erit AB $= x = m - \frac{1}{2}a$, & BC $= y = \sqrt{(am - \frac{1}{4}aa)}$, ergo $yy = am - \frac{1}{4}aa$, & $m = (yy + \frac{1}{4}aa) : a$; hinc habetur $x\,[m - \frac{1}{2}a] = (yy + \frac{1}{4}aa) : a - \frac{1}{2}a = (yy - \frac{1}{4}aa) : a$, vel $ax = yy - \frac{1}{4}aa$. Ex quo patet quod curva ACC quæſita ſit etiam Parabola, & quidem eadem cum AE, ſed cujus vertex eſt ultra punctum A diſtantia quartæ partis parametri. TAB. LIX. *Fig.* 61.

Sit nunc AE Circulus, diameter $= 2a$, AD $= m$, DE $= n = \sqrt{(2am - mm)}$; erit per hanc poſitionem AB $= x = 2m - a$, & BC $= y = \sqrt{(4am - aa - 2mm)}$ quia itaque $x = 2m - a$, erit $m = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, proinde $yy\,[4am - aa - 2mm] = ax + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}xx$. Ad conſtruendam hanc curvam ſit ABC Circulus datus, cujus centrum G, per quod ducatur perpendicularis BGF, ſumpta GF $=$ BG, factaque GD & GE $=$ ipſi BC, axibus BF & ED deſcribatur Ellipſis EFD, dico hanc eſſe curvam quæſitam, id eſt quamlibet perpendicularem HI eſſe æqualem ordinatæ IK. TAB. LXIX. *Fig.* 62.

Sit FE Hyperbola, AD $= m$, DE $= n = aa : m$; erit AB $= x = (m^4 + a^4) : m^3$, BC $= y = \sqrt{(a^4 m^4 - a^8)} : m^3 = \sqrt{\left(\frac{a^4 m^4 - a^8}{m^6}\right)}$, quia itaque $x = (m^4 + a^4) : m^3$ erit $m^3 x = m^4 + a^4$ & $m^4 = m^3 x - a^4$ & quia $y = \sqrt{(a^4 m^4 - a^8)} : m^3$, erit $m^6 yy = a^4 m^4 - a^8$, & ſubſtituto valore ipſius m^4 provenit TAB. LVIII. *Fig.* 63.

$m^6 yy$,

$m^6 yy = a^4 x m^3 - a^8$, & $m^6 = (a^4 x m^3 - a^8) : yy$, proinde $m^3 = (\frac{1}{2} a^4 x \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^8 xx - a^8 yy)}) : yy$, erit ergo $x [(m^4 + a^4) : m^3]$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2} a^4 x \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^8 xx - a^8 yy)}}{yy} \times \frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{2} a^4 x \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^8 xx - a^8 yy)})}}{\sqrt[3]{yy}} + a^4 \right) : \frac{\frac{1}{2} a^4 x \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^8 xx - a^8 yy)}}{yy}.$$

LECTIO DECIMA QUINTA.

De Circulis Oſculantibus & Evolutione curvarum, ejuſque uſu in rectificandis curvis.

TAB. LX. *Fig.* 64. SI ſit quælibet curva ABC, & a puncto quodam B ducatur ad curvam perpendicularis indefinita BD; notum eſt, quod ſi ubicunque ſumatur punctum D in hac perpendiculari, eoque tanquam centro deſcribatur circulus CBF, circulus iſte tangat curvam in B, & alibi, ſi radices non ſint imaginariæ, ſecet eandem in C: manifeſtum quoque eſt, quod centro D appropinquante ad B, punctum C ad idem etiam magis accedat; erit itaque certa diſtantia BD, ad quam ſi D pervenerit, punctum C omnino cadet in B, & tunc, cum hoc accidit, *Circulus* CBF eſt ille qui LEIBNITIO appellatur *oſculans* vel *oſculator*; forſan ideo quia puncta B & C ſe invicem quaſi oſculantur. Circulus iſte hanc habet proprietatem, ut ſit ſolus qui curvam ABC ſecet in puncto B [niſi punctum B ſit in vertice A, tunc enim ſemper tangit curvam, poſito hinc inde ſimilem eſſe poſitionem curvæ,] cum cæteri omnes, quorum centra ſunt in recta BD, illam in eodem puncto B tangant: hoc autem, quod nempe Circulus oſculator curvam ſecet, infra demonſtrabitur. Quod dictum eſt de centro D Circuli oſculantis curvam in B, pariter intelligendum eſt de omnibus aliis ubicunque ſumatur punctum B; variante ergo puncto B, variabunt quoque centra D, adeo ut deſcribant certam quandam curvam EDδ, quam D. HUGENIUS oſtendit eſſe illam, ex cujus evolutione deſcribitur curva ABβ: id eſt, ſi curvæ EDδ applicetur

TAB. LX. *Fig.* 65.

Digitized by Google

o
.CXLIX.

Fig. 59.

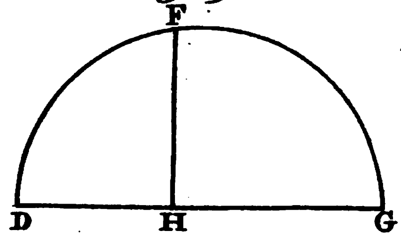


Fig. 61.

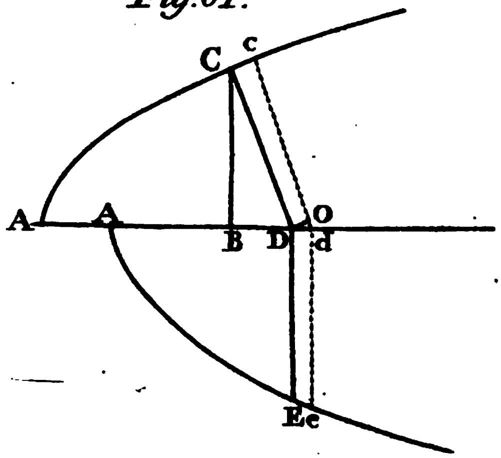
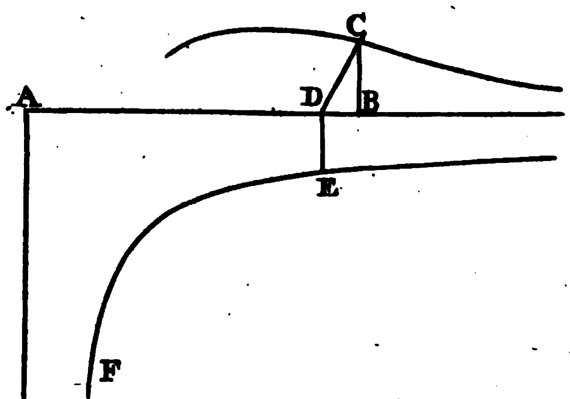


Fig. 63.



Digitized by Google

tur filum AEDδ, & terminus A æquabili manus ductu moveatur verſus B, deſcribet punctum A curvam ABβ, cujus quodlibet punctum B habet centrum ſui Circuli oſculantis in curva EDδ, & quidem ibi ubi evolvens BD tangit curvam EDδ. Oſtendendum itaque eſt, quod centra Circulorum oſculantium ſint in curva ex cujus evolutione deſcribitur altera curva cujus ſunt Circuli oſculantes.

In hunc finem conſideranda eſt geneſis curvarum evolutione genitarum. Sit curva ADF, quæ intelligi poteſt compoſita ex infinitis rectis AB, BC, CD, DE, EF; ſi itaque concipiatur huic curvæ applicatum eſſe filum ABCDEF, cujus unus terminus F fixus eſt, alter vero A mobilis; evidens eſt, ſi terminus iſte moveatur verſus K, quod terminus A lineolæ AB deſcribat arcum circuli AG, cujus centrum B, qui arculus eouſque continuabitur donec AB, id eſt GB, cadat in directum cum lineola BC; tunc, pergente motu, deſcribetur arcus circuli GH, cujus centrum C & radius CG, vel CH, donec HC cadat in directum cum lineola CD; eodem modo deſcribuntur arculi HI & IK, quorum centra D, vel E, & radii DH & EI. TAB. LX. *Fig.* 66.

Hinc ſequitur, 1°. Quod evolvens HD ſit tangens curvæ evolutæ. 2°. Quod eadem HD ſit perpendicularis ad curvam evolutione genitam; quia perpendicularis eſt ad arculum HI, utpote ejus radius. 3°. Quod HD ſit æqualis evolutæ ABCD, ſi nempe terminus fili & initium curvæ evolutæ congruunt; ſin minus, erit major vel minor quantitate conſtanti. 4°. Quod punctum concurſus duarum perpendicularium HD & ID, ad quamlibet curvam datam AHIK, quæ quantitate infinite parva diſtant, ſit in curva ADF ex cujus evolutione deſcribitur data AHK.

Ex his facile eſt demonſtrare, quod centrum Circuli oſculantis curvam AHK in H ſit in puncto D; circulus enim centro D & radio DH deſcriptus tangit curvam AHK in H, & ſecat eandem [vel ſaltem tranſit] in I; quoniam autem ob diſtantiam infinite exiguam HI, punctum I intelligi poteſt ca-

dere in punctum H; ſequitur quod Circulus centro D & radio DH deſcriptus ſit oſculator curvæ AHK in puncto H; ergo centra Circulorum oſculantium ſunt in curva ex cujus evolutione generatur curva cujus ſunt Circuli oſculantes. *Q. E. D.*

Quod iſti Circuli oſculatores ſecent curvam ſic demonſtratur. Sit AB curva, CED alia ex cujus evolutione deſcribitur AB; DB linea evolvens, quæ per modo demonſtrata erit radius Circuli oſculantis in B: Ducatur recta DG ſecans curvam in F & peripheriam Circuli in G, & a puncto F ducatur tangens FE; quia GD = BD = FE + curva ED > recta FD; ideo GD > FD; proinde punctum G eſt extra curvam AB: haud multum aliter demonſtratur, quod punctum H ſit intra curvam AB; ergo peripheria GBH ſecat curvam AB. *Q. E. D.*

TAB. LX. *Fig.* 67.

Coroll. Ex iis quæ dicta ſunt ſequitur, quod ſi curva AB ſit geometrica, CED etiam ſit geometrica, & quidem rectificabilis; quia recta BD, quæ ipſi eſt æqualis, vel conſtanti quadam major, geometrice inveniri poteſt.

LECTIO DECIMA SEXTA.

Inventio centri Circuli oſculatoris, & Evolutæ.

JAm ſupra innuimus, quod Circulus oſculator ſit ille, qui ſecans curvam in diverſis punctis tranſeat per unum in quo tria interſectionum puncta congruunt, vel potius concurrunt: poteſt enim ſemper dari Circulus BCDE, qui quamlibet curvam ad minimum in quatuor ſecet punctis; ſi itaque centrum Circuli oſculantis quærere libeat, ſecundum Geometriam *Carteſianam*, ponatur AH = s, HG = t, & radius BG = u; item AF = x, & BF = y; ex his datis haberi poterit æquatio, in qua ſubſtituto valore ipſius x in litteris y, vel ipſius y in litteris x, prout natura curvæ datæ id poſtulat; x vel y ad minimum quatuor habebit dimenſiones, quia Circulus ad mi-

TAB. LX. *Fig.* 68.

nimum

nimum in quatuor punctis curvam ſecare poteſt; proinde, ut iſte Circulus fiat oſculator, oportet ut ſupponatur æquationem inventam tres habere radices æquales, id eſt, ut tres abſciſſæ, vel tres applicatæ correſpondentes punctis interſectionum fiant æquales; & ſi procedatur juxta Regulam CARTESII, prodibit æquatio, quæ relationem oſtendit inter AH & HG, & proinde naturam curvæ, quam deſcribunt puncta Circulorum oſculantium.

Operatio hujus eſt talis: $BG^2 - (BF + GH)^2 = FH^2$, id eſt, $uu - yy - 2ty - tt = ss - 2sx + xx$ vel $xx + yy - 2sx + 2ty + ss + tt - uu = 0$; in hac æquatione ſubſtituendus eſt valor ipſius x vel y juxta naturam curvæ datæ, quæ exempli loco ſit Parabola, ideoque $xx = y^4 : aa$, & $x = yy : a$, & ſic habebitur hæc æquatio $y^4 : aa + yy - 2syy : a + 2ty + ss + tt - uu = 0$ vel

$$y^4 \begin{matrix} +aa \\ -2as \end{matrix} yy + 2aaty \begin{matrix} +ssaa \\ +ttaa \\ -uuaa \end{matrix} = 0;$$

quia hæc æquatio tres debet habere radices æquales, ponatur, more *Carteſiano*, $y - e = 0$, $y - e = 0$, $y - e = 0$, & pro ultima $y - f = 0$; multiplicentur invicem omnes quatuor & prodibit

$$y^4 \begin{matrix} -3e \\ -f \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +3ee \\ +3ef \end{matrix} yy \begin{matrix} -e^3 \\ -3eef \end{matrix} y + e^3 f = 0;$$

ſinguli hujus æquationis termini æquandi ſunt, cum ſingulis terminis æquationis inventæ; habetur ergo $-3e - f = 0$; $3ee + 3ef = aa - 2as$; $-e^3 - 3eef = 2aat$; & $e^3 f = (ss + tt - uu) \times aa$; per primam eſt $f = -3e$, ſubſtituto valore ipſius f in ſecunda provenit $-6ee = aa - 2as$, & in tertia erit $8e^3 = 2aat$; proinde juxta illud eſt $e = \sqrt{(2as - aa)} : \sqrt{6}$, & juxta hoc $e = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2aat}$ ideoque $\sqrt{(2as - aa)} : \sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2aat}$; ut æquatio hæc facilius in rationalibus habeatur, ſit $s - \frac{1}{2}a = r$; erit $\sqrt{(ar : 3)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2aat}$; reducta æquatione, provenit $16r^3 = 27att$; hæc itaque æquatio oſtendit naturam curvæ, quam deſcribunt centra Circulorum oſculantium in Parabola; ubi notandum quod hæc curva ſit Parabola cubicalis ſecunda, cujus parameter $= \frac{27}{16}a$, & cujus vertex

diſtat a vertice Parabolæ datæ quantitate $\frac{1}{2}a$; quoniam $s - \frac{1}{2}a = r$. Si radium GB quoque invenire libeat, nihilo alio opus eſt, quam ut ſupra in quarta æquatione $e^3 f = (ss + tt - uu) \times aa$, ſubſtituatur valor ipſius f & e; nam ſublato f, habetur $-3e^4 = (ss + tt - uu) \times aa$; quoniam autem $ee = (2as - aa) : 6 = ar : 3$, erit $-aarr : 3 [-3e^4] = ss [rr + ar + \frac{1}{4}aa] + tt - uu) \times aa$, & reducta æquatione invenitur, uu [GB^2] $= \frac{4}{3}rr + ar + \frac{1}{4}aa + tt$, ideoque u [GB] $= \sqrt{(\frac{4}{3}rr + ar + \frac{1}{4}aa + tt)}$. Hinc ſi $r = 0$, erit $t = 0$ & $u = \frac{1}{2}a$, id eſt, centrum Circuli oſculantis Parabolam in vertice diſtat ab eodem quantitate $\frac{1}{2}a$; id quod etiam aliter inveniri poteſt, ſupponendo æquationem ſupra inventam $y^4 + \begin{matrix} aa \\ -2as \end{matrix} yy + 2aaty \begin{matrix} +ssaa \\ +ttaa \\ -uuaa \end{matrix} = 0$ quatuor habere radices æquales; tres enim radices æquales in vertice concurrere nequeunt, quin concurrat quoque quarta, ob ſimilem poſitionem ſupra & infra axem curvæ. Sit ergo, ut ante factum, $y - e = 0$, $y - e = 0$, $y - e = 0$, $y - e = 0$ quæ invicem multiplicatæ dant $y^4 - 4ey^3 + 6eeyy - 4e^3y + e^4 = 0$; hujus æquationis ſinguli termini comparandi ſunt cum ſingulis alterius; quia itaque $-4e = 0$, erit quoque $6ee = 0$, $-4e^3 = 0$ & $e^4 = 0$, & proinde $aa - 2as = 0$, id eſt, $s = \frac{1}{2}a$, $-2aat = 0$, id eſt, $t = 0$, & $ss + tt - uu = 0$, id eſt quia $t = 0$, $s = u = \frac{1}{2}a$, ut antea.

Sicuti factum eſt in Parabola, ſic faciendum in omnibus aliis curvis geometricis: *Carteſiana* enim geometria in hoc ad mechanicas ſe non extendit. Quomodo itaque in omnibus curvis, ſive geometricis, ſive mechanicis, centra Circulorum oſculantium generaliter inveniantur calculo differentialium nullo negotio oſtendi poteſt. Sit ergo curva data quæcunque AB, cujus Circulorum oſculantium centra invenienda ſint. Supra oſtendimus, quod illa ſint in curva ex cujus evolutione data AB progignitur, vel, quod eodem recidit, in concurſibus D duarum perpendicula-

TAB. LX. *Fig.* 69.

Digitized by Google

cularium BD, OD, infinite parva quantitate diſtantium: inveniendа ergo eſt longitudo BD, ex abſciſſa AE & ordinata BE. In hunc finem, ducatur BC parallela ipſi AG, & OF perpendicularis ad BC: Sit $AE = x$, $EB = y$; proinde $BF = dx$, $FO = dy$, erit $FC = dy^2 : dx$, ideoque $BC = (dx^2 + dy^2) : dx$, & quia $BF : FO = BE : EH$, erit $EH = ydy : dx$, $BH = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$, & $AH = x + ydy : dx$; hujuſque differentiale (poſito $ddx = 0$) $dx + (dy^2 + yddy) : dx = HG$; quia autem $BC : HG = BD : HD$; erit, *dividendo*, $BC - HG : BC = BH : BD$, id eſt, $-yddy : dx^2 + dy^2 = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} : BD$; habebitur ergo $BD = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy$. Idem hoc aliter inveniri potuiſſet dicendo, $BO : BF = HG : LG$, ergo $LG = (dx^2 + dy^2 + yddy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; nunc $BO - LG : BO = BL$ vel $BH : BD$, pro quo idem provenit.

Per alios adhuc modos perveniri poteſt ad cognitionem rectæ DB. Ducantur nempe duæ tangentes BM, ON, & arculus vel perpendicularis MP; erit NM differentialis ipſius AM, & quia $BO : OF = NM : MP$; habebitur MP; quia autem POM, & BDO ſunt triangula ſimilia, faciendum ut PM ad BO, ita MO ad quæſitam BD. TAB. LX. *Fig.* 70.

Vel adhuc aliter: ducatur perpendicularis AQ, erit SQ different. ipſius AS, & quia $BO : BF = SQ : SR$, & $SR : BO = OS : BD$, inveniri poterit BD, quæ ſemper erit $= (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy$; in qua quantitate ſi ſubſtituatur valor ipſius dx, vel dy, prout natura curvæ id requirit, proveniet ſemper BD in quantitatibus finitis & abſque differentialibus.

LECTIO DECIMA SEPTIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

UT ea quæ ſupra diximus confirmentur; quod nempe centra Circulorum oſculantium ſint in curva ex cujus evolutione

generatur altera; afferemus exemplum Parabolæ ſupra allatum, ubi videbitur, quod eadem æquatio proveniat pro natura curvæ, quæ per ſuam evolutionem deſcribit Parabolam, quæ provenit pro natura curvæ centrorum oſculantium.

TAB. LXI. *Fig.* 71. Sit itaque AB Parabola, $AE = x$, $BE = y = \sqrt{ax}$, quia generaliter in omnibus curvis $BD = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -ddydx$, ſubſtituendus eſt valor ipſius dy & ddy. Eſt autem in Parabola $dy = adx : 2\sqrt{ax}$, proinde $dy^2 = adx^2 : 4x$, & $ddy = -adx^2 : 4x\sqrt{ax}$; ergo $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (a + 4x)\sqrt{ax} : a$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = \sqrt{(a + 4x)} : \sqrt{4x}$, ideoque $BD = (a + 4x)\sqrt{(a + 4x)} : \sqrt{4a}$. Sed ut natura habeatur curvæ in qua punctum D, juxta modum CARTESII, ſit $AL = s$, $LD = t$; quia $EH = \frac{1}{2}a$, erit $BH = \sqrt{(ax + \frac{1}{4}aa)}$; ob $BH : BE = BD : BE + LD$, invenitur $LD = 4x\sqrt{ax} : a = t$, & ob $BH : EH = BD : EL$, reperitur $EL = \frac{1}{2}a + 2x$, proinde $AL = \frac{1}{2}a + 3x = s$; ſit, ut ſupra poſuimus, $s = \frac{1}{2}a + r$, erit $r = 3x$, vel $x = \frac{1}{3}r$, & ſic $4x\sqrt{ax} : a = 4r\sqrt{\frac{1}{3}ar} : 3a = t$; reducta æquatione habetur $16r^3 = 27att$, quæ eadem eſt æquatio, quam ſupra invenimus. Ergo, &c.

Sit AB Parabola cubicalis prima, parameter $= a$, $AE = x$, $BE = y = \sqrt[3]{aax}$ erit $dy = adx : 3\sqrt[3]{axx}$, $dy^2 = aadx^2 : 9\sqrt[3]{aax^4}$, & $ddy = -2adx^2 : 9\sqrt[3]{ax^5} = -2adx^2 : 9x\sqrt[3]{axx}$: ergo $(dx^2 + dy^2) : -ddy = \frac{aa + 9x\sqrt[3]{aax}}{9x\sqrt[3]{aax}} : \frac{2a}{9x\sqrt[3]{axx}} = (aa\sqrt[3]{x} + 9x\sqrt[3]{a^2x^2}) : 2a\sqrt[3]{a}$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = \sqrt{(aa + 9x\sqrt[3]{aax})} : \sqrt{9x\sqrt[3]{aax}}$. Ideoque $BD = \frac{aa\sqrt[3]{x} + 9x\sqrt[3]{aaxx}}{2a\sqrt[3]{a}} \times \sqrt{\left(\frac{aa + 9x\sqrt[3]{aax}}{9x\sqrt[3]{aax}}\right)}$.

Si AB ſit Hyperbola, diameter $= a$, parameter $= b$, $AE = x$, $EB = y = \sqrt{(aax + axx)} : \sqrt{b}$, erit $dy = (aa + 2ax)dx : 2\sqrt{(aabx + abxx)}$, $dy^2 = (a^3 + 4aax + 4axx)dx^2 : (4abx + 4bxx)$ & $ddy = -a^3dx^2 : (4ax + xx)\sqrt{(aabx + abxx)}$. Ergo $(dx^2 + dy^2) : -ddy = $ &c.

TAB. LXI. *Fig.* 72. Sit AB Cyclois, AGH circulus genitor, $AE = x$, $EB = y = EG + AG = \sqrt{(2ax - xx)} + s$; erit ergo $dy = ($a

N.o CXLIX.

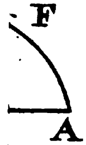


Fig. 65.

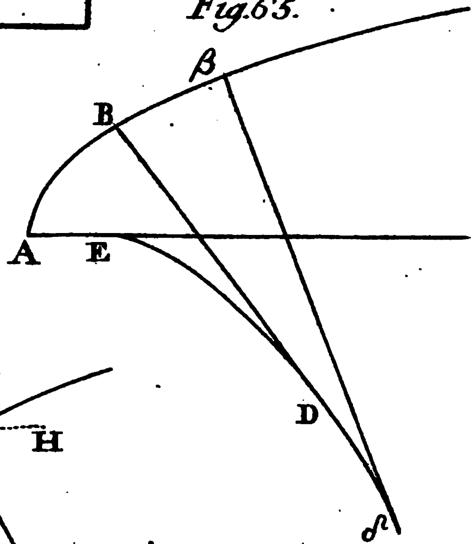


Fig. 67.

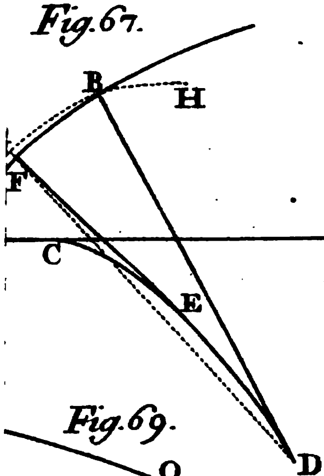


Fig. 69.

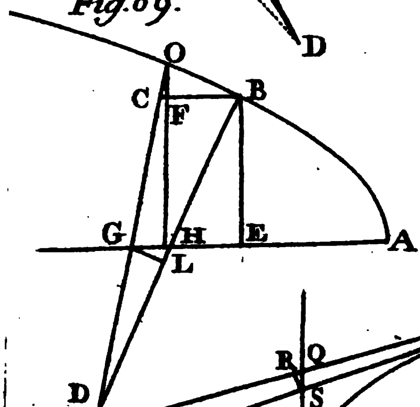
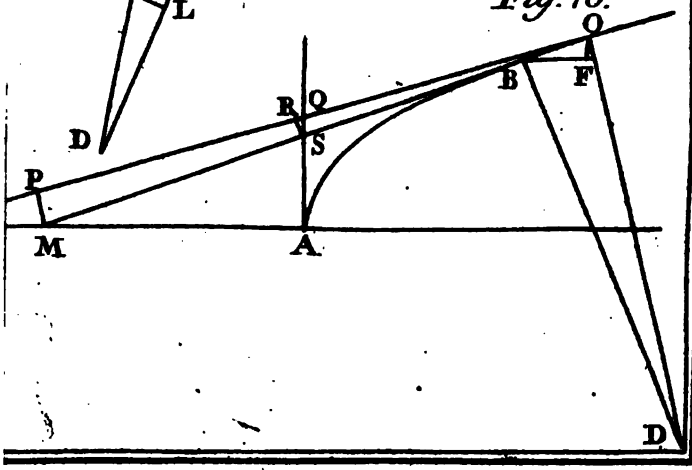


Fig. 70.



Digitized by Google

Digitized by Google

$= (a - x)dx : \sqrt{(2ax - xx)} + ds[adx : \sqrt{(2ax - xx)}]$ $= (2a - x)dx : \sqrt{(2ax - xx)} = dx\sqrt{(2a - x)} : \sqrt{x}$, $dy^2 = (2a - x)dx^2 : x$, & $ddy = -adx^2 : x\sqrt{(2ax - xx)}$ proinde $(dx^2 + dy^2) : -ddy = 2\sqrt{(2ax - xx)}$ & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = \sqrt{(2a : x)}$, ideoque $BD = 2\sqrt{(4aa - 2ax)} = 2GH = 2BL$.

Eſto AB Logarithmica vulgaris, ſubtangens $EF = a$, $BE = y$, $CE = x$; ex natura Logarithmicæ eſt $ydx = ady$, ergo $dy = ydx : a$ & $ddy = dydx : a = ydx^2 : aa$, adeoque $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (aa + yy) : -y$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = \sqrt{(aa + yy)} : y$, ergo $BD = (aa + yy)\sqrt{(aa + yy)} : -yy$, quæ quantitas, quia eſt negativa, oſtendit quod BD non ſit verſus axem ſumenda, TAB. LXI. Fig. 73.

Ex allatis exemplis ſatis patet, quomodo generaliter in omnibus curvis, & ubique, inveniantur centra Circulorum oſculantium. Oſtendendum nunc eſt, quo pacto per compendium inveniri poſſit diſtantia a vertice centri Circuli, qui curvam oſculatur in vertice.

Sit AB curva data, AC axis, A vertex; radio quocunque AC deſcribatur Circulus ABE; manifeſtum eſt, quod, exiſtente radio ſatis magno, Circulus alicubi ſecet curvam in B, cum interim ſemper tangat in vertice; manifeſtum quoque eſt, quod appropinquante centro ad A, punctum B quoque accedat ad A: inveniendum itaque eſt centrum C, ita ut punctum B cadat in A. Sit ergo $AD = x$, $DB = y$, $AC = CB = z$; erit $CD = -z + x$, ejuſque quadratum $CD^2 [zz - 2zx + xx] + DB^2 [yy] = BC^2 [zz]$, id eſt, $zz - 2zx + xx + yy = zz$, vel $yy + xx = 2zx$; proinde $z = \frac{1}{2}x + yy : 2x$; quia autem B debet cadere in A, erit $x = 0$; erit ergo $z = yy : 2x$; in qua æquatione ſubſtituendus eſt valor ipſius y, vel x, ſecundum naturam curvæ, & tunc y vel x ponendum $= 0$; quod provenit, monſtrabit quantitatem ipſius z. Exempli loco, ſit AB Parabola; erit $z = yy : 2x = ax : 2x = \frac{1}{2}a$. Sit AB Hyperbola habebitur pro $yy : 2x$, $(2ax + xx) : 2x = a + \frac{1}{2}x = a$. TAB. LXI. Fig. 74.

Modus iſte ſuccedit tantummodo in curvis geometricis, alter qui ſequitur generalis eſt, tam pro mechanicis quam geometricis.

Sit

TAB. LXI. *Fig.* 75. Sit AB curva data, CB applicata, BD perpendicularis, AC $= x$, BC $= y$; patet quod ſi $x = o$, CD ſit diſtantia centri Circuli oſculantis quæſita; eſt autem $dx : dy = y :$ CD, proinde CD $= ydy : dx$; in quo ſi ſubſtituatur valor alterutrius & ponatur alterum $= o$, habebitur magnitudo CD vel potius AD. Ex. gr. ſit AB Parabola, erit $ydy = \frac{1}{2} adx$, & $ydy : dx = \frac{1}{2} a =$ AD. Sit AB Hyperbola, ergo $ydy = adx + xdx$; ideoque $ydy : dx = a + x = a$.

LECTIO DECIMA OCTAVA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

TAB. LXI. *Fig.* 76. & 77. NOtandum eſt, quod prior modus ſe etiam extendat ad curvas mechanicas, ſi modo ſupponatur, quod demonſtratu facile eſt, quamlibet curvam AB, [*Fig. LXXVI* & *LXXVII*] ſi AC ſit indefinite parva, æqualem eſſe applicatæ BC, ſi nempe AB ſit concava verſus axem, & æqualem abſciſſæ, ſi ſit convexa verſus eundem; ſupponitur autem quod tangens in vertice ſit aut perpendicularis ad axem vel ipſe axis; illud in primo, hoc in altero caſu. Si itaque regulam velimus
TAB. LXI. *Fig.* 78. applicare ad Cycloidem; Sit AGE circulus genitor Cycloidis AB, AE $= a$, AC $= x$, AG $=$ GB $= s$, CB $= y$ $= s + \surd(ax - xx)$, quia itaque ſuppoſita AC $= o$, AD eſt $= yy : 2x$, ſubſtituendus eſt valor ipſius $yy = ss + ax - xx + 2s\surd(ax - xx) =$ (ob AG $=$ GC) $2ax - 2xx + 2ax - 2xx = 4ax - 4xx$; habebitur $yy : 2x = 2a - 2x =$ [ob $x = o$] $2a = 2$ AE, & ſic in aliis mechanicis etiam procedendum.

Hoc interim obſervatu dignum eſt, quod hæc regula generaliſſima reddi poſſit; id eſt, per eam in omnibus curvis, tam mechanicis, quam geometricis, in quovis puncto dato centrum Circuli oſculatoris inveniri queat, ut ut paulo prolixius
TAB. LXI. *Fig.* 79. quam per methodum differentialem. Sit AB curva data, in qua punctum B; deſcribendus eſt Circulus oſculans curvam in hoc

Digitized by Google

N°. CXLIX.

Fig. 72.

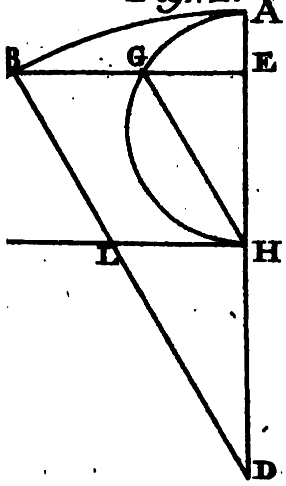


Fig. 73.

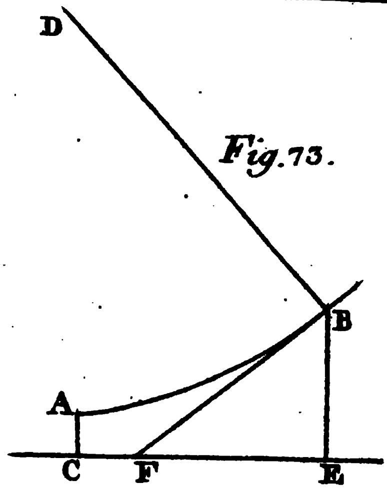


Fig. 75.

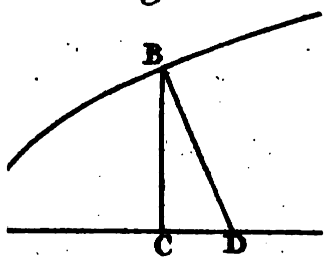


Fig. 76.

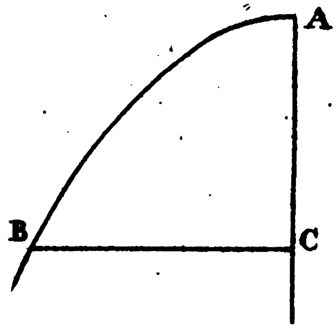


Fig. 79.

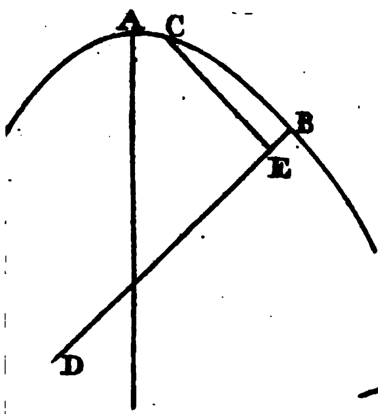
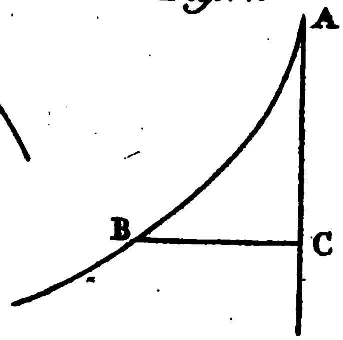


Fig. 77.



Digitized by Google

Digitized by Google

hoc puncto? Ducatur BD perpendicularis ad curvam AB; quia itaque centrum Circuli oſculatoris debet eſſe in recta BD, poteſt BA conſiderari tanquam curva, cujus vertex B, axis BD, applicata CE, quæ eſt perpendicularis ad axem BD; ex data dein natura curvæ quærenda eſt relatio inter BE tanquam abſciſſam & inter CE tanquam ordinatam; & tunc faciendum $BD = yy : 2x$, id eſt, $= CE^2$ diviſum per duplum BE; erit BD, ſi BE indefinite parva, radius Circuli oſculatoris quæſiti.

Hactenus oſtenſum eſt quo pacto in datis curvis invenienda ſint centra Circulorum oſculantium, vel qualis ſit natura curvæ in qua iſta centra reperiuntur, id eſt, qualis ſit curva quæ ſua evolutione deſcribit curvam datam; ubi monſtravimus quod cujuslibet curvæ geometricæ centra Circulorum oſculantium conſtituant etiam curvam geometricam, & quidem unicam, & rectificabilem, cujus nempe longitudo æquivalet radio Circuli oſculantis, vel data quantitate deficit.

Ex data nunc natura curvæ centrorum oſculantium, quærenda eſt ipſa curva, quam oſculantur Circuli iſtis centris deſcripti; vel, quod tantundem eſt, ſi datur curva, quæritur altera quæ ex evolutione prioris generatur. Notandum primo antequam ad ſolutionem progrediamur, quod etiamſi curva data ſit geometrica, illa tamen quæ ex hujus evolutione deſcribitur non ſemper, imo rariſſime, ſit geometrica, ſcilicet tunc tantum, cum curva data eſt rectificabilis. Sciendum etiam, quod hoc Problema infinitas ſolutiones admittat; prout enim initium evolutionis in curva data ſumatur, ſemper natura curvæ genitæ ſecundum hanc variationem mutabitur: Sit enim curva data ABCD, cui applicari concipiatur filum, cujus unus terminus fixus ſit in D, alter vero protendatur ultra verticem A uſque ad E. Si itaque filum evolvi intelligatur, deſcribet punctum E curvam EF, & punctum A curvam AG, quæ duæ curvæ diverſæ erunt naturæ. Centrum enim Circuli oſculantis curvam EF in E diſtat ab eodem E: centrum vero oſculantis curvam AG in A non diſtat ab eodem A, ſed eſt in TAB. LXII. Fig. 20.

ipſo vertice. Sic quoque, eodem tempore, quodlibet punctum intermedium B ſuam deſcribit curvam particularem BH. Sit nunc terminus A fixus & alter D mobilis; manifeſtum eſt quod ſi curvæ ABCD non ſit ab utraque parte ſimilis poſitio, punctum D & omnia intermedia C, vel ultra verticem ſumpta, deſcribent curvas DK, CI, tum inter ſe, tum a prioribus EF, AG, BH diverſas.

Quæ cum ita ſe habeant, curvarum tantum EF & AG naturam quæremus, id eſt, illarum quæ a puncto quodam ultra verticem & ab ipſo vertice deſcribuntur; ceterarum enim BH, haud abſimili modo, reperitur natura, conſiderando B tanquam verticem curvæ BCD, & BL perpendicularem ad curvam tanquam axem, ut in præcedentibus factum eſt. Sit ergo AB curva data, A vertex, AC axis, curvæ BA applicatum eſt filum, cujus terminus protenditur ultra verticem uſque ad D, qui per evolutionem deſcribit curvam DE, quæritur natura hujus curvæ? Producantur CA, & DA, & demittantur perpendiculares EG, EH. Sit AD $= b$, AB $= s$, AC $= x$, CB $= y$, DH $= r$, HE $= t$; producta EH ad L, eſt ds [$\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$] : $dx = s + b$ [EB] : EL, invenitur ergo EL $= (s+b) dx : \sqrt{(dx^2 + dy)^2}$, & EH $= (s+b) dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} - x = t$; ob $ds : dy =$ BE : BL, invenitur BL $= (s+b) dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, proinde CL $=$ AH $= y - (s+b) dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ & DH $= b + y - (s+b) dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = r$. Si AD $= 0$, id eſt, ſi evolutio incipit in A ponendum eſt $b = 0$, & ſic proveniet $r = y - s\,dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ & $t = s\,dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} - x$. Si ubique ſubſtituatur valor ipſius dy vel dx, ſecundum naturam curvæ datæ AB, habebitur quidem natura curvæ DE abſque differentialibus, ſed ſemper reperitur s, quod indicio eſt naturam curvæ DE dependere a rectificatione curvæ AB.

TAB. LXII. *Fig.* 81.

LECTIO

LECTIO DECIMA NONA.

Inventio curvarum ex evolutione Parabolæ cubicalis ſecundæ deſcriptarum.

UT ea quæ diximus exemplo illuſtrentur, afferemus Parabolam cubicalem ſecundam AB, in qua abſciſſa $= x$, ordinata $= y$, parameter $= a$, AD $= b$; æquatio pro hac Parabola eſt $axx = y^3$; quia ad curvam DE determinandam ingreditur magnitudo curvæ AB, quæ eſt s; ideo ante omnia rectificanda eſt, quod per communem viam ita peragitur: Sumantur quadrata ipſorum dx & dy, poſtquam alterutrius valor ſubſtitutus fuerit; & ipſorum ſummæ radicis quæratur integrale, hoc oſtendet rectificationem curvæ AB. Notandum tamen eſt [quemadmodum ſupra monſtravimus] quod interdum verus valor non prodeat, ſed data quædam quantitas reſcindenda vel addenda ſit, quæ invenitur ex ſuppoſitione x, vel $y = 0$. Quoniam ergo $axx = y^3$, erit $x = \surd(y^3 : a)$ & $dx = 3ydy : 2\surd ay$; hinc $dx^2 = 9ydy^2 : 4a$, addatur dy^2, habebitur $(9ydy^2 + 4ady^2) : 4a = ds^2$; ergo $ds = dy\surd(9y + 4a) : \surd 4a$; hujus integrale $(\frac{2}{3}y + \frac{8}{27}a)\surd(9y + 4a) : \surd 4a = s$. Sed quia ſupponendo $y = 0$ provenit $\frac{8}{27}a = s$, ſignum eſt quod a quantitate inventa auferendum ſit $\frac{8}{27}a$, & ſic $(\frac{2}{3}y + \frac{8}{27}a)\surd(9y + 4a) : \surd 4a - \frac{8}{27}a = s$. Ut itaque ad naturam curvæ DE deveniatur, quærenda eſt EH & DH, id eſt, t & r; ſupra autem invenimus $t = (s + b)dx : \surd(dx^2 + dy^2) - x$ & $r = b + y - (s + b)dy : \surd(dx^2 + dy^2)$; utrobique ſubſtituatur valor ipſorum s, x & dx, & invenietur $t = (\frac{4}{9}a\surd(9yy + 4ay) : 2a - \frac{4}{9}\surd ay + \frac{1}{2}b\surd(y : a)) : \surd((9y + 4a) : 4a)$ & $r = ((b + y - \frac{2}{3}y - \frac{8}{27}a)\surd((9y + 4a) : 4a) + \frac{8}{27}a - b) : \surd((9y + 4a) : 4a) = b + \frac{1}{3}y - \frac{8}{27}a + (\frac{8}{27}a - b) : \surd((9y + 4a) : 4a)$. Ex quibus æquationibus manifeſtum eſt, quod curva DE valde ſit compoſita, & quidem magis vel minus, prout AD ſumitur. Si enim AD, id eſt b, ſit $= \frac{8}{27}a$, provenit

TAB. LXII. *Fig.* 82.

$t = (y + \frac{4}{3}a)\sqrt{(y:a)} - y\sqrt{(y:a)} = \frac{4}{3}\sqrt{ay}$ & $r = \frac{1}{3}y$. Si itaque æquationem invenire libeat exprimentem naturam curvæ DE in litteris t & r, ſubſtituendus eſt valor ipſius y in alterutra æquatione; quia enim $r = \frac{1}{3}y$, erit $y = 3r$, proinde $\frac{4}{3}\sqrt{ay}$ $[t] = \frac{4}{3}\sqrt{3ar}$; exinde formatur æquatio $16ar = 27tt$, quod oſtendit curvam DE eſſe Parabolam, cujus parameter $= \frac{16}{27}a$, cum b eſt $= \frac{8}{27}a$. Is ſolus caſus eſt, qui curvam DE tam ſimplicem reddit; in omnibus enim aliis, & per ipſam poſitionem $b = 0$ [qui caſus poſt priorem ſimpliciſſimus videtur] quantitates t & r admodum compoſitæ reperiuntur, quod cauſatur ut curva DE etiam magis vel minus evadat compoſita.

De Rectificatione curvarum ope ſua Evolutionis.

Communiſſima via rectificandi curvas, ut modo innuimus, eſt, ut ſumatur integrale ex radice ſummæ quadratorum ipſius dx & dy. Hæc tamen methodus non niſi in curvis, quarum natura datur per relationem applicatarum ad abſciſſas commode adhiberi poteſt; in aliis quarum natura non niſi per proprietates innoteſcunt, ægre in uſum venit. Modus autem rectificandi curvas per ſuam evolutionem quodammodo generalis dici poteſt, & in aliquibus exemplis longe facilius in cognitionem longitudinis curvæ deducit, quam modus vulgaris; utut negandum non ſit, quod cum haberi poteſt æquatio brevis & ſolutu facilis, quæ exprimit relationem applicatæ ad abſciſſam, interdum præſtet vulgarem adhibere.

TAB. LXII. *Fig* 83. Modus autem per evolutionem eſt talis: Sit ABC curva data, cujus quæritur longitudo? Intelligatur punctum A evolvendo deſcribere curvam AD; patet ex ante dictis, quod filum CD ubique ſit tangens curvæ ABC; item quod CD ſit æqualis illi: eſt autem tangens CE data; reſtat itaque ut inveniatur recta ED, quæ ſi innoteſcat, & auferatur a tangente EC, remanebit DC = curvæ quæſitæ AC. Recta vero ED ſic reperitur: Ducatur tangens GB, quæ a priori EC infinite parva quantitate diſtet, centroque C deſcribatur arculus GF; haberi poterit triangulum EFG pro rectangulo: quia au-

Digitized by Google

autem FD eſt æqualis GM, erit EF differentiale ipſius ED: ducatur AI perpendicularis ad EA; erit, ob datam curvam, EI & EA data, ſit ergo $EI = r$ & $EA = t$; proinde $EG = dt$; quia vero $EI : EA = EG : EF$, id eſt, $r : t = dt : \frac{tdt}{r} = EF$. Ex hoc, ſi fieri poteſt, ſumatur integrale, quod erit æquale ED, quæ ablata a tangente EC, relinquit $DC = AC$.

Nonnunquam commodius per additionem alicujus integralis invenitur CD, vel AC. Eſt enim $CD = CI + ID$; ſed CI eſt data, reſtat itaque ut inveniatur ID, quæ ita reperitur. Ducto arculo HL, erit $DL = MH$; proinde eſt LI differentiale ipſius DI. Sit ergo $EI = r$, & $AI = t$, proinde $HI = dt$, & fiat $EI : AI = HI : LI$, invenitur ergo $LI = tdt : r$, cujus integrale dat rectam DI; cui ſi addatur recta CI, habebitur $CD =$ curvæ quæſitæ AC.

Obiter hic animadvertendum, quod evolutio curvarum inſervire etiam poſſit dimenſioni ſpatiorum. Spatii enim curvilinei ACE differentiale eſt triangulum GCE, quod invenitur quærendo FG, ex triangulis ſimilibus EGF & EIA, & multiplicando hanc FG per dimidiam EC. Eodem modo LH, multiplicata per dimidiam IC, dat differentiale ſpatii curvilinei AIC.

Sit Parabola cubicalis ſecunda AC, $AR = x$, $RC = y$, parameter $= a$; ergo $axx = y^3$. Erit $AE = \frac{1}{2}x = t$, $AI = \frac{1}{3}RC = \frac{1}{3}y$, $EI = \sqrt{(\frac{1}{4}xx + \frac{1}{9}yy)} = r$; quia vero $x = \sqrt{(y^3 : a)}$ erit $dt = \frac{3}{4}ydy : \sqrt{ay}$, proinde $tdt : r = 3yydy : 8a\sqrt{(\frac{1}{4}xx + \frac{1}{9}yy)} = 3ydy : 8a\sqrt{(\frac{1}{4}y : a + \frac{1}{9})} = 3ydy : 8\sqrt{(\frac{1}{4}ay + \frac{1}{9}aa)}$. Hujus integrale invenitur ſupponendo $\frac{1}{4}ay + \frac{1}{9}aa = zz$; erit enim æquale $\frac{1}{2}z^3 : a - \frac{1}{6}az$, quod ſi auferatur ab EC, remanebit $DC = AC$. TAB. LXII. Fig. 84.

Sit AC Cyclois, ADE circulus genitor, $AE = 2a$, $AF = x$, arcus $AD = s = CD = AG$, recta $AD = \sqrt{2ax} = CG$. Quia $AD : DF = GH : GI$, id eſt, $\sqrt{2ax} : \sqrt{(2ax - xx)}$ vel TAB. LXII. Fig. 85.

 √2ax

[illegible]

[illegible] ratio di- [illegible] tantum da- [illegible] [illegible] AHF, [illegible] [illegible] & [illegible] GH [illegible] GB, & [illegible] curvam [illegible] atque [illegible] CD + [illegible] [illegible] trian- [illegible] AH; [illegible] diametrum [illegible] propor- [illegible] ACHA. mul- [illegible] tiali

ſpatii

Digitized by Google

N°. CXLIX.



Fig. 81.

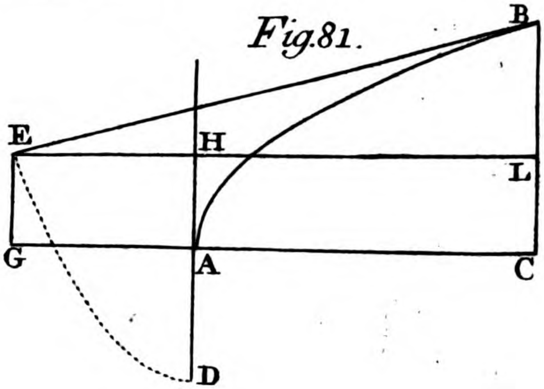


Fig. 83.

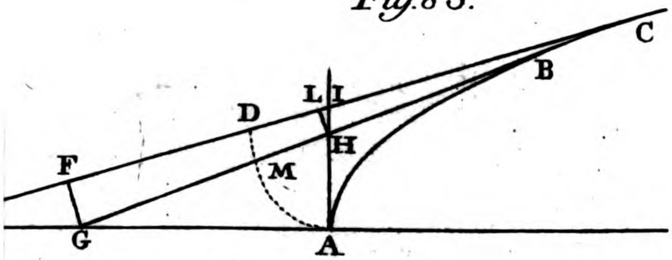
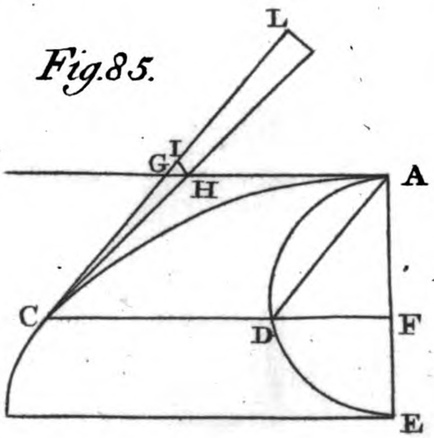


Fig. 85.



Digitized by Google

$\sqrt{2a} : \sqrt{(2a - x)} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}} [ds] : \frac{adx}{\sqrt{2ax}}$; hujus integrale $\sqrt{2ax} =$ GL; eſt autem $\sqrt{2ax} =$ AD = CG, ideoque CG + GL, vel dupla CG = curvæ AC. Pro dimenſione ſpatii curvilinei AGC, fiat AD : AF = GH : HI, erit HI = $adx : \sqrt{(4aa - 2ax)}$, multiplicetur per $\frac{1}{2}$ CH provenit $\frac{1}{2} adx \sqrt{(x : (2a - x))}$; eſt autem hoc æquale differentiali ſegmenti AD; proinde ſpatium curvilineum AGC = ſegm. AD.

LECTIO VIGESIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

PER Exemplum quod ſequitur apparebit, quo pacto dimenſio inveniatur ſpatiorum & curvarum, non quidem datarum, ſed illarum quæ per evolutionem harum deſcribuntur.

TAB. LXIII. *Fig.* 86. Sit ABE Circulus, cujus evolutione deſcribitur curva AHF, A initium curvæ, F finis: quæritur dimenſio curvæ, portionis cujuſcunque AH, ejuſque ſpatii ACHA? Notandum eſt, quod curva AHIF ſit ſpecies Spiralis; item quod AF intercepta inter initium & finem ſit æqualis peripheriæ Circuli, & perpendicularis ad curvam in punctis A & F. Sit nunc GH differentiale curvæ AH, ducantur tangentes HC, GB, & radii CD, BD; erunt HC, GB perpendiculares ad curvam AH, & æquales arcubus AC, AB, quos voco s, adeoque BC = ds. Quoniam itaque angulus GBD = BCD + BDC, & idem GBD = HCD, utpote uterque rectus, erit HCG = BDC; proinde triangulum BCD ſimile triangulo HCG, ergo DC : HC = BC : GH, id eſt, $a : s = ds : \frac{sds}{a} =$ GH; hujus itaque integrale $ss : 2a =$ curvæ AH; ex quo patet quod AH ſit tertia proportionalis ad diametrum AE & arcum AC, ideoque, tota AHIF eſt tertia proportionalis ad AE & AF. Pro dimenſione ſpatii ACHA, multiplicetur $\frac{1}{2}$ CH per GH, provenit $ssds : 2a =$ differentiali

ſpatii

Digitized by Google

N.° CXLIX.

Fig. 81.

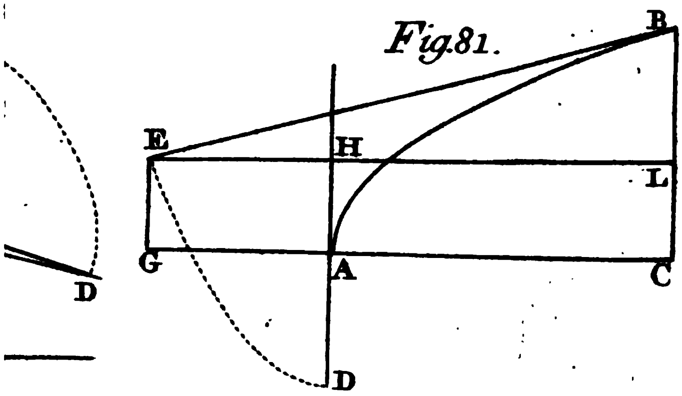


Fig. 83.

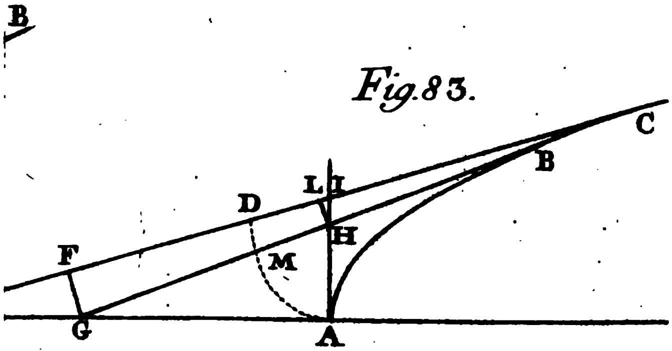
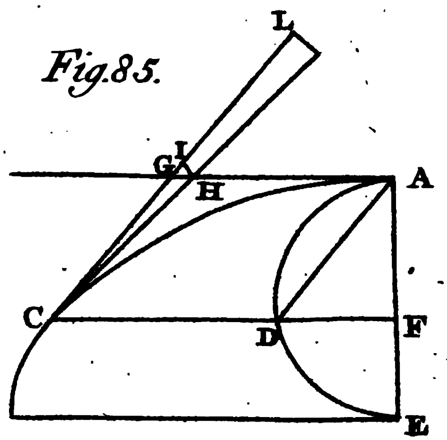


Fig. 85.



ſpatii ACH, id eſt, ipſi triangulo GCH; hujus ergo integrale $s^3 : 6a =$ ſpatio ACHA. Hinc totum ſpatium AHIFAECA æquatur tertiæ parti Circuli radio AF deſcripti: Curva vero AHIF æqualis eſt ſemiperipheriæ ejuſdem Circuli.

Hæc, quam addimus, curva oſtendit quod multo facilius ſit ejus rectificationem invenire, & ſpatium æquare circulo, per evolutionem ſuam, quam per modum vulgarem. Problema autem eſt tale. Datus eſt angulus rectus CAB, cujus duo crura AC, AB indefinite protenſa, quibus inſiſtit regula quædam, vel linea data DE mobilis, cujus duo termini D, E moventur in cruribus AC, AB: quæritur natura curvæ CFB, quæ a regula DE in quovis ſitu tangitur; item rectificatio illius, & dimenſio ſpatii FEB? *Solut.* Ad naturam curvæ obtinendam quærenda eſt longitudo EF, id eſt, diſtantia puncti contactus ab alterutro terminorum E. Quoniam autem punctum contactus cujuſcunque curvæ, & rectæ, eſt in puncto interſectionis, in quo duæ tangentes infinite parva quantitate diſtantes ſe mutuo interſecant, quærendum igitur eſt punctum F, in quo duæ lineæ æquales DE, *de* [ſuppoſito quod D*d* ſit differentiale ipſius AD] ſe interſecant. Punctum autem hoc ſic invenitur. Ducatur EH parallela ipſi AC, & ſit DE vel $de = a$, AE $= x$, erit AD $= \sqrt{(aa - xx)}$, E$e = dx$, D$d = xdx : \sqrt{(aa - xx)}$. Quia eA : Ad = eE : EH, erit EH $= dx\sqrt{(aa - xx)} : x$; eſt autem EH : dD = EF : FD, & componendo EH + dD : EH = ED : EF, id eſt, $\frac{aadx}{x\sqrt{(aa - xx)}} : \frac{dx\sqrt{(aa - xx)}}{x} = a : \frac{aa - xx}{a}$; erit itaque EF $= (aa - xx) : x$, proinde DF $= a - (aa - xx) : a = xx : a$. Ex hoc curva CBF facile ſic conſtruitur. Ducta in angulo recto linea DE quomodocunque $= a$, ſumatur DF æqualis tertiæ proportionali ad DE & AE, erit punctum F in curva quæſita CFB. Hinc ſequitur, quod AB & AC, ad extremitates curvæ uſque ductæ ſint æquales datæ DE.

TAB. LXIII. *Fig.* 87.

Si naturam curvæ CFB, more *Carteſiano*, invenire velimus; demit-

demittatur perpendicularis FK, & ſit AK $= r$, KF $= t$; quia DE : DA $=$ FE : FK, invenitur FK $= (aa - xx)\sqrt{(aa - xx)} : aa = t$, & quia DE : AE $=$ DF : AK, invenitur AK $= x^3 : aa = r$. Per priorem æquationem eſt $(aa - xx)^3 = a^4tt$, proinde $aa - xx = a\sqrt[3]{att}$, ideoque $x = \sqrt{(aa - a\sqrt[3]{att})}$, & $x^3 = \sqrt{(aa - a\sqrt[3]{att})^3} =$ [per alteram æquationem] aar, proinde $(aa - a\sqrt[3]{att})^3 = a^4r^2$ & $aa - a\sqrt[3]{att} = a\sqrt[3]{arr}$, vel $a = \sqrt[3]{att} + \sqrt[3]{arr}$; ſumptis cubis $a^3 = att + 3at\sqrt[3]{rrt} + 3ar\sqrt[3]{rtt} + arr = att + 3a\sqrt[3]{aattrr} + arr$; reducta æquatione habetur $aa - tt - rr = 3\sqrt[3]{aattrr}$; ſumptis cubis & reducta æquatione ad cyphram erit

$$\begin{array}{llll} r^6 - 3aar^4 & + 3a^4rr & - a^6 & = 0 \\ \quad + 3tt & + 21aatt & + 3a^4tt & \\ & + 3t^4 & - 3aat^4 & \\ & & + t^6 & \end{array}$$

Si per hanc æquationem rectificationem curvæ CFB indigare vellemus methodo ordinaria, res factu difficilis, quinimo fere impoſſibilis eſſet, ob æquationem curvæ valde compoſitam,

LECTIO VIGESIMA PRIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

TAB. LXIII. *Fig.* 87. Quam difficile eſt invenire rectificationem curvæ CFB per æquationem inventam ſex dimenſionum parium, tam facile contra reperitur illa per evolutionem curvæ. Sit enim BNM, quam evoluta CFB deſcribit; AB, vel AC, vel DE $= a$, BE $= z$, erit AE $= a - z$, proinde FE $= (2az - zz) : a$ AD $= \sqrt{(2az - zz)}$ & Ee $= dz$; quia itaque DE : AE $=$ Ee : EL, id eſt, $a : a - z = dz : \frac{adz - zdz}{a}$, cujus integr. $(az - \frac{1}{2}zz) : a =$ EN; addatur FE $[(2az - zz) : a]$ provenit $(3az - \frac{3}{2}zz) : a =$ FN $=$ curvæ FB. Eſt autem

2aa

$\frac{2az - zz}{a} : \frac{3az - \frac{3}{2}zz}{a} = 2 : 3$; erit etiam FE: FB = 2:3. Hinc oppido ratio ſpatii FEB ad ſpatium FBN liquet, quia enim FE vel FL: FN = 2: 3; erit triangulum FLE : triang. FNO = 4: 9; proinde omnia triangula ad omnia triangula, id eſt, ſpatium FEB ad ſpatium FBN ut 4 ad 9; eſt etiam DE: AD = E*e*: *e*L, id eſt, $a : \sqrt{(2az - zz)} = dz : \frac{dz\sqrt{(2az - zz)}}{a} = Le$; multiplicetur per $\frac{1}{2}$ FE habebitur $(2az - zz)\, dz\sqrt{(2az - zz)} : 2a^2$ = triangulo FE*e*; hujus autem integrale [ut patet per ea quæ ſupra in Calculo integralium dicta ſunt] dependet a quadratura circuli; poteſt itaque inveniri ſpatium circulare æquale ſpatio FEB. Item FL: FN = L*e*: NO, id eſt, $2 : 3 = \frac{dz\sqrt{(2az - zz)}}{a} : \frac{3dz\sqrt{(2az - zz)}}{2a}$ = NO, ideoque radio AB deſcripto circulo BPQ, erit ſegmentum BPE diviſum per $\frac{3}{3}$ AB = curvæ BN.

Coroll. I. Tota CFB = $\frac{3}{2}$ CA, vel curva CFB eſt in ratione ſeſquialtera ad genitricem ſuam DE.

Coroll. II. Spatium CFBA eſt ad ſpatium ABNM, ut 4 ad 9.

Coroll. III. Curva vero BNM eſt = $\frac{3}{4}$ arcus circularis BPQ.

Coroll. IV. Patet quod curva CFB ſit illa, quam ſupra * per methodum tangentium inverſam quæſivimus; cum nempe propoſitum fuit, ut curva eſſet ubique in eadem ratione ad tangentem, ut hic in ratione 3 ad 2.

De curvis Cycloidibus, earum rectificatione, ſpatiorum dimenſione & earundem evolutione.

Contemplatio curvarum Cycloidalium non immerito locum hic poſtulat; quippe per evolutiones præcipuæ earum proprietates deteguntur; quod enim Dnus. HUGENIUS oſtendit de vulgari Cycloide, quæ deſcribitur a puncto in periphe-

* Lect. XII, pag. 425, ſub finem.

ria circuli ſuper recta linea rotati, quod ſcilicet evolutio hujus Cycloideos eandem Cycloidem progeneret; dubitavitque an aliæ dentur curvæ, quæ per ſuam evolutionem deſcribant alias ſibi ſimiles: id quoque Nob. TSCHIRNHAUS demonſtravit de ſua Cauſtica, ſimul oſtendens quod ſit Cyclois. Hic vero monſtrabimus, quod non ſolum Cyclois vulgaris HUGENII & Cauſtica TSCHIRNHAUSII hac proprietate gaudeant, ſed quod omnes Cycloides poſſibiles, quotquot earum concipi poſſunt, per ſuas evolutiones ſibi ſimiles Cycloides deſcribant. Alia etiam adnectetur curva ex Spiralium genere, cujus evolutio non ſolum ipſi ſimilem, ſed plane eandem Spiralem progignit.

Ante omnia diſpiciendum, quid ſit curva cycloidalis, quæ definiri poteſt, quod ſit curva quæ formatur a puncto peripheriæ circuli ſuper alio circulo immoto rotati. Sit ABC circulus immotus ſuper cujus peripheria circumvolvatur alia peripheria circuli BDE; punctum aliquod D in hac peripheria ſumptum deſcribet curvam ADC, quæ vocatur Cyclois. Ubi ſtatim apparet, quod exiſtente circulo ABC infinito, peripheria ABC deveniat linea recta; proinde curva ADC ſit Cyclois vulgaris *Hugeniana*; quod ergo in genere demonſtratur de omnibus Cycloidibus, pariter etiam intelligendum eſt de vulgari. Per generationem curvæ patet quoque quod arcus AB interceptus inter initium curvæ A, & punctum contactus B circuli BDE ubivis exiſtentis, ſit æqualis arcui BD intercepto inter idem punctum contactus & inter punctum aſſumptum D: circumvolvendo enim circulum BDE, arcus BD metitur arcum AB. Hinc ſi dato initio A & arcu AB, inveniri poteſt geometrice punctum D, id eſt, dato initio A & arcu AB, ſi geometrice arcui AB æqualis abſcindi poteſt arcus BD; erit Cyclois ADC curva geometrica. Si vero arcui AB non poteſt geometrice inveniri arcus æqualis BD, erit Cyclois ADC mechanica. Oſtendam autem quod in quibuſdam Cycloidibus poſſibile ſit arcui AB æqualem abſcindere BD, in aliquibus vero impoſſibile; adeoque oſtenſum ſimul erit, quod quædam Cycloides ſint curvæ geometricæ, quædam vero

TAB. LXIII. *Fig.* 88.

Digitized by Google

ro mechanicæ; id quod nemo quantum ſcio hactenus animadvertit. Dico itaque, quod ſi circuli ABC & BDE ſint tales, ut radius FB ſit ad radium GB ut numerus ad numerum, id eſt, ſi habeant rationem numeris exprimibilem; dico quod Cyclois ADC ſit geometrica: ſi vero radius FB ad radium GB habeat rationem numeris non exprimibilem, Cyclois ADC erit mechanica. Prius ſic demonſtratur: Si arcui AB dato æqualis eſt ſumendus BD, producatur GB ad R, ita ut GR ſit = FA; fiat angulus RGS = ang. AFB, erit arcus BT datus: fiat itaque ut GB ad FA, ita arcus BT ad arcum BD, erit arcus BD = arcui AB. Nam BD : BT = AF : BG = RG : BG = RS : BT = AB : BT; ergo AB = BD. Reſtat itaque ut demonſtretur, quod inveniri poſſit geometrice arcus BD, qui ſit ad arcum BT, ut AF ad BG, id eſt, ut numerus ad numerum. TAB. LXIII. *Fig.* 89.

Si AF multiplex eſt ipſius BG, res eſt in confeſſo; BT enim toties ſumendus eſt quoties BG continetur in AF. Si vero AF non ſit multiplex ipſius BG, ſed in quacunque ratione, ut ex. gr. 13 ad 5, patet quod arcus BT ſit duplus ſumendus & inſuper ipſius tres quintæ partes; res itaque eo recidit, ut arcus datus BT dividatur in quinque partes æquales, quarum ſumendæ ſunt tres, & arcui duplo addendæ. Notum vero eſt, quod arcus datus, vel quod tantundem eſt angulus datus, dividi geometrice poſſit in tot partes æquales quot libuerit; pervenietur enim ſemper ad æquationem geometricam diviſioni anguli correſpondentem.

LECTIO VIGESIMA SECUNDA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

OStendimus itaque, quod quotieſcunque radius circuli immoti ad radium genitoris habet rationem ut numerus ad numerum, Cyclois progenita ſit ſemper geometrica: Quod vero

Digitized by Google

ro ſit mechanica, tunc cum radii ſunt incommenſurabiles, id eſt, cum ratio radiorum non poteſt numeris exprimi, ſic demonſtratur. Omnis curva, ſive geometrica, ſive mechanica, aut in ſe redit, aut in infinitum protenditur; quia generatio curvæ ſemper continuari poteſt. Si itaque circulus genitor ABC prima ſua circumvolutione deſcribat cum puncto A Cycloidem ADE, erit hæc Cyclois nondum finita, ſed continuata circumvolutione deſcribetur ſecunda EFG, & dein tertia GHI, tunc quarta IKL, & ſic deinceps; donec tandem punctum A, poſt varias circumvolutiones, iterum cadat in principium A; quo in caſu, continuata circumvolutione eadem Cyclois de novo progignitur; adeo ut omnes Cycloides ſimul ſumptæ non niſi unicam conſtituant curvam ADEFGHIKL &c. Si igitur radii circuli immoti & circuli genitoris ſunt incommenſurabiles, erunt etiam illorum peripheriæ incommenſurabiles; ideoque circulus genitor ABC infinitas perficiet circumvolutiones antequam punctum A reincidat in principium A; ſic igitur habentur infinitæ Cycloides, quæ unicam tantum faciunt curvam ADEFGHIKL &c: dico hanc curvam eſſe mechanicam. Si enim geometrica dicatur eſſe; ducatur quomodocunque recta linea HF per tranſverſum curvæ, hæc recta [ut patet] ſecabit curvam in infinitis punctis H, *m*, *n*, &c. F. Quia vero æquatio naturam curvæ cujuſdam exprimens ad minimum tot dimenſiones habet, quot in punctis recta curvam ſecare poteſt, ſequeretur quod æquatio, quæ exprimeret naturam noſtræ curvæ, infinitas haberet dimenſiones: Quod eſt abſurdum. Ergo curva eſt mechanica.

Tab. LXIII. *Fig.* 90.

Hinc patet, quod ſit impoſſibile arcum circuli datum dividere in duas partes, quæ ſint ut numerus ad non numerum; id eſt, quæ ſint incommenſurabiles. Nam ſi hoc fieri poſſet, curva noſtra itidem eſſet geometrica. Patet quoque, quod ſi radii circuli immoti & genitoris ſint commenſurabiles, Cyclois tamen inde progenita, utut geometrica, interdum magis vel minus ſit compoſita: nam prout circulus genitor paucioribus vel pluribus circumvolutionibus reincidit in principium, recta linea HF quo-

quoque in paucioribus, vel pluribus punctis curvam ſecare poteſt; & idcirco æquatio naturam Cycloideos exprimens ad pauciores vel plures dimenſiones aſcendit.

Vidimus hucuſque in quo Cycloides differant a ſe invicem, & quid peculiare unaquæque habeat: videndum nunc in quo conveniant & quid ipſis ſit commune. Primo ſeſe offert generalis earum rectificatio, & ſpatiorum cycloidalium dimenſio, & dein identitas curvæ per evolutionem Cycloidis procreatæ. Quæ ut eo melius concipi poſſint, conſidero circulum immotum, & genitorem, tanquam duo Polygona æquilatera & æquiangula, quorum latus unius eſt æquale lateri alterius. Sint ex. gr. duo Polygona ABD & ABC æquiangula & æquilatera per ſe, non inter ſe, quæ habeant latus commune AB; ita ut ſi unum Polygonum moveatur ſuper altero, latus AE cadat in FA, dein EG in HF, poſtmodum GC in IH, & ſic deinceps. Si itaque hæc duo Polygona ſupponantur conſtare lateribus infinitis, poterint haberi pro circulis; adeo ut curva quam punctum quoddam ut C deſcribit ſit iſta Cyclois de qua agitur. Notandum itaque in anteceſſum, quod per hanc ſuppoſitionem numerus laterum Polygoni ABD, vel potius circuli immoti, ſit ad numerum laterum circuli genitoris ABC, ut diameter illius ad diametrum hujus; quia numerus laterum eſt ad numerum laterum ut peripheria ad peripheriam. Quia autem producta BA, angulus KAF = 4 rect. diviſis per numerum laterum Polyg. & KAE = pariter 4 rectis, diviſis per numerum laterum Polygoni, erit angulus KAF ad angulum KAE, ut viceverſa numerus laterum circuli genitoris ad numerum laterum circuli immoti, id eſt ut diameter illius ad diametrum hujus. TAB. LXIII. *Fig.* 91.

Ducantur a puncto C deſcribente Cycloidem rectæ CB, CA, CE, CL &c. erunt anguli ACB, ECA, LCE, GCL &c. æquales; quia autem EAK + EAB = 2 rectis = ECB + EAB, erit EAK = ECB = 2 ACB. Sit nunc diameter circuli genitoris = $2b$, & diameter circuli immoti = $2a$, erit itaque KAF : KAE = $b : a$, proinde *componendo* FAE: TAB. LXIII. *Fig.* 92.

Digitized by Google

KAE $= b + a : a$; hinc FAE : ACB $= 2b + 2a : a$. Conſideretur jam generatio Cycloidis, quæ componitur ex arculis circuli, quorum centra ſunt A, F, H, R, &c. & radii AC, EC, LC, GC &c. vel OA, SF, *c*H, MR, &c. patet ex generatione quod anguli OAC, SFO, *c*HS, &c. ſint æquales angulo EAF; ideoque OC : AB = SO : EQ = *c*S : LX, &c. $= 2b + 2a : a$; proinde omnes antecedentes, id eſt, curva C*c*, ad omnes conſequentes, id eſt, ad rectam YB vel GB, ut $2b + 2a$ ad a; ſpatium autem COS*c*RFA conſſtat ex ſectoribus OAC, SFO, *c*HS &c. plus ſectoribus ACB, FOA, HSF, RCH, &c. æqualibus ACB, ECA. LCE GCL &c. id eſt, ſegmento CLB; eſt autem ſect. OAC : ACB = SFO : ECA = *c*HS : LCE, &c. $= 2b + 2a : a$; ergo omnes antecedentes OAC + SFO + *c*HS &c. ad omnes conſequentes, id eſt, ad ſegmentum BCL $= 2b + 2a : a$, & *componendo* OAC + SFO + *c*HS &c. + ſegment. BCL, id eſt, ſpatium COS*c*RAB ad ſegm. BCL, ut $2b + 3a$ ad a.

Hæc ſi rite applicentur ad circulos, facile omnia deducentur.

TAB. LXIV. *Fig.* 93. Sit circulus genitor in quacunque poſitione BEG; ducantur per centra lineæ rectæ HID, HKG, & ſumatur arcus DF = arcui BE, & ſit HA $= a$, & AI $= b$; patet primo, quod ducta recta EB a puncto deſcribente E ad punctum contactus B, ſit perpendicularis ad Cycloidem CED; proinde ducta EG eandem tanget: Item portio Cycloidis DE eſt ad rectam AF, id eſt, ad tangentem EG ut $2b + 2a$ ad a, hoc eſt in ratione conſtanti; proinde tota cycloidalis curva DEC eſt ad diametrum circuli generatoris ut $2b + 2a$ ad a: ſpatium vero cycloidale DEBA eſt ad ſegm. DFRA, id eſt, ad ſegm. BELG ut $2b + 3a$ ad a, etiam in ratione conſtanti; proinde totum ſpatium cycloidale DECA eſt ad ſemicirculum genitorem ut $2b + 3a$ ad a.

Scholium. Si circulus genitor movetur in concava parte circuli immoti, erit diameter genitoris quantitas negativa; proinde

LIX.

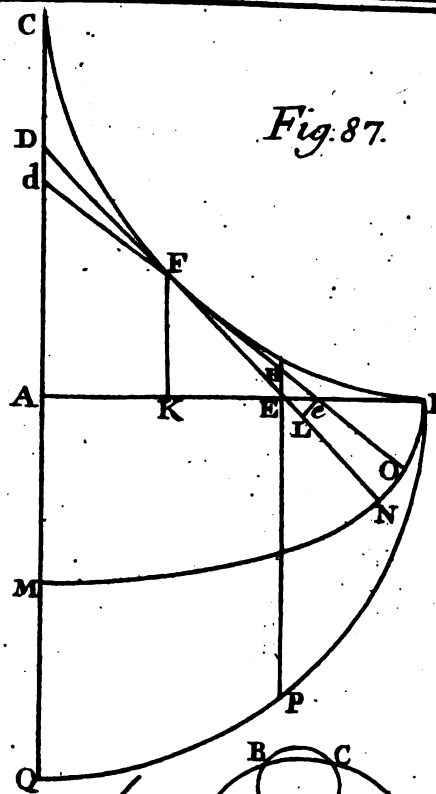
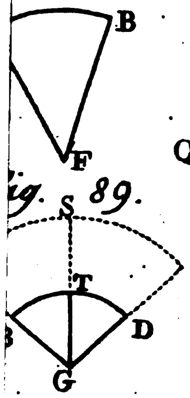


Fig. 87.



ig. 89.

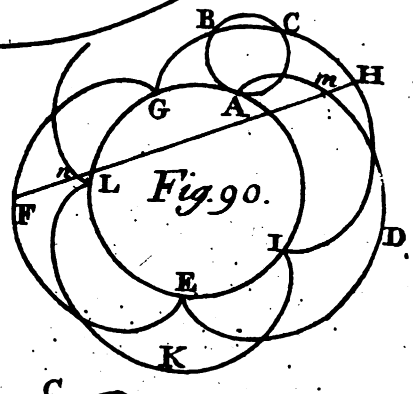


Fig. 90.

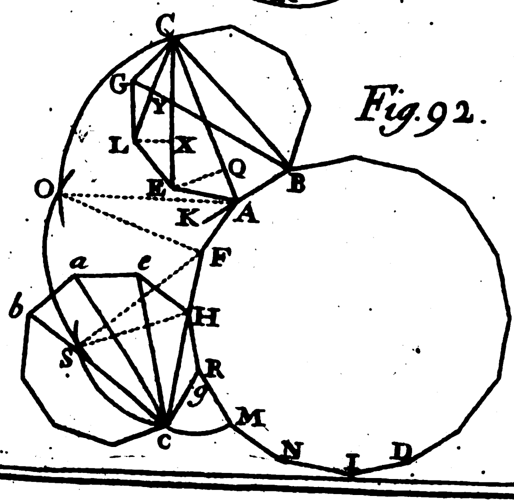


Fig. 92.

Digitized by Google

de ad rectificationem & dimenſionem curvæ & ſpatii cycloidalis habendam, faciendum eſt, ut $-2b+2a$ ad a, ita curva DE ad rectam EG; & ut $-2b+3a$ ad a, ita ſpatium DEBA ad ſectorem BELG.

LECTIO VIGESIMA TERTIA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

Oſtendimus modum rectificandi Cycloidem & dimetiendi ſpatium ejus, per naturam generationis; quo modo paulo prolixior & operoſior eſt hic, quem nunc damus per Calculum integralium. Sit itaque ARC circulus immotus, cujus diameter æqualis $2a$, DPA circulus genitor, ejuſque diameter $=2b$, punctumque ſupremum D, deſcribens Cycloidem DEC, per rotationem venit in E, per quod, centro H, deſcribatur arcus EN, aliuſque en a priori infinite parva quantitate diſtans; agantur lineæ HES, Hes, HMP, & demittantur perpendiculares PO, ML; quia nunc ſemiperipheria DPA æqualis eſt arcui ARC, & ER vel PA $=$ RC, erit arcus reſiduus DP $=$ arcui AR; patet etiam, quod arcus AM ſit æqualis arcui RB. Ponatur ergo DO $=x$, arcus DP $=s$, arcus AM $=t$; proinde AB $=s+t$, erit PO $=\sqrt{(2bx-xx)}$, HO $=a+2b-x$, ideoque PH $=\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}$ quia vero PH : PO $=$ MH : ML, invenitur ML $=a\sqrt{(2bx-xx)}:\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}$ & dein HL $=(aa+2ab-ax):\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}$; ergo AL $=a-(aa+2ab-ax):\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}$. Ut calculus facilius inſtituatur, ponatur $\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}=z$ erit $x=(aa+4ab+4bb-zz):(2a+2b)$ & $\sqrt{(2bx-xx)}=\sqrt{(-z^4+4bbzz+4abzz+2aazz-4aabb-4a^3b-a^4)}:(2a+2b)$; proinde ML $=$

TAB. LXIV. Fig. 94.

$a\sqrt{(-z^4}$

$a\surd(-z^4+4bbzz+4abzz+2aazz-4aabb-4a^3b-a^4):(2az+2bz)$ & AL $=a-(a^3+2aab+azz):(2az+2bz)$; erit ergo differentiale ipſius ML $=(-az^4+4a^4b+a^5)dz:(2azz+2bzz)\surd(-z^4$ &c.) & differentiale ipſius AL $=(2aab+a^3-azz)dz:(2azz+2bzz)$.

Sit, ad calculum facilitandum, $2b+a=c$, erit different. ML $=(-az^4+2a^4c-a^5)dz:(2azz+2bzz)\surd(-z^4+4bbzz+4abzz+2aazz-aacc)$ & diff. AL $=(aac-azz)dz:(2azz+2bzz)$. Sumantur eorum quadrata, quorum ſumma erit æqualis quadrato differentialis arcus AM, id eſt dt^2; habetur ergo dt; quia vero ds eſt $=bdx:\surd(2bx-xx)$; ſi ſubſtituatur valor ipſius dx & $\surd(2bx-xx)$, habebitur etiam ds; quoniam autem arcus AB $=s+t$, erit differentiale arcus AB, id eſt, B$b=ds+dt$; ſi ergo fiat HB [a]: HE [z] $=$ Bb [$ds+dt$]: $\frac{zds+zdt}{a}=$ EX; erit ergo EX cognita in differentialibus dz, cujus quadratum conjunctum cum quadrato eX [dz^2], dat quadratum Ee, cujus radix $=$ Ee $=$ differentiali Cycloideos DE; proinde illius integrale æquatur curvæ cycloidali DE; ubi ſi libuerit reſubſtitui poteſt valor ipſius z in litteris x, & ſic patebit an cum priori ſolutione congruat. Sit etiam ſi EX multiplicetur per $\frac{1}{2}$ HE [$\frac{1}{2}z$] provenit triangulum EHe æquale differentiali ſpatii cycloidalis EDH; ideoque integrale oſtendit dimenſionem ſpatii illius.

TAB. LXIV. *Fig.* 95.

Adhuc aliter per Calculum integralium præſtari poſſunt, quæ in præcedentibus quæſita ſunt. Poſitis quæ ſupra; ſit ER, er perpendicularis ad Cycloidem, ducantur tangentes ZA, RF, rf: patet quod PA, pA ſint æquales ipſis ER, er; item & anguli PAZ, pAZ æquales angulis ERF, erf; proinde pAP $=erf-$ ERF $=erf-$ ER$f-$ FR$f=erf-r$RX $-$ RH$r=$ [ob $erf=$ RX$r+r$RX] RX$r-$ RHr; quia vero R$r=$ Pp, utrumque $=ds$; erit angulus RHr: POp [2 PAp] $=b:a$, proinde $\frac{2b}{a}\times$ PA$p=$ RHr; ergo

PAp

$PAp = rXR - \frac{2b}{a} \times PAp$, & $\frac{a+2b}{a} \times PAp = rXR$; ideoque $a : a + 2b = pAP : rXR$; quoniam autem $Pp = Rr$, & $pT = [$ob pA & $PA = ER$ & $er]$ RS, erit quoque $PT = rS$; proinde $PAp : rXR = RX : PA$; ergo $PA : RX = a + 2b : a$, & *componendo* $PA + RX$ $[EX] : RX = 2a + 2b : a$; eſt autem $EX : RX = Ee : rS [PT]$, proinde $Ee : PT = 2a + 2b : a$; id eſt, in ratione conſtanti; ideoque omnes Ee, id eſt curva cycloidalis DE, ad omnes PT, id eſt ad rectam DP, ut $2a + 2b$ ad a, ſicut antea. Spatium cycloidale $ERAD$ etiam facillime invenitur, nam quia $Ee = \frac{2a+2b}{a} \times rS$, erit $Ee + rS = \frac{3a+2b}{a} \times rS$; hujus dimidium multiplicatum per ER, vel PA, producit $\frac{3a+2b}{2a} \times rS \times PA$ = trapezio Er; quia vero triangulum $PAp = PT \times \frac{1}{2} PA$, vel $rS \times \frac{1}{2} PA$; erit trapezium Er: triang. $PAp = \frac{3a+2b}{a} : 1 = 3a + 2b : a$, iterum in ratione conſtanti; proinde omnia trapezia, id eſt, ſpat. $ARED$ ad omnia triangula PAp, id eſt, ad ſegm. $DpPA$, ut $3a + 2b$ ad a, ſicut antea.

Hæc itaque eſt generalis rectificatio curvæ & dimenſio ſpatii cycloidalis, quæ ad omnes caſus applicari poteſt, etiam ad vulgarem Cycloidem *Hugenianam*: hoc enim in caſu diameter circuli immoti ſupponenda eſt infinita, & tunc arcus AC degenerabit in lineam rectam, ut & arcus EP. Si itaque rationem velimus invenire inter curvam DE & rectam DP, faciendum eſt, ut $a : 2a + 2b = DP : DE$ quæſitam, quia autem a eſt infinita, erit $2a + 2b = 2a$; proinde ut a ad $2a$, id eſt, ut 1 ad 2, ita DP ad DE curvam. Sic etiam $a : 3a + 2b =$ ſegm. $DpPA$: ſpat. $DERA$, eſt autem $3a + 2b = 3a$; proinde $a : 3a$ $[= 1 : 3] =$ ſegm. $DpPA$: ſpat. $DERA$; quæ veritates in Cycloide vulgari aliunde conſtant.

Digitized by Google

LECTIO VIGESIMA QUARTA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

POſtquam per varios modos rectificationem curvarum & dimenſionem ſpatiorum cycloidalium quæſivimus; reſtat ut generalem earum proprietatem demonſtremus; quod ſcilicet quælibet curva cycloidalis per ſuam evolutionem in vertice inchoatam deſcribat aliam cycloidalem ſibi ſimilem. Sit ergo ABC Cyclois cujus vertex A, circulus genitor EBF, ejuſque immotus DFC; ſitque per evolutionem Cycloidis in vertice A inceptam deſcripta curva AGL: dico hanc curvam eſſe etiam Cycloidem ipſi ABC ſimilem. Ducatur tangens BEG, quæ quia eſt evolvens, erit perpendicularis ad curvam AGL, & æqualis curvæ AB; & per centra circulorum agatur recta KEH, conjungaturque BF. Fiat, ut KF ad KE [id eſt, ut *a* ad *a* + 2*b*], ita FE ad EH; & diametro HE deſcribatur circulus HME. Conſtat ex præcedentibus, quod BE ſit ad BA vel BG, ut *a* ad 2*a* + 2*b*; proinde dividendo BE ad EG, ut *a* ad *a* + 2*b*, id eſt, per conſtructionem, ut FE ad EH; ergo conjuncta HG erit triangulum HGE ſimile triangulo EBF; adeoque angulus HGE eſt rectus, & idcirco circulus HME tranſit per punctum G. Nunc quia angulus BEF = angulo HEG, erit arcus BNE ſimilis arcui EMG; ideoque arc. GME : arc. BNE = GE : BE = HE : EF = EK : FK = arc. EA : arc. FD. Quoniam autem ENBF = CFD, & arcus BF = arcui CF, erit arcus reliquus ENB = reliquo FD; ideoque ſequitur quod etiam arcus EMG ſit = arcui EA; proinde curva AGL eſt Cyclois cujus circulus genitor eſt HGE, & immotus eſt AE. Quod autem hæc Cyclois AGL ſit ſimilis priori ABC patet ex conſtructione; eſt enim KF : KE = FE : EH, & *permutando* KF : FE = KE : EH, id eſt, ut radius circuli immoti prioris Cycloidis ad diametrum circuli genitoris; ergo &c. *Q. E. D.*

TAB. LXIV. *Fig.* 96.

Caroli I.

Coroll. I. Curva GL eſt ad rectam GH, ut curva AB ad rectam BE; quia utrobique ſunt in ratione a ad $2a + 2b$.

Coroll. II. Tota vero AL eſt ad totam ABC, ut diameter HE ad diametrum EF.

Coroll. III. Patet quoque, quod ſi ABC ſit Cyclois vulgaris, id eſt, illa cujus circulus genitor ſuper recta linea rotatur, vel cujus circuli immoti diameter eſt infinita; patet, inquam, quod Cyclois AGL non ſolum etiam ſit vulgaris, ſed plane eadem cum priore; quia enim KF: KE = FE: EH, id eſt, $a : a + 2b$ = FE : EH; verum cum KF eſt infinita, erit $a + 2b = a$; proinde FE = EH; ergo quia circuli genitores ſunt iidem, & ambo moventur ſuper recta linea; ſequitur quoque Cycloides eſſe eaſdem. *Q. E. D.*

Et hæc Cyclois eſt, quam Dn. HUGENIUS ſolam credidit, quæ proprietatem iſtam habeat, ut nempe per evolutionem ſuam aliam & eandem Cycloidem progeneret. Causticam quidem ſuam Dn. TSCHIRNHAUS profert, quæ non eandem ſed ſimilem evolutione ſua deſcribit; nos vero idem quod Dn. TSCHIRNHAUS de ſua Cauſtica, quamque unam ex cycloidalium genere eſſe demonſtravit, generaliter omnibus Cycloidibus competere oſtendimus; quoniam vero nulla inter omnes Cycloides, præter vulgarem, per ſuam evolutionem deſcribit, non quidem ſimilem ſed eandem, Dn. HUGENIUS merito hactenus dubitare potuit, an alia inſuper detur curva, præter ſuam Cycloidem, quæ ſua evolutione eandem curvam procreare poſſit: dubitare autem ceſſabit, poſtquam aliam quam damus viderit curvam, quæ non minus hac proprietate gaudet quam prædicta Cyclois. Et quidem curva iſta eſt Logarithmica Spiralis: Sit enim curva BEFG Logarithmica Spiralis, cujus centrum A; ducatur tangens BC, & ad conjungentem AB agatur normalis AC: Sit AB = y, BL = dy; ex natura Logarithmicæ Spiralis patet, quod angulus LBM ſit conſtans; ſit ergo BL ad BM, id eſt, BA ad BC, ut a ad b; erit ergo BC = $by : a$; quia autem etiam BL ad BM ut a ad b, erit BM = $bdy : a$, ejuſque integrale, id eſt, curva BEFG = $by : a$;

TAB. LXIV. *Fig.* 97.

Mmm 2 ideo-

ideoque curva B E F G = rectæ tangenti B C.

Si itaque recta B C inſtar fili involvatur circa curvam B E F G, curva C H I K, quam terminus C deſcribit, erit curva quæ ex evolutione Logarithmicæ Spiralis B E F G generatur. Dico hanc curvam C H I K eſſe eandem Spiralem: Producatur enim B A quantum opus eſt, cui ocurrat C D perpendicularis ad B C; quoniam vero B C etiam perpendicularis eſt ad curvam C H, erit C D tangens curvæ C H; ſed, ob ſimilitudinem triangulorum B A C & C A D, angulus C B A eſt æqualis angulo D C A; ideoque angulus D C A etiam eſt conſtans: proinde curva C H I K eſt Logarithmica Spiralis; & quidem eadem cum B E F G, ob æqualitatem angulorum C B A & D C A. *Q. E. D.*

Coroll. I. Si Spiralis Logarithmica quævis B E F G extendatur in rectam B C, devenient B A, M A &c. ordinatim applicatæ in triangulo rectangulo B A C; nam ob angulum A B M conſtantem, erunt B A, M A &c. parallelæ, & quia ſunt in ratione conſtante cum curvæ portionibus conterminis, conſtat propoſitum. Ideoque, quemadmodum Spiralis *Archimedea* eſt Parabola convoluta; ita Logarithmica Spiralis eſt Triangulum rectangulum convolutum.

Coroll. II. Triangulum B A C eſt duplum ſpatii B E F G, quia differentiale trianguli eſt duplum differentialis ſpatii.

LECTIO VIGESIMA QUINTA.

Spatii cujuſdam Cycloidalis Quadratura abſoluta.

BRevis iſta, quam fecimus, digreſſio ſatis oſtendit, quod non ſit ſola Cyclois, cui competit toties repetita proprietas; adeo ut allata Spiralis Logarithmica non ſine probabilitate conjecturam movere poſſit, quod multæ aliæ, quin imo infinitæ dentur curvæ, quæ evolutione ſua eaſdem aut ſaltem ſibi ſimiles forment; & forſan difficile non eſſet, ope Calculi noſtri integralium, modum excogitare, quo tales curvæ reperiuntur: quia autem nunc non vacat hoc præſtare, aliis relinquendum eſt; interim redeamus ad Cycloides. Sit

Sit Cyclois quæcunque D E C cujus circulus immotus A R C, & genitor D P A vel L E R, D vertex Cycloidis. Poſitis & ductis quæ in Lectione penultima *; oſtendimus curvam D E eſſe ad rectam D P, vel L E, ut $2a + 2b$ ad a; ſpatium vero cycloidale D E R A ad ſegmentum E R L ut $3a + 2b$ ad a; ex quibus liquet quod curvæ indefinita habeatur rectificatio, ſed ſpatii indefinita quadratura dependeat a quadratura circuli. Oſtendemus autem [id quod Dn. HUGENIUS in vulgari duntaxat demonſtravit] quamlibet Cycloidem habere portionem ſpatii, quæ quadraturam admittit. Quærenda prius eſt dimenſio ſpatii cycloidalis complementi D E L; quod ſic peragitur. Sit D O $= x$, erit D P $= \sqrt{2bx}$, & hujus differentiale $bdx : \sqrt{2bx}$ eſt æquale [ut patet ex lectione penultima *] ipſi rS; quia vero P A eſt ad rX ut $a + 2b$ ad a, erit rX vel S X $= \frac{a}{a + 2b}$ $\sqrt{(4bb - 2bx)}$; nam P A eſt $= \sqrt{(4bb - 2bx)}$; ideoque, ob ſimilitudinem triangulorum S X r & M E l, eſt S X ad E M vel E l, ut r S ad M l, id eſt $\frac{a}{a + 2b}$ $\sqrt{(4bb - 2bx)} : \sqrt{2bx}$ $= \frac{bdx}{\sqrt{2bx}} : \frac{(ab + 2bb)dx}{a\sqrt{(4bb - 2bx)}} =$ Ml. Multiplicetur Ml per $\frac{1}{2}$ El, id eſt, per $\frac{1}{2}$ D P, provenit $(ab + 2bb)dx \sqrt{2bx} : 2a\sqrt{(4bb - 2bx)}$ $=$ triangulo E L l: hujus itaque integrale æquale eſt ſpatio cycloidali D L E; quoniam autem differentiale ſegmenti D Z P $=$ $bdx \sqrt{2bx} : 2\sqrt{(4bb - 2bx)}$, erit ſpatium D E L $= \frac{a + 2b}{a} \times$ ſegm. D Z P. Per cognitionem nunc hujus ſpatii, quod dependet a quadratura ſegmenti D Z P, determinari poteſt in linea D H punctum T, ita ut, ducto arcu concentrico T P E, ſpatium cycloidale D P E D contentum inter rectam D P, arcum P E, & curvam E D, ſit unicum quadrabile. Quo autem punctum illud T determinari poſſit, ita peragendum eſt: Sit D T $= t$, arcus D Z P $= s =$ A R; quia H A : H T $=$ A R : T Q, erit T Q $= (a + 2b - t)s : a$, & ob eandem rationem, quia H A : H D $=$ A R : D L, invenitur D L $= (a + 2b)s : a$. Multiplicetur dimidium ſummæ arcuum T Q & D L per D T pro-

TAB. LXIV. *Fig.* 98.

* pag. 457.

provenit $(2at + 4bt - tt) s : 2a =$ ſpatio circulari DTQLD $=$ ſpatio DPELD; proinde ſpatium DPELD eſt $= (2at + 4bt - tt) s : 2a$; quia nunc ſpatium cycloidale DLE inventum eſt $= \frac{a+2b}{a} \times$ ſegm. DP; verum ſegm. DP $=$ eſt ſectori DGP minus triangulo DGP, id eſt, $= \frac{1}{2} bs -$ triangulo DGP; erit ergo ſpatium DLE $= (ab + 2bb) s : 2a - \frac{a+2b}{a} \times$ triang. DGP; proinde ſpatium DPELD $-$ ſpatio DELD, id eſt, reſiduum DPED $= (2at + 4bt - tt - ab - 2bb) s : 2a + \frac{a+2b}{a} \times$ triang. DGP; quia itaque s denotat arcum circuli, ſpatium DPED dependebit a quadratura circuli, quamdiu quantitas $2at + 4bt - tt - ab - 2bb$ eſt aliquid; & ſic quadratura indefinita ſpatii DPED eſt impoſſibilis. Quia autem uno in caſu accidit, ut quantitas $2at + 4bt - tt - ab - 2bb$ evaneſcat, erit tunc ſpatium DPED quadrabile; quippe $= \frac{a+2b}{a} \times$ triang. DGP. Si ergo caſum hunc invenire, & punctum T determinare velimus, ponendum eſt $2at + 4bt - tt - ab - 2bb = 0$, proinde $tt = 2at + 4bt - ab - 2bb$, quæ æquatio, ſi ſecundum regulas reſolvatur, dat $t = a + 2b - \surd(aa + 3ab + 2bb)$; ideoque ſumatur t, id eſt, DT $=$ DH $[a + 2b] -$ media proportionali, inter DH & GH $[\surd(aa + 3ab + 2bb)]$. Ex hoc patet, quod punctum quæſitum T ſemper cadat ſupra centrum G verſus verticem D. Generalis itaque propoſitio formari ſic poteſt: In quacunque Cycloide DEC, ſi fiat HT media proportionalis inter HG & HD erit, deſcripto arcu TPE & ductis PD, PG, ſpatium cycloidale DPED unicum quadrabile, æquale nempe $\frac{a+2b}{a} \times$ triang. DGP; vel quod eodem recidit, ſpatium DPED erit ad triang. DGP, ut DH ad AH.

Ex his, dicto citius determinari poteſt punctum T in Cycloide vulgari; quia enim tunc AH eſt infinita, cadet punctum T in medium ipſius GD; & quia DH æqualis AH, erit ſpatium DPED

[PE erit recta linea] $=$ triangulo DGP; id quod Dn. HUGENIUS etiam ita invenit.

Siquidem autem infinitæ ſunt Cycloïdes, quæ poſſunt eſſe geometricæ, ſic eadem opera infinitas invenimus curvas geometricas, quæ unicum habent ſpatium a peripheria concentrica & linea recta terminatum, quod ſit quadrabile. Verum interim eſt, quod & aliud ſpatium cycloidale aliter ſumptum particulariter quadrari poſſit; ut nempe unum ex illis quæ continentur inter arcum DP, arcum PE & curvam DE; a ſpatio enim DPED, quod eſt æquale $(2at + 4bt - tt - ab - 2bb)s : 2a + \frac{a+2b}{a} \times$ triang. DGP, auferatur ſegmentum DP, quod æquatur $abs : 2a -$ triang. DGP, remanebit $(2at + 4bt - tt - 2ab - 2bb)s : 2a + \frac{2a+2b}{a} \times$ triang. DGP, æquale dicto ſpatio DEPZD. Si itaque hoc ſpatium quadrandum eſt, ponatur $2at + 4bt - tt - 2ab - 2bb = 0$; proinde $tt = 2at + 4bt - 2ab - 2bb$; invenitur ſecundum regulas $t = a + 2b - \sqrt{(aa + 2ab + 2bb)}$, quod oſtendit DP, vel AP, debere eſſe ſubtenſam quadrantis, quia $aa + 2ab + 2bb$ æquale eſt ſummæ quadratorum ipſarum GH & GD, vel GP. Sic itaque in quavis Cycloide, ſi biſecta ſemiperipheria circuli genitoris in P, ducatur arcus concentricus PE; erit ſpatium DZPED unicum quadrabile, ſcilicet æquale $\frac{2a+2b}{a} \times$ triang. DGP; vel quia angulus DGP eſt rectus, erit ſpatium DZPED $= \frac{a+b}{a} \times DG^2$, id eſt, ſpatium DZPED eſt ad quadratum radii, ut HG ad HA. Hinc quia in Cycloide vulgari HG eſt æqualis HA, devenit ſpatium DZPED æquale quadrato radii circuli genitoris.

LECTIO

LECTIO VIGESIMA SEXTA.

De Curvis Cauſticis, earumque proprietatibus.

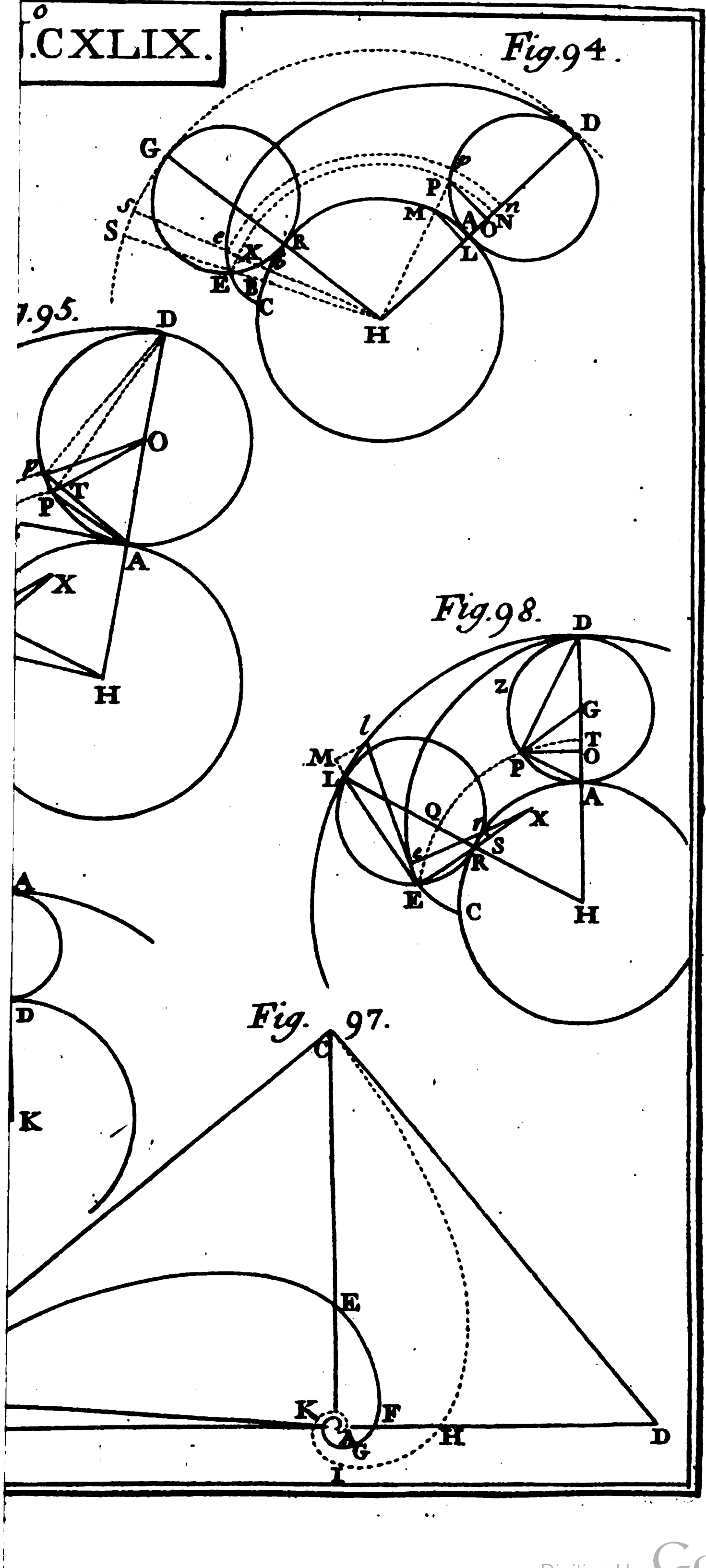
SI radii ſolares in concavam cujuſdam curvæ partem incidunt, formabunt per reflexionem ſuam aliam curvam, quæ a Dno. Tschirnhaus nomen *Cauſtica* ſortita eſt, cujuſque primus fuit inventor. Veteres enim, ad hæc uſque tempora, unicum duntaxat punctum conſideraverunt in axe curvæ, in quo nempe omnes radii, vel ſaltem plures, reflexi colliguntur; quod punctum ipſis *Focus* audivit; quoniam in illo maxima radiorum repercuſſorum comburendi vis exercetur.

Paucos ante annos, præfatus Dn. Tschirnhaus quam optime animadvertit, quod illæ curvæ, quæ radios reflexos non perfectiſſime in dicto foco colligunt, infinita habeant puncta quæ omnia foci appellari poſſunt, & in quibus plures radii concurrunt; illa itaque puncta per continuationem formant curvam cauſticam, vel uſtoriam, cujus naturam, rectificationem & egregias quas habet proprietates in *Actis* † publico communicavit, abſque tamen calculo, & ſuppreſſa methodo per quam eo pervenit.

Exponemus ergo hic modum, quo omnia, quæ circa has curvas digne conſiderari poſſunt, facillime deteguntur; ubi ſimul patebit quod Auctor non parum erraverit, exiſtimans Cauſticam in circulo illam eſſe curvam cujus conſtructionem in iiſdem *Actis* tradit; cum iſtæ duæ curvæ natura toto cœlo differant, nihilque commune habeant; excepto ſpatio, quod in utraque ad eundem ſemicirculum eandem rationem habet: & hoc eſt quod Auctorem fefellit, ut infra fuſius explicabitur. Nunc modus, quo curvam Cauſticam generari concipimus, exponendus eſt: Sit curva quælibet ABC, [*Fig. XCIX*] in quam incidunt Solis radii paralleli DB, *db*, &c. quorum reflexi ſunt BE, *b*E, &c. punctum concurſus E duorum radiorum reflexorum infinite parva quanti-

TAB. LXV. *Fig.* 99. & 100.

† Anno 1682. Nov. pag. 364.


o
.CXLIX.
Fig. 94.
G
D
S
s
P
M
A
O
N
n
e
X
R
L
E
C
H
.95.
D
O
p
T
P
A
X
H
Fig. 98.
D
Z
G
l
T
O
M
L
P
A
Q
X
S
R
E
C
H
A
D
K
Fig. 97.
C
E
K
F
A
G
H
D
I

quantitate diſtantium eſt in curva Cauſtica. Sic itaque illico patet per ea, quæ ſupra dicta ſunt, quod radius reflexus ſit tangens curvæ Cauſticæ; ſiquidem duæ tangentes nihil diſtantes in ipſo puncto contactus ſe interſecant. Ideoque ad naturam curvæ Cauſticæ determinandam, Problema tale formari poſſet: Invenire naturam curvæ, quam omnes radii in data quadam curva reflexi tangunt. Hoc autem Problema eodem modo ſolvitur, quo ſupra factum eſt in curva quæ tangitur a regula ſuper lateribus anguli recti mota*. Ut ea igitur, in caſu præſenti, applicentur ad curvam determinandam & conſtruendam, invenienda eſt longitudo radii reflexi BE, qui intercipitur inter punctum incidentiæ B & punctum concurſus E. Sit, in hunc finem, AF abſciſſa in curva data $= x$, & FB applicata in eadem $= y$, proinde Ff $= dx =$ BH & bH $= dy$; item BG $= z$; deſcribetur triangulum FBG ſeorſim [*Fig. C*], & biſecetur angulus FBG per lineam BM, erit BM perpendicularis ad curvam Bb; proinde $dx : dy =$ BF : FM; invenitur itaque pro FM $= ydy : dx$; quia autem BF : BG $=$ FM : MG, erit componendo BF : BF + BG TAB. LXV. *Fig.* 100.

$= $ FM : FG, id eſt, $y : y + z = \frac{ydy}{dx} : \frac{ydy + zdy}{dx} =$ FG; ſed $BF^2 + FG^2 = BG^2$; habetur ergo hæc æquatio $(yydy^2 + 2zydy^2 + zzdy^2) : dx^2 + yy = zz$, & reducta æquatione provenit $zz = (2zydy^2 + yydy^2 + yydx^2) : (dx^2 - dy^2)$, quæ æquatio ſi reſolvatur habetur $z = (ydy^2 + ydx^2) : (dx^2 - dy^2) =$ BG. Quoniam FG $= (ydy + zdy) : dx$, ſubſtituendus eſt valor inventus ipſius z, & habebitur FG $= 2ydxdy : (dx^2 - dy^2)$; addatur AF [*Fig. XCIX*] erit AG $= 2ydxdy : (dx^2 - dy^2) + x$; ejus igitur differentiale [poſito dx conſtanti, id eſt, $ddx = 0$] erit $(dx^3 + 2ydx^3ddy - dxdy^4 + 2ydxdy^2ddy) : (dx^2 - dy^2)^2 =$ Gg, quia autem BF : FG [ſeu $bf : fg$] $= b$H : HL, id eſt, $y : \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2} = dy : \frac{2dxdy^2}{dx^2 - dy^2} =$ HL; erit BH + HL, id eſt, BL $= (dxdy^2 + dx^3) : (dx^2 - dy^2)$. Sed ob ſimilitudinem triangulorum BEL & GEg, eſt BE : GE $=$ BL : Gg, & *dividendo* BG : BE $=$ BL $-$ Gg : BL; fiat ergo BL $-$

* Lect. XX. pag. 447.

Gg $[\frac{-2ydx^3ddy - 2ydxdy^2ddy}{(dx^2 - dy^2)^2}]$: BL $[\frac{dxdy^2 + dx^3}{dx^2 - dy^2}]$, id eſt, $\frac{-2yddy}{dx^2 - dy^2}$: 1 = BG $[\frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 - dy^2}]$: BE, quæ itaque erit = $(dx^2 + dy^2) : -2ddy$. Hinc in quavis curva data AB facillime longitudo radii reflexi BE invenitur, ſubſtituendo ſolummodo valorem ipſius *dy* & *ddy*, prout natura curvæ exigit; & ſic *dx*, *dy* & *ddy* ſeſe deſtruentibus, prodibit longitudo BE in quantitatibus pure definitis. Cognita ergo BE, curva Cauſtica conſtrui poteſt, & proinde determinata eſt. *Q. E. F.*

Poſtquam generaliter curvas Cauſticas determinaverimus, antequam ad ſpeciales deſcendamus, univerſalis illarum rectificatio præmittenda eſt.

TAB. LXV. *Fig.* 101. Sit itaque curva quæcunque ABG in qua per reflexionem radiorum EB, *eb* &c. formata ſit Cauſtica AHI. Dico quamlibet portionem ejus AH æqualem eſſe radio incidenti EB, plus radio reflexo BH. *Demonſtratio*: Ex præcedentibus conſtat quod HB tangat Cauſticam: evolvatur ergo curva AH, quæ deſcribat curvam A*f*F; liquet quod HB congruat cum evolvente HF, tunc cum evolutio ad punctum H pervenerit. Centro itaque H, deſcribatur arculus *b*C, qui erit parallelus arculo F*f*; proinde CF = *bf*; ergo BC eſt differentialis ipſius BF; quoniam autem, per hypoth. ang. EB*b* = ang. HBG = CB*b*, anguli vero BD*b* & BC*b* ſunt recti, erunt triangula BD*b* & BC*b*, ob communem hypothenuſam B*b*, æqualia; proinde BD = BC, verum BD eſt differentiale ipſius BE, & BC differ. ipſius BF, ergo BE = BF; ideoque, quoniam curva AH = HF, & HF = HB + BF, erit curva AH æqualis radio reflexo HB plus incidente EB. *Q.E.D.*

Notetur, quod ſi utraque BE & BF non incipiant a nihilo, ſummæ linearum HB & BE conſtans quædam, ut cognita, ſit addenda vel ab eadem demenda.

LECTIO

Digitized by Google

LECTIO VIGESIMA SEPTIMA.

Cauſtica circularis radiorum parallelorum.

UT ea quæ univerſaliter ſolvimus exemplis illuſtrentur; ſit BGC Circulus, cujus diameter $DB = 2a$, $BH = x$, $HG = y = \sqrt{(ax - xx)}$. Determinanda eſt curva Cauſtica BFE, ſeu quod tantundem, invenienda eſt longitudo radii reflexi GF? Hoc per formulam generalem ita peragitur: Quoniam $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, erit $dy = (adx - xdx) : \sqrt{(2ax - xx)}$, & $ddy = -aadx^2 : (2ax - xx)\sqrt{(2ax - xx)}$; ideoque $(dx^2 + dy^2) : -2ddy$, ſeu GF, invenitur $= \frac{1}{2}\sqrt{(2ax - xx)} = \frac{1}{2}GH$. Ad conſtruendam ergo Cauſticam in circulo, ſumendus eſt radius reflexus GF æqualis dimidio incidenti GH; erit punctum F in curva quæſita. Hinc, ſi punctum H cadit in A, cadet punctum F in medium E radii circularis AC; & hoc punctum eſt, quod Veteres *Focum* Circuli appellarunt. TAB. LXV. *Fig.* 102.

Conſtat quoque quod curva FB ſit ad radium reflexum FG, ut 3 ad 1; ad incidentem vero HG, ut 3 ad 2: ideoque tota EFB ad radium circuli ut 3 ad 2.

Nob. Dn. TSCHIRNHAUS ſynthetice oſtendit * quod GF ſit $= \frac{1}{2}$ GH, in hunc modum.

Sint duo radii ſolares MG, *mg* perpendiculares ad diametrum DB, qui quantitate infinite parva diſtant, & producantur reflexi GF, *g*F, donec occurrant peripheriæ in N & *n*; erit itaque arcus GBM æqualis arcui GEN, & arcus *g*B*m* = *g*D*n*; ergo *g*B*m* — GBM, id eſt, 2*g*G = *g*D*n* — GEN, id eſt, N*n* — G*g*; ergo N*n* = 3G*g*. Quoniam autem angulus N*n*F = ang. FG*g* [inſiſtunt enim eidem ſegmento N*g*], erunt triangula NF*n* & GF*g* ſimilia, ideoque NF : F*g*, vel FG = N*n* : *g*G = 3 : 1; & *componendo* NG vel MG : FG = 4 : 1, proinde HG : FG = 2 : 1, ut antea invenimus. TAB. LXV. *Fig.* 103.

* *Acta Erud. Lipſ.* 1690. April. pag. 169.

TAB. LXV. *Fig.* 104. Si velimus naturam curvæ Cauſticæ BFE exprimere per æquationem ſecundum applicatas vel abſciſſas; ducatur ex centro A radius AG, & producta GF donec occurrat rectæ AC in L, demittantur perpendiculares LP, FO; & appellentur AO $= r$, & OF $= s$. Quoniam angulus LAG $=$ AGH $=$ AGL; erit LA $=$ LG; proinde AP $=$ PG: ob ſimilitudinem triangulorum LAP, LGP, & AGH, eſt GH : AG $=$ GP : GL, id eſt, $\sqrt{(2ax - xx)} : a = \frac{1}{2}a : \frac{\frac{1}{2}aa}{\sqrt{(2ax - xx)}} =$ LG $=$ LA; item LG : RG $=$ LF : OF, id eſt $\frac{\frac{1}{2}aa}{\sqrt{(2ax - xx)}} : a - x = \frac{\frac{1}{2}aa - ax + \frac{1}{2}xx}{\sqrt{(2ax - xx)}} : \frac{(a-x)^3}{aa} =$ OF $= s$. Rurſus RG : RL $=$ OF : OL, id eſt $a - x : \frac{2ax - xx - \frac{1}{2}aa}{\sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{(a-x)^3}{aa} : \frac{(2ax - xx - \frac{1}{2}aa) \times (a-x)^2}{aa\sqrt{(2ax - xx)}} =$ OL; auferatur ex LA, & habebitur $-(2ax - xx - \frac{1}{2}aa) \times (a-x)^2 : aa\sqrt{(2ax - xx)} + \frac{1}{2}aa : \sqrt{(2ax - xx)} =$ AO $= r$.

Ut eo citius & facilius ad æquationem deveniatur, in qua r & s ſolæ reperiantur, valor ipſius r inventus ita redigi poteſt $2ax - xx - \frac{1}{2}aa = -(a-x)^2 + \frac{1}{2}aa$ & $\sqrt{(2ax - xx)} = \sqrt{(-aa + 2ax - xx + aa)} = \sqrt{(-(a-x)^2 + aa)}$, & ſic provenit $r = ((a-x)^4 - \frac{1}{2}aa(a-x)^2) : aa\sqrt{(-(a-x)^2 + aa)} + \frac{1}{2}aa : \sqrt{(-(a-x)^2 + aa)}$. Quoniam autem $(a-x)^3 : aa = s$, erit $a - x = \sqrt[3]{aas}$ & $(a-x)^2 = a\sqrt[3]{ass}$; ergo ſubſtituto ubique valore ipſius $a - x$, habetur $r = (aas\sqrt[3]{aas} - \frac{1}{2}a^3\sqrt[3]{aas}) : aa\sqrt{(-a\sqrt[3]{ass} + aa)} + \frac{1}{2}aa : \sqrt{(-a\sqrt[3]{ass} + aa)} = (s\sqrt[3]{aas}\frac{1}{2} - a\sqrt[3]{ass} + \frac{1}{2}aa) : \sqrt{(-a\sqrt[3]{ass} + aa)}$. Data itaque s, altera r ope circini & normæ conſtrui non poteſt generaliter, ob irrationalitatem radicis cubicæ.

TAB. LXV. *Fig.* 105. Ex quo concludendum, quod curva Cauſtica non ſit eadem cum illa EFB quæ formatur a punctis F, quæ biſecant parallelas MN interceptas inter peripheriam CMB & peripheriam ANB diametro AB deſcriptam, ut Dn. TSCHIRNHAUS perperam prætendit. Sit enim, ut prius, AO $= r$, OF $= s$,

erit

Digitized by Google

erit RN $= \surd(as - ss)$, & MR $= \surd(aa - ss)$; ergo MN $= \surd(aa - ss) - \surd(as - ss)$, & FN $= \frac{1}{2}\surd(aa - ss) - \frac{1}{2}\surd(as - ss)$; ideoque FN + NR, id eſt, FR $= \frac{1}{2}\surd(aa - ss) + \surd(as - ss) =$ AO $= r$. Sic itaque data s, altera r ſemper circino & norma conſtrui poterit; & proinde hæ duæ curvæ non ſolum non ſunt eædem, ſed nequidem ſunt ejuſdem generis. Facile autem eſt conjecturare cur Dn. TSCHIRNHAUS errorem hunc commiſerit; utraque enim curva tranſit per punctum B, & per punctum medium E, & ſpatium CEFB utrobique eſt quarta pars quadrantis; quia ſemicirculus ANB eſt dimidium quadrantis CAB, & CANB eſt duplum ſpatii CEFB; idem de Cauſtica inferius demonſtrabitur.

Ex alio quoque indicio patet, quod duæ iſtæ curvæ non ſint eædem; abſque ut natura curvarum per calculum quæratur. Si enim attendatur ad generationem curvarum, facile quivis perſpiciet, quod illarum continuatio non eodem modo procedat. Curva enim Cauſtica [*Fig. CIV*] poſtquam ad punctum E pervenerit, continuatur verſus ſiniſtram per S ad punctum D, & portionem ſimilem priori deſcribit; tum ob radiorum in altero quadrante ſimilem poſitionem, tum quia Cauſtica, ut ipſe Dn. TSCHIRNHAUS agnoſcit, & quod mox demonſtrabimus, eſt ſpecies Cycloidis. Altera vero curva, quæ a biſectione interceptarum MN formatur, poſtquam punctum E attigerit, revertitur verſus eandem partem ad B: ſicuti enim MN eſt intercepta inter utramque peripheriam non magis quam MX; ſic etiam punctum T biſecans lineam MX non minus eſt in curva quam punctum F biſecans lineam MN.*

LECTIO VIGESIMA OCTAVA.

Cauſtica circularis radiorum parallelorum eſt Cycloidalis. Cauſtica Parabolica.

SAtis hucuſque, ni fallor, oſtenſum eſt, curvam Cauſticam in circulo, & eam ex biſectione interceptarum progenitam, minime eſſe eandem: Interim notabilis hic occurrit Cauſticæ proprie-

*Vid. N°. VI. pag. 52. Tom. I.

proprietas, quam Dn. TSCHIRNHAUS in *Actis Lipſ.* † demonſtravit; quod nempe per ſuam evolutionem aliam Cauſticam ſimilem progignat. Nos proprietatem hanc mutamus in aliam, & demonſtrabimus quod Cauſtica ſit curva cycloidalis; ſicque eadem opera oſtenſum erit, quod evolutio Cauſticæ deſcribat Cauſticam; quoniam omnes Cycloides evolutione ſua ſibi ſimiles procreare ſupra oſtendimus.

TAB. LXV. *Fig.* 106. Sit itaque circulus BCD, cujus diameter BD, radius ſolaris NG incidens, GF reflexus, BFE curva Cauſtica; centro A & radio AE, deſcribatur circulus MPE, & ducta AG conſtruatur circulus GQP, radium GF ſecans in Q: Dico Cauſticam BFE eſſe Cycloidem, cujus circulus immotus eſt MPE; ejuſque genitor GQP, vertex B, & principium E.

Demonſtratio. Angulus incidentiæ NGB eſt æqualis angulo reflexionis QGC; ergo ſegmentum NBG eſt ſimile ſegmento circulari QG; proinde ſubtenſa NG: ſubtenſ. QG = diameter DB: diametr. GP = 4 : 1. Sumptis antecedentium dimidiis, erit HG: QG = 2 : 1 = HG: FG. Ergo QG = FG; ideoque circulus GQP tranſit per punctum contactus F: quia vero, ob ſimilitudinem ſegmentorum, arcus NBG = 4 arcubus GF, & idem arcus NBG [2 arcus BG] = 4 arc. MP; erit arcus GF = arcui MP; quoniam autem ſemiperipheria MES = 2 ſemiperipheriis GFP; erit quadrans MPE = GFP; ergo arcus reſiduus PF = arcui reſiduo PE; proinde Cauſtica EFB eſt Cyclois. *Q. E. D.*

Ex his, & ex iis quæ de Cycloidibus in genere dicta ſunt, ſponte fluit, quod curva BF ſit tripla rectæ GF; & ceteræ proprietates, quas Dn. TSCHIRNHAUS recenſet, facillime colliguntur, quod nempe ſpatium cauſticum BFG ſit duplum ſegmenti circularis GF; proinde totum ſpatium BEC æquale circulo integro GP.

Item, ſi evolutio Cauſticæ BFE incipiat in B, altera Cauſtica, quæ inde deſcribetur, habebit poſitionem prioris inverſam. Principium enim eſt in puncto B, & vertex in linea AC producta,

† Anno 1690, April. pag. 169.

Digitized by Google

LIX.

Fig. 101.

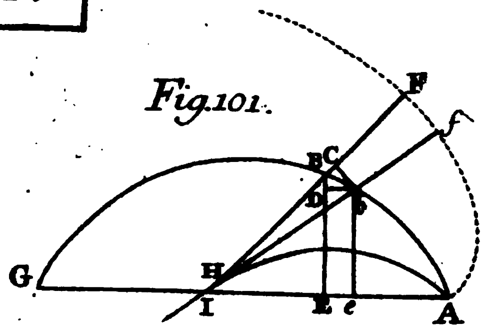


Fig. 100.

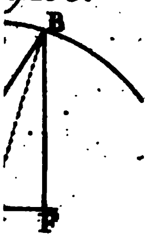


Fig. 103.

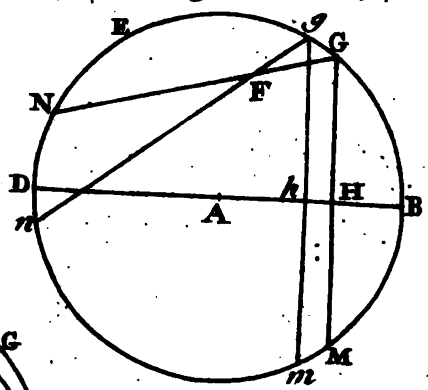


Fig. 104.

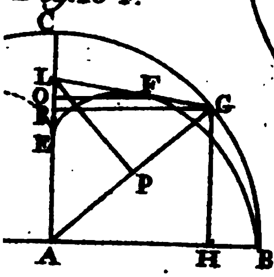
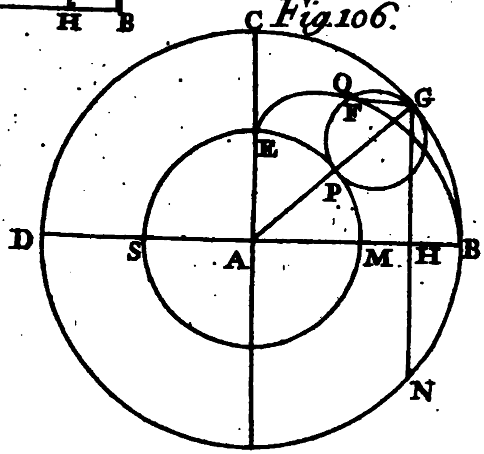


Fig. 106.



producta, diſtans a centro A duobus radiis AC; ideoque circulus in quo illa Cauſtica generatur quadruplus eſt circuli in quo Cauſtica BFE deſcribitur.

Spatium contentum inter FG productam uſque ad cauſticam exteriorem, inter ejuſdem exterioris partem a puncto B deſumptam & inter interiorem BF, eſt noncuplum ſpatii BFG.

Si angulus GAB ſit ſemirectus erit punctum F omnium in Cauſtica ſupremum, quia tunc tangens GF horizonti BA eſt parallela.

Patet quoque, quod in hac Cauſtica, quæ tamen eſt curva geometrica, duo poſſint ſumi ſpatia quæ quadraturam admittunt.

Dimittamus nunc Cauſticam circuli, & conſideremus qualis ſit in Parabola. Aliunde autem notum eſt, quod radii axi paralleli poſt reflexionem exacte in uno puncto concurrant, quod Focus appellatur; adeo ut tota ejus curvæ Cauſtica in punctum degeneret. Loco itaque quod radii axi paralleli ſint, concipiamus illos ad eundem perpendiculares.

Sit ergo Parabola ABG, cujus vertex A, axis AI, parameter $= a$, AE $= x$, BE $= y = \sqrt{ax}$; ſintque eædem EB, eb, radii incidentes, quorum reflexi BH, bH: determinanda eſt curva Cauſtica AH, id eſt, quærenda eſt longitudo BH? TAB. LXVI. Fig. 107.

Quia $y = \sqrt{ax}$, erit $dy = adx : 2\sqrt{ax}$, $dy^2 = adx^2 : 4x$, & $ddy = - adx^2 : 4x\sqrt{ax}$, ideoque $(dx^2 + dy^2) : -2ddy = (a + 4x)\sqrt{ax} : 2a =$ BH, quod facillime conſtruitur, dicendo: Ut duplum parametri ad ſummam parametri & quadrupli abſciſſæ AE, ita applicata BE ad quæſitam BH; proinde curva AH æquatur $(3a + 4x)\sqrt{ax} : 2a$. Ad quadrandum ſpatium cauſticum multiplicetur HB per dimidiam BC, vel BD [ſunt enim æquales] & habetur $(a + 4x)\,dx\sqrt{ax} : 4a =$ triangulo HBb, ejuſque integrale $\frac{1}{6}x\sqrt{ax} + \frac{2xx}{5a}\sqrt{ax} =$ ſpatio AHB. Hinc etiam poteſt quadrari ſpatium AHL. Si enim a ſpatio parabolico ABHL, cujus quadratura innoteſcit, auferatur ſpatium inventum AHB, remanebit ſpatium AHL.

Si

Si AE $= \frac{1}{2} a$, erit punctum H omnium ſupremum, quia tunc tangens BH eſt axi parallela, & erit BH $= \frac{1}{2} a$; proinde AL $= \frac{3}{4} a$. Si vero AE $= \frac{3}{4} a$, id eſt, ſi radius BE tranſit per punctum in Cauſtica ſupremum, cadent puncta H & L in punctum I, in quo Cauſtica & axis ſe interſecant, & erit recta BI $= a \sqrt{3}$; curva vero AHI $= \frac{3}{2} a \sqrt{3}$, & recta AI $= \frac{9}{4} a$; ſpatium AHIB $= \frac{7}{40} aa \sqrt{3}$ & ſpatium AHI $= \frac{5}{8} aa \sqrt{3}$. Reliquæ, ſi quas habet, proprietates facile quoque deducentur.

LECTIO VIGESIMA NONA.

Cauſtica Cycloidalis. Cauſtica radiorum è dato puncto promanantium.

Regula quam dedimus ad determinandas curvas Cauſticas non ſolum ſuccedit in geometricis, ſed etiam ſe ad mechanicas extendit. In hujus rei gratiam afferemus exemplum Cy-

TAB. LXVI. *Fig.* 108. cloidis vulgaris. Sit ergo Cyclois ABC, cujus vertex A, axis AF, circulus genitor AMF, radius incidens EB, reflexus BH; determinanda eſt curva ejus Cauſtica AHN, ſeu invenienda longitudo rectæ BH? Sit radius circuli AG $= a$, AE $= x$, proinde EM $= \sqrt{(2ax - xx)}$, arcus AM $= s$, EB $= y$ $= \sqrt{(2ax - xx)} + s$, erit $dy = (a - x)dx : \sqrt{(2ax - xx)} + ds = [\text{ob } ds = adx : \sqrt{(2ax - xx)}]\,(2a - x)dx : \sqrt{(2ax - xx)} = dx\sqrt{(2a - x)} : \sqrt{x}$; ideoque $dy^2 = (2a - x)dx^2 : x$; & $ddy = -adx^2 : x\sqrt{(2ax - xx)}$, habetur exinde $(dx^2 + dy^2) : -2ddy =$ BH $= \sqrt{(2ax - xx)}$ $=$ EM; ex quo patet quod radius reflexus ſit æqualis applicatæ correſpondenti in circulo genitore; ideoque duplus radii reflexi in eodem circulo. Spatium ABH æquatur dimidio ſegmento AEM & duplo ſpatio cauſtico in circulo. Si punctum E cadit in centrum circuli G, erit BH parallela horizontali AF, & proinde punctum H, erit omnium ſupremum. Curva hæc Cauſtica AHN, poſtquam ſummum punctum pertranſiit, iterum deſcendit ad certum punctum L,

&

Digitized by Google

& dein reaſcendit ad punctum C: Ad determinandum itaque punctum L, ſumatur $AE = \frac{3}{2} a = \frac{3}{2} AG$, cadet punctum H in quæſitum L.

Coroll: Spatium cycloidale ABCFA eſt ſextuplum ſpatii cauſtici ABCLHA; illud quippe triplum eſt ſemicirculi AMF, hoc autem ejuſdem eſt ſubduplum.

Hæc quæ hactenus dicta ſunt de Cauſticis, quæ formantur a radiis parallelorum reflexis ſufficiant. Paucis attingemus illas, quas deſcribunt reflexi radiorum a puncto quodam fixo proficiſcentium; hæ enim prioribus multum abſimiles non ſunt, & mutatis mutandis æque facile calculo ſubjiciuntur. Sit enim quæcunque curva data ABC [*Fig. CIX*] & punctum poſitione datum D, a quo radii proveniunt incidentes in curvam, quales ſunt DB, D*b*, eorumque reflexi BE, *b*E; determinanda eſt Cauſtica quam radii reflexi formant, vel potius quam tangunt? Ad hoc itaque, invenienda eſt, ut in prioribus, longitudo BE, intercepta nempe inter punctum concurſus E & inter punctum incidentiæ B. Ad DB & D*b* ducantur perpendiculares DG & D*g*, ductaque ipſis parallela BHL, ſit DB vel $Db = y$, $bH = dy$, $BH = dx$; item $BG = z$; deſcribatur triangulum DBG, [*Fig.CX*] ſeorſim, & biſecetur angulus DBG per lineam BM, quæ erit perpendicularis ad curvam B*b*; proinde $dx : dy = DB : DM$; invenitur itaque $DM = ydy : dx$; cum reliquis ſi procedatur eodem modo, quo ſupra factum eſt, pro Cauſticis a radiis parallelorum reflexis formatis, invenitur $z = (ydy^2 + ydx^2) : (dx^2 - dy^2)$, $DG = 2ydxdy : (dx^2 - dy^2)$, & ejus differentiale, poſito dx conſtante, id eſt, $ddx = 0$, $(2ydx^3 ddy - 2dxdy^4 + 2ydxdy^2 ddy + 2dx^3 dy^2) : (dx^2 - dy^2)^2 =$ [*Fig.CIX*] $Dg - DG$, id eſt, gN. Ob ſimilitudinem triangulorum DBH & DGN, eſt $DB : DG = BH : GN$; ergo $GN = 2dx^2 dy : (dx^2 - dy^2)$, & ob ſimilitudinem triangulorum DBG, GNM, eſt $DB : DG = GN : MN$, id eſt, $y : \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2} = \frac{2dx^2 dy}{dx^2 - dy^2} : \frac{4dx^3 dy^2}{(dx^2 - dy^2)^2} = MN$, ideoque $gN - MN$, ſeu $gM = (2ydx^3 ddy$

TAB. LXVI. *Fig.* 109. & 110.

$+ 2ydxdy^2ddy - 2dxdy^4 - 2dx^3dy^2) : (dx^2 - dy^2)^2$. Quia autem BD : DG [ſeu bD : Dg] = bH : HL, id eſt, $y : \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2} = dy : \frac{2dxdy^2}{dx^2 - dy^2}$ = HL, erit BH + HL, id eſt, BL = $(dx^3 + dxdy^2) : (dx^2 - dy^2)$; ſed ob ſimilitudinem triangulorum BEL & MEg eſt BE : ME vel GE = BL : Mg, & *dividendo* BG : BE = BL — Mg : BL; fiat ergo BL — Mg $\left[\frac{dx^5 + dxdy^4 - 2ydx^3ddy - 2ydxdy^2ddy + 2dx^3dy^2}{(dx^2 - dy^2)^2}\right]$: BL $\left[\frac{dx^3 + dxdy^2}{dx^2 - dy^2}\right]$, id eſt $\frac{dx^2 + dy^2 - 2yddy}{dx^2 - dy^2} : 1$ = BG, vel z $\left[\frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 - dy^2}\right]$: BE, itaque erit $= \frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 + dy^2 - 2yddy}$. Sic igitur, in qualibet curva data AB, longitudo radii reflexi BE determinari poteſt, per ſubſtitutionem valoris ipſius dy & ddy vel ipſius dx, prout unum vel alterum facilius fieri poteſt ex natura curvæ datæ AB; ita tamen ut valor ipſius dx, vel ipſa dx, ſemper conſtans ponatur, quia in calculo pro conſtante aſſumpta eſt.

TAB. LXVI. *Fig.* III. Hæc curva Cauſticâ non minus generalem rectificationem admittet quam præcedens: Sit enim curva data ABC, & punctum radians D, curva vero Cauſtica LHI, quæ, ſi punctum D non ſit in linea tangente curvam in A, non incipiet in hoc puncto A ſed in alio L, diſtante ab A longitudine radii reflexi AL: Evolvatur ergo Cauſtica LHI, & deſcribat hac evolutione curvam LFf; oſtendetur eodem modo, quo jam oſtenſum eſt, quod bX differentiale ipſius BH ſit = bO differentiali ipſius DB, ideoque Db + bH — DA — AL = portioni curvæ LH. Notandum eſt quod DA + AL auferri debeat a Db + bH; nam evaneſcente bf, id eſt, ſi curva HL ſit = nihilo, ſumma tamen ipſarum Db & bH non erit nihil, ſed erunt ipſæ lineæ DA, AL; ideoque integralia, quæ rectificationem curvæ LH oſtendunt, diminuenda ſunt ſumma linearum DA + AL, & quod remanet erit verus valor curvæ Cauſticæ.

LECTIO

LECTIO TRIGESIMA.

De Cauſtica circulari radiorum a dato in peripheria puncto promanantium.

Afferemus hic exemplum, ubi curva Cauſtica, a radiis a puncto derivantium reflexis formata, proprietatibus egregiis & utili ſpeculatione non cedit alteri illi *Tſchirnauſiana*.

Omnia enim, quæ Dn. Tschirnhaus ſuæ attribuit, huic quoque conveniunt; radius reflexus in hac, ut in illa, conſtantem habet rationem ad incidentem; non minus etiam quam ſpatium cauſticum inter radium reflexum, lineam circularem & Cauſticam interceptum, ad ſegmentum circulare a radio incidenti abſciſſum; & quod mirum eſt, hæc Cauſtica per evolutionem aliam ſibi ſimilem progenerat: eſt enim quoque una ex Cycloidibus, & quidem ſimplicior quam altera Tschirnhausii.

Ante omnia ergo determinatio invenienda eſt, & exinde omnes reliquas proprietates demonſtrabimus: Sit circulus BGD, in cujus peripheria datur punctum B, a quo radii emanantes BG, Bg, &c. incidunt in eandem peripheriam, quorum reflexi GL, gL, &c. formant, per interſectionem L, curvam Cauſticam BLE: determinanda eſt hæc curva, id eſt, quæritur longitudo radii reflexi GL? Per punctum B agatur diameter BD, & in hanc demittantur perpendiculares GH, gh: Sit ſemidiameter $BC = a$, $BH = r$, $HG = t = \sqrt{(2ar - rr)}$ erit hH vel $gI = dr$, $gG = adr : \sqrt{(2ar - rr)}$, $BG = y = \sqrt{2ar}$; proinde ejus differentiale $gO = adr : \sqrt{2ar} = dy$, $gG^2 - gO^2 = OG^2$, invenitur ergo $OG = adr : \sqrt{(4aa - 2ar)} = dx$; $ddy = (2arddr - adr^2) : 2r\sqrt{2ar}$; quoniam autem dx ponitur conſtans, erit $ddx = (4aaddr - 2arddr + adr^2) : (4a - 2r)\sqrt{(4aa - 2ar)} = 0$. Invenitur ergo $ddr = dr^2 : (2r - 4a)$; ſubſtituto ergo valore ipſius ddr invenitur $ddy = aadr^2 : (rr - 2ar)\sqrt{2ar}$. Si igitur ponantur quantitates inventæ TAB. LXVI. *Fig.* 112.

ipſarum y, dy, ddy & dx, proveniet GL $[(ydy^2+ydx^2):(dx^2+dy^2-2yddy)]=\frac{1}{3}\sqrt{2ar}=\frac{1}{3}$GB.

Ad conſtruendam itaque curvam BLE, ſumendus eſt radius reflexus GL = trienti incidentis BG; erit punctum L in curva quæſita: quod etiam ſynthetice demonſtrari poteſt ad modum TSCHIRNAUSII.

Producantur radii reflexi GL, *g*L donec peripheriæ occurrant in punctis M, *m*; erit arcus *g*B = arcui *gm*, & arcus GB = arcui GM; auferatur utrobique minor a majori, remanebit arcus *g*G = M*m* — *g*G, proinde 2*g*G = M*m*: ſed, ob ſimilitudinem triangulorum ML*m* & *g*LG, eſt ML : L*g* vel LG = M*m* : *g*G = 2 : 1; ergo *componendo* MG vel BG : LG = 3 : 1, ut prius invenimus. Hinc BE eſt tripla ipſius DE.

TAB. LXVI. Fig. 113. Oſtendemus jam hanc Cauſticam eſſe Cycloidem: Sit enim circulus BGD, cujus diameter BD, radius incidens BG, reflexus GF, curva Cauſtica BFE; centro A & radio AE, deſcribatur circulus MPE, & ducta AG conſtruatur circulus GQP, radium reflexum GF ſecans in Q. Dico Cauſticam BFE eſſe Cycloidem, cujus circulus immotus eſt MPE, & genitor GQP, qui erunt æquales, vertex B & principium E.

Demonſtratio: Angulus incidentiæ BGR eſt = angulo reflexionis QGD, vel QGS: ergo ſegmentum GRB eſt ſimile ſegmento GSQ; proinde erit ſubtenſa BG : ſubtens. QG = diameter DB : diamet. GP = 3 : 1 = ſubtens. BG : GF; ergo QG = FG; ideoque circulus GQP tranſit per punctum contactus F. Quia vero ob ſimilitudinem ſegmentorum arcus BRG = 3 arcubus GSF, & idem arcus BRG = 3 arcubus MP, erit arcus GSF = arcui MP; ergo arcus reſiduus FP = arcui reſiduo PE; proinde Cauſtica BFE eſt Cyclois. *Q. E. D.*

Hinc etiam hæc Cauſtica proprietatem alterius habet, quod nempe per ſuam evolutionem aliam Cauſticam deſcribat ſibi ſimilem.

Liquet ex iis quæ dicta ſunt de Cycloidibus, quod curva BF ſit quadrupla rectæ GF; quod ſpatium cauſticum BFG ſit

tri-

Digitized by Google

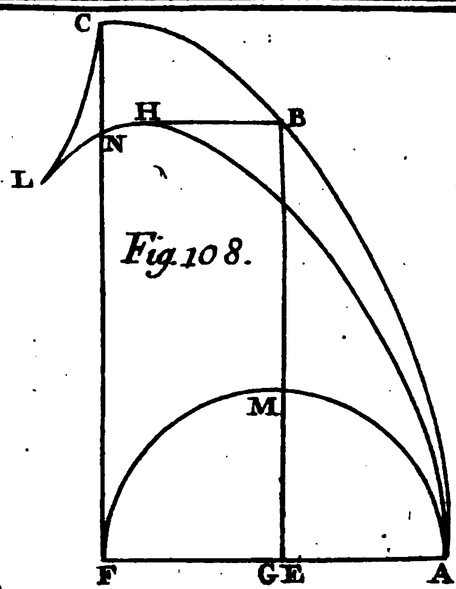


Fig. 108.

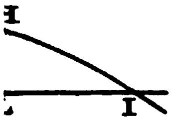


Fig. 110.

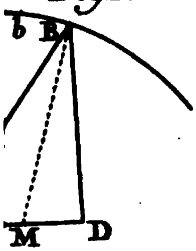


Fig. 111.

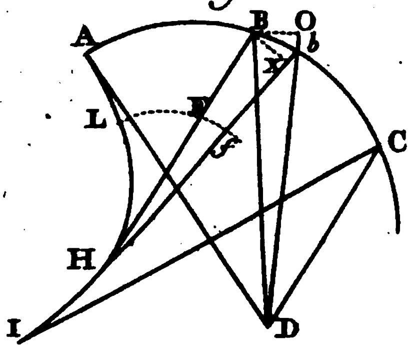
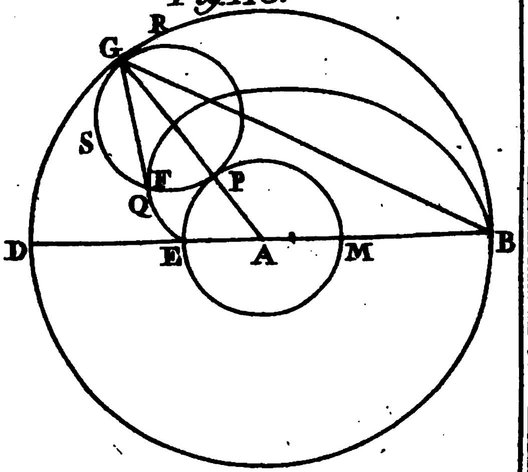


Fig. 113.



Digitized by Google

triplum ſegmenti circularis GSF; proinde totum ſpatium BFED æquale triplo ſemicirculi GFP. Item, ſi evolutio Cauſticæ BFE incipiat in B, altera Cauſtica quæ exinde generabitur habebit poſitionem priori inverſam. Principium enim eſt in puncto B, & vertex in linea AD producta, diſtans a centro A, novem radiis AE; ideoque circulus in quo illa Cauſtica generatur eſt noncuplus circuli, in quo Cauſtica BFE deſcribitur. Spatium contentum inter FG productam uſque ad Cauſticam exteriorem, inter ejuſdem exterioris partem a puncto B deſumptam & inter interiorem BF, eſt ſexdecuplum ſpatii BFG.

LECTIO TRIGESIMA PRIMA.

De Cauſticis parabolica & cycloidali.

SIt Parabola AGg, cujus vertex A, axis AH, in quo punctum eſt datum B, quod radios BG, Bg emittit, qui reflexi conſtituunt curvam Cauſticam; determinandum eſt ejus punctum L, vel invenienda longitudo GL? Sit parameter $= a$, AB $= b$, $AH = r$, $HG = t = \sqrt{ar}$, $BG = y = \sqrt{(rr - 2rb + bb + ar)}$ ergo $Gi = dr$, $gi = adr : 2\sqrt{ar}$; addantur eorum quadrata $(a + 4r)\,dr^2 : 4r = Gg^2$, eſt autem $dy\,[gO] = (2r - 2b + a)\,dr : 2\sqrt{(rr - 2rb + bb + ar)}$, ejuſque quadratum $dy^2 = (4rr + 4bb + aa - 8br + 4ar - 4ab)\,dr^2 : (4rr - 8rb + 4bb + 4ar)$; ideoque $Gg^2 - gO^2$ ſeu $GO^2 = (abb + arr - 2arb)\,dr^2 : (4r^3 - 8rrb + 4rbb + 4arr) = dx^2 =$ conſtanti. Hujus itaque quantitatis ſumendum eſſet differentiale, & æquandum nihilo, ut innoteſceret ddr. Quia autem univerſaliter ſolvere nimis prolixum foret; ſumemus caſum ſpecialem: ſit igitur $b = 0$, id eſt, ponatur punctum B in vertice, cæteris poſitis ut prius, erit $BG = y = \sqrt{(rr + ar)}$, $Gi = dr$, $gi = adr : 2\sqrt{ar}$, $Gg^2 = (a + 4r)\,dr^2 : 4r$, & $dy^2\,[gO^2] = (4rr + 4ar + aa)\,dr^2 : (4rr + 4ar)$; ideoque $Gg^2 - gO^2$ ſeu $GO^2 = adr^2 : (4r + 4a) = dx^2 =$ conſtanti, ergo ejus TAB. LXVII. Fig. 114.

differentiale $(8ardrddr + 8aadrddr - 4adr^3) : (4r+4a)^2 = 0$. Invenitur itaque $ddr = dr^2 : (2r + 2a)$; quoniam autem $dy = (2r + a)dr : \surd(4rr + 4ar)$, erit $ddy = (-aadr^2 + (2rddr + addr) \times (2rr + 2ar)) : (2rr + 2ar)\surd(4rr + 4ar)$; ſubſtituto valore ipſius ddr, provenit $ddy = (-aa + 2rr + ar)dr^2 : (2rr + 2ar)\surd(4rr + 4ar)$; quoniam itaque $dx^2 + dy^2 = Gg^2 (a + 4r)dr^2 : 4r$, erit $(ydx^2 + ydy^2) : (dx^2 + dy^2 - 2yddy) = (a + 4r)\surd(rr + ar) : 3a = GL$.

Si itaque fiat $3a : BG = a + 4r$ ad quartam; erit hæc æqualis GL: addatur ad GL recta BG, proveniet $(4a + 4r)\surd(rr + ar) : 3a$ = curvæ Cauſticæ AL. Spatium cauſticum AGL etiam quadrari poteſt.

Coronidis loco adjungemus determinationem Cauſticæ in Cycloide quæ generatur a radiis axi parallelorum reflexis, quæ in præcedentibus omiſſa eſt.

TAB. LXVII. Fig. 115. Sit Cyclois ABC cujus vertex C, axis CE, circulus genitor CFE, radius incidens GB, reflexus BH; quæritur longitudo BH? Sit $CE = 2a$, $CL = r$, arcus $CF = s$, $LB = t = s + \surd(2ar - rr)$, peripheria CFE = AE $= p$, erit $AG = p - s - \surd(2ar - rr) = x$, & $GB = 2a - r = y$; ideoque $dx = -dr\surd(2a - r) : \surd r$; quia autem dx ſupponitur conſtans, erit $ddx = adr^2 : r\surd(2ar - rr) - ddr \surd(2a - r) : \surd r = 0$, ideoque $ddr = adr^2 : (2ar - rr)$; quia $y = 2a - r$, erit $dy = -dr$, proinde $ddy = -ddr = -adr^2 : (2ar - rr)$; invenitur itaque, pro $(dx^2 + dy^2) : 2ddy$, $2a - r = y$ = BG = BH quæſitæ. Hinc curva AH = eſt duplæ BG, tota AHE = duplæ diametro CE: ſpatium ABH = ſubduplo ſegmento AGB. Si LB tranſit per centrum circuli, erit punctum H omnium ſupremum. Cauſtica AHE eſt etiam Cyclois, cujus circulus genitor eſt ſubquadruplus circuli EFC.

LECTIO

Digitized by Google

LECTIO TRIGESIMA SECUNDA

De Cauſtica cycloidali.

QUod curva Cauſtica in Cycloide a radiis axi parallelorum reflexis formata ſit etiam Cyclois, ſic demonſtratur: Sit ABC Cyclois, cujus vertex C, axis CE, circulus genitor EFC; radius incidens GB, reflexus BH, & Cauſtica quæ formatur AHE: Dico hanc eſſe Cycloidem, quæ habet circulum generatorem, cujus diameter eſt ſubdupla diametri EC. Ducta per punctum B baſi parallela BFP ſecante circulum EFC in punctis F & P, quæ cum centro R conjungantur per rectas RF, RP; ducatur quoque recta EF, & ipſi parallela BM; connexiſque punctis M, H, erigatur perpendicularis MN occurrens rectæ BH in N. Quia nunc, per conſtructionem, BM eſt parallela rectæ FE, erit BM perpendicularis ad Cycloidem ABC; proinde hæc BM biſecat angulum quem faciunt radius incidens & reflexus, id eſt, MBG = MBH: quia autem in præcedentibus demonſtratum eſt BG eſſe æqualem ipſi BH, & BM eſt communis, erunt triangula MBG & MBH ſimilia & æqualia; proinde MH = MG, & angulus MHB = MGB = recto. Nunc diametro MN deſcribatur circulus MHN, qui ob angulum rectum MHN tranſibit per punctum H; ex hoc puncto ducatur in centrum O recta HO; oſtendam jam quod circulus MHN ſit ſemper conſtans, id eſt, quod MN ſit ubique æqualis ER, & quod arcus MH ſit æqualis rectæ EM. Nam, ob ſimilitudinem & æqualitatem triangulorum MGB & FLE, eſt MG, ſeu HM, æqualis LF, & ang. BMG = EFL; ergo HMG = duplo EFL; proinde reliquus ad duos rectos HME = duplo reliqui ad unum rectum, ipſius nempe LEF; angulus autem HME = angulo HNM, ergo HNM etiam = eſt duplo LEF, ideoque HOM = duplo LRF, vel HOM = PRF,

TAB. LXVII. *Fig.* 116.

$=$ PRF, proinde triangula PRF & HOM ſunt ſimilia, & idcirco RF : HO $=$ PF, id eſt, 2LF : HM $=$ 2 : 1; ideoque diameter CE eſt dupla diametri HM: circulus igitur MHN eſt conſtans. Hoc unum eſt; alterum ſic demonſtratur: Quia angulus HOM $=$ PRF, erit ſegmentum HM ſimile ſegmento PCF: ideoque recta PF ad rectam HM [2 ad 1] ut arcus PCF ad arcum HM; ergo dimidius arcus, id eſt, CF æquatur arcui HM; verum arcus CF eſt $=$ rectæ FB $=$ rectæ EM, proinde arcus HM eſt $=$ rectæ EM. Curva itaque AHE eſt Cyclois, cujus circulus genitor eſt MHN, diametrum habens MN ſubduplam diametri EC, circuli genitoris EFC in Cycloide ABC. *Q. E. D.*

TAB. LXVII. *Fig.* 117. Poſtquam in Cycloide determinavimus utramque Cauſticam, tam illam quæ formatur a radiis ad axem perpendicularium reflexis, quam quæ formatur a radiis axi parallelorum reflexis; reſtat ut eam quoque determinemus quæ formatur a radiis a puncto quodam derivantium reflexis; Sit itaque Cyclois ABC, cujus vertex A, circulus genitor ADE, axis AE. Sit item punctum A, a quo radii emanant, quales ſunt AB, &c: quæritur longitudo radii reflexi BH? Sit AE $= 2a$, AF $= r$, AD $=$ DB $= s$, erit DF $= \surd(2ar - rr)$, & AB $[y] = \surd(2ar + ss + 2s\surd(2ar - rr))$, AD $= \surd 2ar = \frac{1}{2}$ curvæ AB: erit

$$dy = \frac{adr + sds + (4ards + 2asdr - 2rrds - 2rsdr) : \surd(2ar - rr)}{\surd(2ar + ss + 2s\surd(2ar - rr))}$$

in quo ſi ſubſtituatur valor ipſius ds $[adr : \surd(2ar - rr)]$, provenit $dy = \frac{3adr + (3a - 2r)sdr : \surd(2ar - rr)}{\surd(2ar + ss + 2s\surd(2ar - rr))}$. Nunc quærendum eſſet dx, ejuſque differentiale æquandum nihilo, ut haberetur ddr, qui valor ſubſtituendus eſſet in quantitate ddy; quod ob nimis prolixum & laborioſum calculum factu fere impoſſibile eſt. Sumamus ergo caſum faciliorem.

Sit punctum radians in centro circuli genitoris G, radius incidens GB, reflexus BH. Sit nunc DF $= r$, AG $= a$, GB $= y$, AD $= s =$ BD, erit GF $= \surd(aa - rr)$, BG $= y$ $= \surd(ss + 2rs + aa)$; curva AB $= 2$ AD $= 2\surd(2aa -$

$2a\surd(aa$

Digitized by Google

$2a\sqrt{(aa-rr)}$), erit primo $dy=(sds+rds+sdr):\sqrt{(ss+2rs+aa)}$, ubi ſi ſubſtituatur valor ipſius ds [$adr:\sqrt{(aa-rr)}$], provenit $dy=\frac{(as+ar)dr:\sqrt{(aa-rr)}+sdr}{\sqrt{(ss-2rs+aa)}}$, quæ quantitas quia ſimplicior eſt quam præcedens, calculus etiam paulo erit facilior; etiamſi ſatis adhuc prolixus, & uno alterove momento perfici non poſſit.

Linquamus nunc Cauſticas Cycloidum, & id duntaxat animadvertamus, quod quemadmodum curva Cycloidalis & Spiralis Logarithmica, id commune habent, ut utraque per evolutionem ſuam eandem, vel ſaltem ſibi ſimilem deſcribant; ita etiam commune ipſis convenit, quod notatu dignum eſt, ut utraque habeat curvam Cauſticam eandem vel ſibi ſimilem; hac tamen cum differentia, ut curva Cauſtica in Cycloide, quæ etiam Cyclois eſt, ſit producta a radiis parallelorum reflexis; Cauſtica vero in Spirali Logarithmica quæ etiam Spiralis Logarithmica eſt, ſit producta a radiis a centro provenientium reflexis. Prius ſupra demonſtratum eſt; poſterius nunc demonſtrandum.

Sit Spiralis Logarithmica bBA, cujus centrum A, & ſimul punctum radians, a quo incidant radii AB, Ab; qui reflexi, per ſua interſectionum puncta C, forment curvam CEA; dico hanc curvam CEA eſſe etiam Spiralem Logarithmicam, & quidem eandem. Sit [ob angulum DbB ubique conſtantem] $bD:DB=a:b$; poſito itaque $AB=y$, erit $bD=dy$, & proinde $BD=bdy:a=dx$; quia ergo dx ponitur conſtans, erit $bdy:a$ etiam conſtans, & proinde $ddy=0$, ideoque $(ydx^2+ydy^2):(dx^2+dy^2-yddy)$ [$=BC$] $=(ydx^2+ydy^2):(dx^2+dy^2)=y=AB$; ideoque $AB=BC$. Ducatur nunc linea AC, erit angulus $BAC=$ angulo BCA, & quia angulus $ABF=CBb$; erit angulus $ABF=BAC=BCA=$ conſtanti; ideoque curva CEA eſt Spiralis Logarithmica, & quidem eadem cum curva bBA, ob æqualitatem angulorum ABF & ACB, & quia CB tangit curvam. TAB. LXVII. *Fig.* 118.

Digitized by Google

LECTIO TRIGESIMA TERTIA.

Varia Problemata Phyſico-Mechanica, eorumque Solutiones.

Inventio Curvæ deſcenſus æquabilis.

SAtis hucuſque, ut ſpero, generalem Calculi integralium ideam adumbravimus; ubi quidem rem breviter, in quantum neceſſitas permiſit, interim dilucide & perſpicue explicuimus. Multa, imo infinita, ad materiam hanc pertinentia reſtant, quæ conſulto omiſimus; non ac ſi calculum diffugerent, ſed potiſſimum quia noſtrum erat propoſitum ejus utilitatem & univerſalitatem, per illorum duntaxat ſolutionem patefaciendi, quæ in penitiori Geometria, quamvis non parum abſtruſa, crebro tamen occurrunt. Methodo itaque noſtra recte adhibita, cætera, ſi quæ ſuperſunt, quin facile ſolvi poſſint nullus dubito: imo aſſerere auſim, omnia Problemata ſolubilia, quæ hactenus vulgaris Geometriæ opem eluſerunt, & quæ tanquam impoſſibilia rejecta fuere, Calculi noſtri integralium analyſin ſubire. Cujus veritas magis patebit, cum oſtenderimus quod illius limites eouſque ſe extendant, ut nulla ſit pars Matheſeos concretæ, cujus difficiliora & præſtantiora, quæ facta fuerunt, inventa non ſub illis contineantur; quæ alias, omni *Carteſiana* Geometria fruſtra ad auxilium vocata, in æternum deliteſcerent. Hæc revera ita ſe habere manifeſtum erit ex ſolutionibus quorundam Problematum Phyſico-Mechanicorum a præſtantiſſimis Mathematicis propoſitorum, quorum ſolutiones, partim nullibi, partim vero ſuppreſſa analyſi reperiuntur.

Primum itaque notatu dignum eſt tale:

TAB. LXVIII. *Fig.* 119. Quæritur qualis ſit natura curvæ ADC ejus proprietatis, ut axe BF verticaliter erecto, pondus in curva libere deſcendens æqualibus temporibus æquales altitudines verticales abſolvat; ut ſi ex. gr. pondus vel globus a puncto A moveri

incipiens

CXLIX.

Fig. 115.

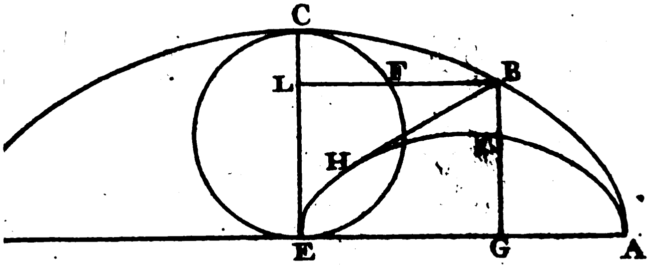


Fig. 116.

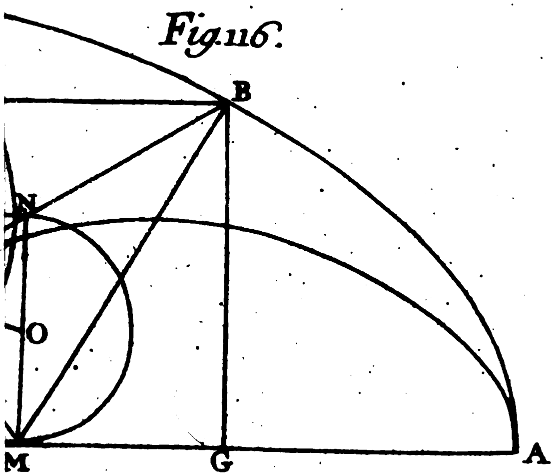
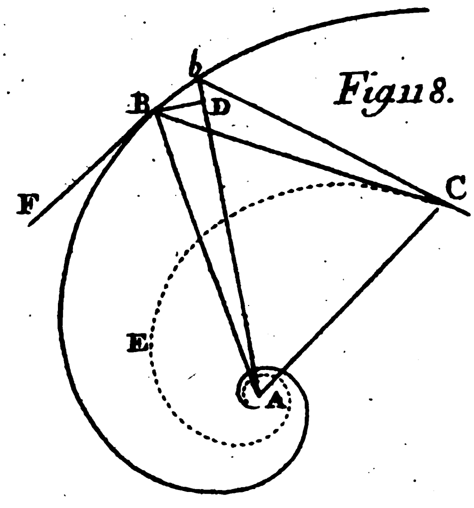


Fig. 118.



Digitized by Google

incipiens una ſecunda pervenerit ad D, altera ſecunda ad C, oportet ut altitudo verticalis AF puncti C ſit dupla altitudinis verticalis AE puncti D; vel ſi tempus per AD ſit ad tempus per AC ut p ad q, oportet ut ſit quoque AE ad AF ut p ad q. Ad hoc Problema ſolvendum, quod Dn. LEIBNITIUS his circiter terminis concipit; *Invenire curvam deſcenſus, in qua corpus deſcendens æqualibus temporibus æqualiter horizonti appropinquat*; ſequentia ſunt ſupponenda, quæ tum per ſe ſatis nota, tum in quolibet Libro de projectilium natura agente demonſtrantur.

1°. Si corpus uniformiter vel æquabiliter movetur, erunt ſpatia percurſa temporibus proportionalia; & ſi duo corpora inæqualibus celeritatibus, ſed uniformiter moventur, erunt ſpatia ab illis æqualibus temporibus percurſa in ratione celeritatum.

2°. Si corpus in linea verticali libere deſcendit, erunt ſpatia percurſa temporum quadratis proportionalia.

3°. Eodem poſito, erunt ſpatia percurſa celeritatum ultimo acquiſitarum quadratis proportionalia; ideoque tempora erunt ut celeritates.

4°. Corpus quomodocunque deſcendens, vel in recta, vel in curva, in quolibet puncto eam celeritatem acquiret, quam acquireret ſi ab eadem altitudine verticali deſcendiſſet directe.

Ex his præſuppoſitis ſi Problema per Calculum integralium reſolvere velimus; tentandum eſt, ut Problema quod mechanicis principiis innititur in pure geometricum convertatur: quod ita peragitur.

Sit curva quæ quæritur ADC, in qua ſi corpus ad certum punctum C pervenerit, percurrat, uno temporis momento, celeritate ſua acquiſita, lineolam indefinite exiguam Cc, altitudinem vero perpendicularem Hc; ſit nunc corpus in quocunque alio puncto D, & abſolvat æquali temporis momento lineolam Dd, & altitudinem verticalem Gd; quia itaque temporis momenta ſupponuntur æqualia, debent, ex hypotheſi, altitudines Gd & Hc etiam eſſe æquales; & per ſuppoſitionem TAB. LXVIII. *Fig.* 120.

 pri-

Digitized by Google

primam, Dd eſt ad Cc ut celeritas in D ad celeritatem in C. Sed Dd eſt ad Cc in ratione compoſita ex ratione Dd ad Gd & ex ratione ejuſdem Gd, vel æqualis Hc, ad Cc, id eſt, ex ratione tangentis DK ad applicatam ED, & ex ratione alterius applicatæ ad libitum aſſumptæ FC ad tangentem ad libitum aſſumptam CL. A puncto C ducatur ipſi DK parallela CM, erit DK ad DE ut CM ad CF; ergo ratio compoſita ex DK ad DE, id eſt ex CM ad CF, plus CF ad CL æqualis eſt rationi CM ad CL; ergo celeritas in D eſt ad celeritatem in C, ut CM ad CL. Verum, per tertiam & quartam ſuppoſitionem, quadratum celeritatis in D eſt ad quadratum celeritatis in C, ut ED ad FC; ergo etiam quadratum CM ad quadratum CL, ut ED ad FC. Problema itaque propoſitum in pure geometricum redactum eſt, quod in abſtracto ita proponi poteſt.

Invenire curvam ADC ejus proprietatis, ut ſi ex puncto quodam aſſumpto C ducatur tangens CL, & in quocunque alio puncto D tangenti DK parallela CM, quadratum CL ſit ad quadratum CM, ut CF ad DE.

Ad hoc ſolvendum, ſit AE $= x$, ED $= y$, CF $= a$, CL $= b$; erit GD $= dx$ & G$d = dy$, proinde D$d = \surd(dx^2 + dy$); eſt autem, ob ſimilitudinem triangulorum GdD & FCM, Gd : Dd = FC : CM, id eſt, $dy : \surd(dx^2 + dy^2) = a : \frac{a\surd(dx^2 + dy^2)}{dy}$ = CM, ergo CM$^2 = (aadx^2 + aady^2) : dy^2$; quoniam itaque, per proprietatem curvæ, CL^2 : CM^2 = CF : DE; hoc eſt $bb : \frac{aadx^2 + aady^2}{dy^2} = a : y$; habetur reducta æquatione $bbydy^2 - a^3 dy^2 = a^3 dx^2$, ideoque $dy \surd(bby - a^3) = dx \surd a^3$; ſumptis integralibus, pervenitur ad hanc æquationem $(\frac{2}{3} y - \frac{2}{3} a^3 : bb) \surd(bby - a^3) = x \surd a^3$, quæ exprimit naturam curvæ quæſitæ AD.

TAB. LXVIII. Fig. 121.

Si AE, id eſt $x = 0$, erit ED, id eſt $y = a^3 : bb$ = AO, quod indicium eſt, quod corpus, antequam ad curvam pertingat, a puncto A deſcendat prius per rectam AO $= a^3 : bb$. Si itaque æquationem

nem invenire velimus, quæ naturam curvæ exprimat per relationem applicatarum DP ad axem PO; ponendum eſt DP [DE — AO $= y - a^3 : bb$] $= z$, & ſic æquatio inventa convertetur in hanc $\frac{2}{3} z \sqrt{bbz} = x \sqrt{a^3}$, & reducta ad rationalitatem provenit $\frac{4}{9} bbz^3 = a^3 xx$, vel $\frac{9a^3}{4bb} xx = z^3$; quæ æquatio oſtendit curvam OD eſſe Parabolam cubicalem ſecundam, cujus parameter $= \frac{9}{4} a^3 : bb$.

LECTIO TRIGESIMA QUARTA.

Alia ſolutio Problematis de invenienda curva deſcenſus æquabilis. Inventio Curvæ Iſochronæ Paracentricæ.

PRoblema quod in Lect. præced. ſolvimus facilius ita ſolvi poteſt, ſtatuendo non niſi unicam litteram cognitam & conſtantem. Sit ADd curva quæſita, in qua corpus æqualibus temporibus æqualiter deſcendit ad horizontem; ideoque prima curvæ portiuncula Aa, quæ eodem temporis momento percurritur quo Dd, erit æqualis altitudini perpendiculari Gd; quoniam curvæ particula Aa eſt ipſa altitudo verticalis in puncto A: proinde celeritas in A eſt ad celeritatem in D, ut dG ad Dd, id eſt, in ratione finita; ex quo ſequitur ut corpus in A jam habeat celeritatem acquiſitam: oportet itaque ut lapſus incipiat a ſuperiori quodam puncto L; ita ut, cum venerit in A celeritatem illam acquirat. Hoc præſuppoſito; ſit AL $= a$, AE $= x$, ED $= y$, E$e = dx$, & G$d = dy$. Oſtenſum jam eſt quod celeritas in A ſit ad celeritatem in D, ut Gd ad Dd, ut dy ad $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; Eſt autem celeritas in A ad celeritatem in D, ut $\sqrt{AL}$ ad $\sqrt{(DE + AL)}$ vel, ſi vis, quadratum celeritatis in A ad quadratum celeritatis in D, ut AL ad DE + AL, ut a ad $y + a$; ideoque erit etiam $dx^2 + dy^2$ ad dy^2, ut $y + a$ ad a; proinde $ydy^2 + ady^2 = adx^2 + ady^2$, & $dy\sqrt{y} = dx\sqrt{a}$, & eorum integralia $\frac{2}{3} y\sqrt{y} = x\sqrt{a}$, TAB. LXVIII. *Fig.* 122.

 vel

Digitized by Google

vel $\frac{4}{9}y^3 = axx$, & tandem $y^3 = \frac{9}{4}axx$; quod oſtendit curvam AD*d* eſſe Parabolam cubicalem ſecundam, cujus parameter $= \frac{9}{4}a = \frac{9}{4}$ LA.

TAB. LXVIII. *Fig.* 123. Hinc, ſi invenire libeat curvam aliam, ex cujus evolutione iſta Parabola deſcribatur, ducenda eſt in puncto D perpendicularis DR, quæ ſit æqualis $\frac{2y+2a}{a}\sqrt{(yy+ay)}$, erit punctum R in curva quæſita AR; quæ hanc habebit proprietatem, ut ſi filo RD appendatur in illius termino corpus, cui ſi imprimatur in puncto A celeritas quam acquireret ſi a puncto L delaberetur, corpus hoc filum a curva AR evolvens, deſcribet curvam AD, & proinde æqualiter æqualibus temporibus deſcendet verſus horizontem.

Vidimus hucuſque quod curva, in qua corpus æqualiter accedit ad horizontem, ſit Parabola cubicalis ſecunda: videamus nunc qualis debeat eſſe curva, in qua corpus deſcendens æqualibus temporibus æqualiter accedat ad punctum poſitione datum.

Ad hoc ſolvendum, eædem hypotheſes ſupponendæ ſunt quas ſuppoſuimus in priori caſu: Et quidem duplici modo hoc ſolvere poſſemus; quorum prior non abſimilis eſt ei, qui primo in præcedenti adhibitus fuit, poſterior idem fere eſt cum poſteriori præcedentis. Quia autem ille paulo prolixus evadit, præterquam quod etiam plures litteræ adhibendæ ſunt; omiſſo illo, poſteriorem amplectemur. Sit punctum poſitione datum TAB. LXVIII. *Fig.* 124. F, per quod ducatur linea verticalis FAL, in qua ſumatur punctum A ad libitum pro initio curvæ quæſitæ AD*d*. Conſideretur corpus deſcendens perveniſſe ad punctum aliquod D, & percurriſſe, uno temporis momento, lineolam D*d*: ductis itaque FD, F*d*, centroque F deſcripto arculo *d*H, oſtendet reſidua DH, quantum corpus, uno temporis momento, accedit ad punctum F: quia autem in initio curvæ corpus directe verſus F deſcendit, erit portiuncula curvæ A*a*, uno temporis momento percurſa, æqualis, ex hypotheſi, ipſi DH; ex quo infertur, ut prius, quod corpus in A jam debeat habere cele-

Digitized by Google

celeritatem acquiſitam. Sit itaque illa altitudo AL, a qua delapſum corpus iſtam celeritatem acquirat. Ponatur nunc AL $= a$; AF $= b$; AE, vel DO $= x$; ED, vel AO $= y$; eE vel GD $= dx$; G$d = dy$; D$d = \surd(dx^2 + dy^2)$; erit FO $= b - y$, FD $= \surd(bb - 2by + yy + xx)$ ejuſque differentiale $(-bdy + ydy + xdx) : \surd(bb - 2by + yy + xx) =$ DH. Quia nunc Dd eſt ad Aa vel DH, ut celeritas in D ad celeritatem in A; erit quadratum Dd ad quadratum DH, ut quadratum celeritatis in D ad quadratum celeritatis in A, ut ED + AL ad AL, id eſt, $dx^2 + dy^2$:

$$\frac{(bb - 2by + yy) \times dy^2 (-2bx + 2xy) \times dxdy + xxdx^2}{bb - 2by + yy + xx} = y + a : a;$$

Si proportio ad æquationem redigatur, provenit hæc $(abb - 2aby + ayy) \times dx^2 + axxdy^2 = (bby - 2byy + y^3) \times dy^2 (-2bxy + 2xyy) \times dxdy (-2abx + 2axy) \times dxdy + xxydx^2$. Ut æquatio hæc ad pauciores terminos reducatur, ponatur $b - y$, id eſt, FO $= z$, provenit $azzdx^2 + axxdz^2 = bzzdz^2 - z^3dz^2 (-2bxz - 2xzz)\, dxdz + 2axzdxdz + bxxdx^2 - zxxdx^2$. Nunc, per formulas pro æquationibus quadratis, quærendus eſt valor ipſius dx vel dz, & ſi fieri poteſt ex utraque integrale ſumendum, æquatio inde proveniens oſtendet naturam curvæ quæſitæ. Ponamus caſum ſpecialem, punctum nempe F eſſe in A, id eſt, b eſſe $= 0$; habebitur hæc æquatio, ſervatis litteris prioris æquationis, $ayydx^2 + axxdy^2 = y^3dy^2 + 2xyydxdy + 2axydxdy + xxydx^2$; ergo $dx^2 = (2xyydxdy + 2axydxdy + y^3dy^2 - axxdy^2) : (ayy - xxy)$, proinde $dx = dy \times (xyy + axy \pm (yy + xx) \surd ay) : (ayy - xxy)$; ſumptis, ſi fieri poteſt, utrobique integralibus, habebitur natura curvæ.

Ut æquationem inveniamus paucioribus terminis conſiſtentem in quantitatibus differentialibus, aliæ quantitates pro indeterminatis aſſumendæ ſunt; ita ut ſi earum mutua relatio innoteſcat, curva quæſita non minus quam modo præcedenti determinata ſit. Appelletur itaque AD $= x$, & poſitis reliquis ut prius, nempe CD $= y$, AL $= a$, dG $= dy$, erit nunc dH $= dx =$, per hypotheſin, primæ particulæ Aa; AC $= \surd(xx - yy)$, TAB. LXVIII. *Fig.* 125.

$-yy$), ejuſque differentiale Cc, vel $DG = (xdx - ydy) : \sqrt{(xx - yy)}$, $GD^2 + Gd^2 = Dd^2$, invenitur itaque $Dd^2 = (xxdx^2 - 2xydxdy + xxdy^2) : (xx - yy)$; eſt autem quadratum Dd ad quadratum Aa, vel DH, ut quadratum celeritatis in D ad quadratum celeritatis in A, ut $DC + AL$ ad AL, hoc eſt, $\frac{xxdx^2 - 2xydxdy + xxdy^2}{xx - yy} : dx^2 = y + a : a$; proinde $yxxdx^2 - y^3dx^2 - ayydx^2 = axxdy^2 - 2axydxdy$. Addatur utrobique $ayydx^2$, & dividatur per a, & tunc habebitur hæc æquatio $dx\sqrt{(yxx - y^3)} : \sqrt{a} = xdy - ydx$; hæc itaque æquatio ſimplicior eſt quam ea in Lect. præcedenti. Si illam tranſmutare velimus in aliam, in qua relatio abſciſſæ AC ad applicatatam CD exprimatur; appelletur AC, z, & loco x ponendum eſt $\sqrt{(zz + yy)}$, loco dx vero $(zdz + ydy) : \sqrt{(zz + yy)}$; & ſic æquatio inventa mutabitur in hanc $(zdz + ydy)\sqrt{(yzz : a)} : \sqrt{(zz + yy)} = dy\sqrt{(zz + yy)} - (yzdz + yydy) : \sqrt{(zz + yy)}$, vel reducta æquatione $(zdz + ydy)\sqrt{y} = (zdy - ydz)\sqrt{a}$ vel [poſito $y = mm : a$] $2m^3 dm + aazdz = 2aazdm - aamdz$. Ex quibus quantitatibus, ſi per regulas in methodo tangentium inverſa traditas integralia ſumi poſſunt, prodibit natura curvæ.*

LECTIO TRIGESIMA QUINTA.

Inventio Curvæ Iſochronæ vel Tautochronæ.

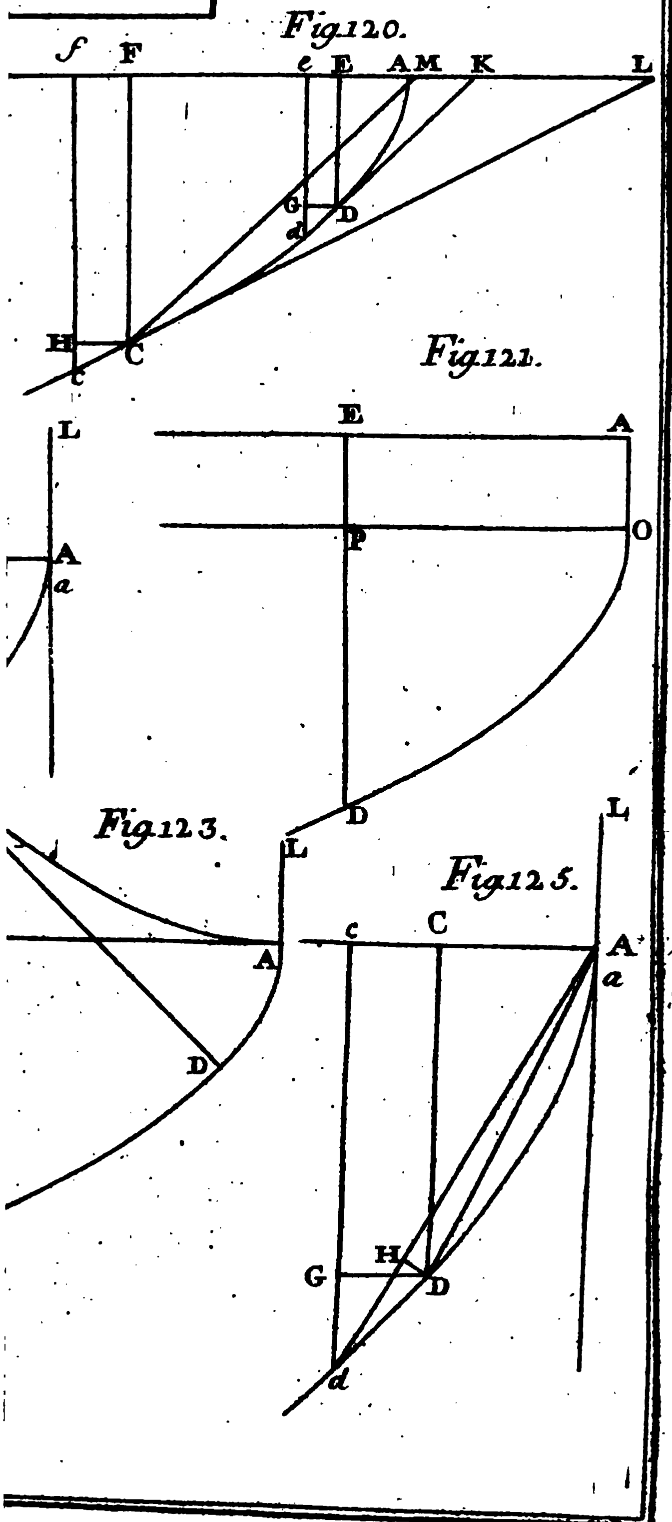
AD aliud nunc nos conferamus Problema, quod ſolvit Dn. HUGENIUS, quodque non parum uſus habere oſtendit in horologiis pendulorum, vel oſcillatoriis. Notum enim eſt, quod oſcillationes circulares æqualibus temporibus non abſolvantur; utpote quæ minorem arcum deſcribunt minori tempore, quam quæ majorem deſcribunt. Oſcillationes itaque circulares in horologiis uſui venire non poſſunt; ſecus enim tempus non æqualiter menſuraretur.

Huic

* Vid. Nus. XIX. pag. 119. *Tom. I.*

Digitized by Google

XLIX.



Digitized by Google

Digitized by Google

Huic itaque inconvenienti ut occurratur, proponitur ſequens Problema.

Invenire curvam, quæ ejus ſit proprietatis, ut corpus in illa ubicunque deſcendere incipiens ſemper æquali temporis ſpatio ad infimum curvæ punctum deſcendat.

Senſus hujus Problematis hic eſt, invenire curvam ABC, cujus axis AD eſt verticalis, ejus naturæ ut corpus B, a puncto quodam curvæ B deſcendens, æquali tempore pertingat ad A, ac ſi ab alio puncto C deſcendiſſet; id eſt, ſi duo corpora in punctis B, C poſita ſimul deſcendere incipiant, ut eodem temporis momento concurrant in imo puncto A.

Ad hoc ſolvendum, eædem hypotheſes, quas in præcedentibus ſtatuimus, hic locum obtinent. Ut diviſiones minus intellectum perturbent, ponatur portio curvæ AB ad alteram partem; Dividatur AC in infinitas partes æquales A*c*, *cd*, *de*, *ef*, *fg* &c. portio AB in totidem numero æquales A*b*, *bl*, *lm*, *mn* &c. Hæc itaque curva hanc debet habere naturam, ut particula C*i* eodem temporis momento percurratur, quo particula B*q*, & *ih* eodem quo *qp*, *hg* eodem quo *po*, *gf* eodem quo *on*, & ita conſequenter; ſic enim tota CA eodem tempore abſolvetur quo BA. Hoc bene intellecto, quia portiunculæ A*b*, A*c*, æquali temporis momento percurruntur, erit celeritas in *b* ad celeritatem in *c*, ut *b*A ad *c*A, ut tota BA ad totam CA; proinde quadratum celeritatis in *b* ad quadratum celeritatis in *c*, ut quadratum BA ad quadratum CA; eſt autem quadratum celeritatis in *b* ad quadratum celeritatis in *c*, ut altitudo verticalis AE ad altitudinem verticalem AF; ergo quadratum AB ad quadratum AC, ut AE ad AF. Problema itaque mechanicum ad geometricum redactum eſt; quod eo recidit, ut inveniatur curva ABC, ita ut quadrata portionum quarumcunque AB, AC, ſint abſciſſis AE, AF proportionalia; id eſt $AB^2 : AC^2 = AE : AF$; proinde AB^2 ad AE in ratione conſtanti. Sit itaque ratio ut a ad 1, $AE = x$, $EB = y$, $AB = s$; proinde, per naturam inventam, erit $a : 1 = ss : x$, quæ proportio in æqua-

TAB. LXIX. *Fig. 126.*

TAB. LXIX. *Fig. 127.*

Digitized by Google

tionem redacta dat $ss = ax$; proinde $s = \sqrt{ax}$, eorumque differentialia $ds\ [\sqrt{(dx^2 + dy^2)}] = adx : 2\sqrt{ax}$. Sumantur quadrata $dx^2 + dy^2 = adx^2 : 4x$, vel $4xdx^2 + 4xdy^2 = adx^2$ & $4xdy^2 = adx^2 - 4xdx^2$, eorumque radices $dy\sqrt{4x} = dx\sqrt{(a - 4x)}$, ideoque $dy = dx\sqrt{(a - 4x)} : \sqrt{4x} = dx\sqrt{(\frac{1}{4}a - x)} : \sqrt{x} = (\frac{1}{4}a - x)\,dx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)} = (\frac{1}{8}a - x)\,dx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)} + \frac{1}{8}adx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}$, ideoque ſumptis integralibus $y = \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}$ + integr.

TAB. LXIX. *Fig.* 128. $\frac{1}{8}adx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}$. Hoc autem integrale habetur, ſi fiat ſemicirculus AGF cujus diameter AF $= \frac{1}{4}a$ & AE $= x$; erit arcus AG = integr: $\frac{1}{8}adx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}$; eſt autem etiam $\sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}$ = EG; proinde EB vel y = EG + GA, ſeu GA = GB; ex quo patet, quod curva AB ſit Cyclois. Quod etiam manifeſtum eſſe potuit ante calculum ex hoc: Quoniam curva Cycloidalis AB eſt dupla rectæ AG, quadrata autem AG, quia ſunt æqualia rectang: FAE, ſunt in ratione abſciſſarum AE, proinde quoque quadrata portionum AB ſunt in ratione abſciſſarum. Ex his nunc facile Synthetica demonſtratio formari poteſt, quod nempe corpus in

TAB. LXIX. *Fig.* 129. Cycloide ubique æqualibus temporibus deſcendat. Sit enim Cyclois BAC & incipiant duo corpora deſcendere, unum in B, alterum in C; dico æquali tempore pervenire iſta corpora ad A. Dividantur enim duæ portiones in infinitas partes numero æquales, & ſit qp eo ordine in BA, quo ih in CA: Nunc ita argumentor: FA : EA $=$ CA^2 : BA^2 $= ih^2 : qp^2 =$ Ai^2 : Aq^2 = AR : AS, proinde FA : EA = AR : AS; ergo etiam FR vel Li : ES vel Mq $= ih^2 : qp^2$; eſt autem Li ad Mq, ut quadratum celeritatis in i ad quadratum celeritatis in q; proinde ih^2 ad qp^2 ut quadratum celeritatis in i ad quadratum celeritatis in q; adeoque ih ad qp, ut celeritas in i ad celeritatem in q; particula itaque ih eodem tempore percurritur quo qp. Quod demonſtratum eſt de his duabus, de omnibus aliis pariter quoque demonſtratur; proinde tota CA & tota BA eodem temporis ſpatio percurruntur. *Q. E. D.*

De-

Digitized by Google

N°. CXLIX.

Fig. 126.

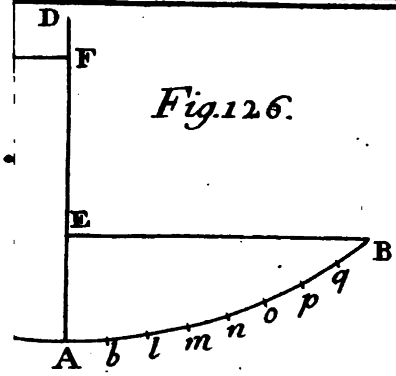


Fig. 128.

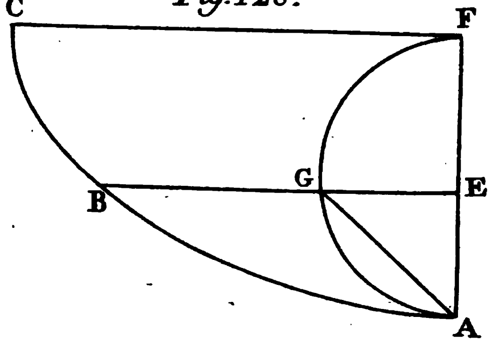


Fig. 129.

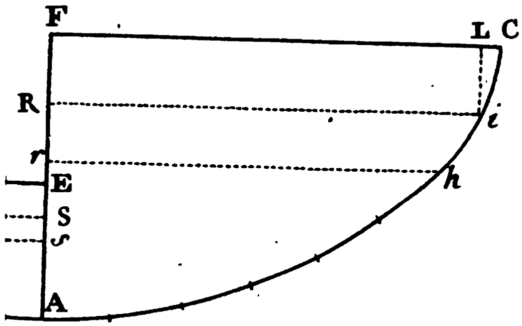
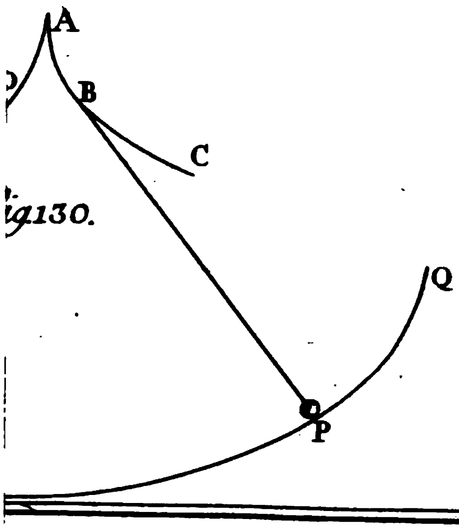


Fig. 130.



Digitized by Google

Demonſtratio hæc tanto apparatu non opus habuit, ſicut illa P. PARDIES, qui confuſum ſuum Chaos inventioni Dn. HUGENII ſuccincte demonſtratæ adhucdum comparare voluit.

Hinc ſi commode efficere velimus ut oſcillationes fiant temporibus æqualibus, conſtruendæ ſunt duæ Cycloides æquales ABC, ADE, quarum axes ſint verticales, & filum æquale ſemicycloidi puncto A affigatur, cujus alteri termino appendatur pondus P, erunt oſcillationes ponderis P iſochronæ; nam per evolutionem Cycloidis ABC, vel ADE, deſcribitur alia Cyclois QPR, quæ proin temporibus æqualibus percurretur. TAB. LXIX. *Fig.* 130

LECTIO TRIGESIMA SEXTA.

De Curvis Funicularíis vel Catenariis.

QUantum utilitatis Problema lineæ Catenariæ in Geometria obtineat, videre eſt ex tribus ſolutionibus *Actis Lipſienſibus* anni præteriti (1691) inſertis, & præcipue ex iis quæ Celeb: LEIBNITIUS ibi annotat. Primus qui de iſta curva a filo, vel potius catenula quæ non eſt extenſibilis, libere pendente formata cogitavit, fuit GALILÆUS; naturam autem ejus non penetravit, utpote qui Parabolam eſſe ſtatuit, quæ tamen minime eſt. *Joachimus* JUNGIUS, ut animadvertit Dnus. LEIBNITIUS, per calculum & multa experimenta inſtituta, comperiit non eſſe Parabolam; interim veram curvam non aſſignavit. Solutio itaque eximii hujus Problematis ad noſtrum uſque tempus reſervata fuit; quam, una cum calculo qui in *Actis* ſolutioni* non adjungitur, hic exhibemus. Curva interim catenaria duplex eſt, vel vulgaris, quæ formatur a filo vel catena æqualiter craſſa, ſeu in omnibus ſuis punctis æqualiter gravata; vel non vulgaris, quæ nempe formatur a filo inæqualiter craſſo, id eſt, quod in omnibus ſuis punctis inæqualiter eſt gravatum, & quidem in ratione

* Vid. Nus. IV. pag. 48, *Tom. I.*

 appli-

applicatarum alicujus curvæ datæ. Antequam ſolutionem aggrediamur, ſequentia ſunt præſupponenda, quæ ex Staticis facile demonſtrari poſſunt.

1°. Filum, Funis, Catena, vel quicquid curvam repræſentat, ſupponitur in omnibus ſuis punctis flexile, & inextenſibile, id eſt, quod ob gravitatem ſuam extenſionem non patitur.

TAB. LXX. *Fig.* 131. 2°. Si in duobus punctis A & C quibuſcunque curva Catenaria ABC ſuſtinetur; potentiæ, quæ in punctis A & C requiruntur, erunt eædem quæ requiruntur ad ſuſtinendum pondus D æquale ponderi catenæ ABC, & in concurſu D duorum filorum nullius gravitatis AD, CD, curvam ABC in punctis A & C tangentium appenſum. Ratio hujus eſt evidens; nam pondus catenæ ABC exerit virtutem ſuam in A & C ſecundum directionem, id eſt, ſecundum tangentes AD, CD, & ejuſdem vel æqualis ponderis D tractio in A & C eſt etiam ſecundum rectas AD & CD: oportet itaque ut potentiæ requiſitæ in punctis A & C ſint in utroque caſu eædem. Hinc potentia quæ requiritur in infimo puncto B habebitur, ſi quæratur potentia quam pondus E in eodem puncto exerit, ſuſtentatum a duobus filis nullius gravitatis, quorum unum tangit curvam in B, & proinde eſt horizontale, alterum vero tangit in puncto A. (TAB. LXX. *Fig.* 132.)

TAB. LXX. *Fig.* 133. 3°. Si catena duobus terminis A & C alligata in alio quovis puncto F figatur, ita ut pars AF auferri poſſit; curva, quam reſidua catena FBC repræſentat, non mutabitur; id eſt, reliqua puncta in eodem, quem ante fixationem habuerunt, ſitu manebunt.

Hoc demonſtratione non indiget; ratio enim id ſuadet, & experientia quotidie ob oculos ponit.

4°. Iiſdem poſitis quæ prius, ante & poſt fixationem in ſingulis curvæ punctis eadem, id eſt, priſtina potentia requiritur, vel, quod eodem recidit, qua vi unum punctum ante fixationem trahitur, eadem vi trahetur poſt fixationem. Hoc nihil aliud eſt, quam Corollarium prioris. Hinc quantumcunque catena BFA; vel prolongetur, vel decurtetur, hoc eſt, ubicun-

que

Digitized by Google

que punctum fixationis F ſumatur, potentia in infimo puncto B neque augebitur, neque diminuetur, ſed ſemper manebit eadem & æqualis.

5°. Pondus P ſuſtentatum a duobus filis AB, CB quomodocunque poſitis, hac proportione vires ſuas exerit in puncta A & C, ut potentia requiſita in A ſit ad potentiam requiſitam in C, ut viceverſa [ducta verticali BG] ſinus anguli CBG ad ſinum anguli ABG, & pondus P ad potentiam alterutram in C, ut ſinus anguli totius ABC ad ſinum anguli oppoſiti ABG. Hoc in quavis Statica demonſtratur. TAB. LXX. *Fig.* 134.

His præſuppoſitis, curvam Catenariam vulgarem ſic invenimus. Sit BA*a* curva quæſita, cujus infimum punctum B; axis, vel linea verticalis, tranſiens per B, BG; tangens in infimo puncto BE, quæ erit horizontalis; & in quocunque alio puncto A tangens AE. Ductis applicata AG & axi parallela EL, ſit BG $= x$, GA $= y$, G*g* $= dx$, H*a* $= dy$; pondus catenæ, vel quia æqualiter craſſa, longitudo curvæ BA $= s$. Quoniam itaque in puncto B ſemper æqualis & conſtans potentia requiritur [per hypoth. 4] ſive catena BA continuetur, ſive decurtetur; ſit illa potentia, vel linea recta ipſam exprimens C $= a$; Intelligatur nunc pondus catenæ AB concentratum & appenſum eſſe in concurſu E filorum tangentium AE, BE, requiritur [per hypoth. 2] in puncto B, eadem potentia ad ſuſtinendum pondus E, quæ antea requirebatur ad ſuſtinendam catenam BA. Verum [per hypoth. 5] pondus E eſt ad potentiam in B, ut ſinus anguli AEB, vel complementi ad duos rectos EAL, ad ſinum anguli AEL, id eſt, ut EL ad AL: proinde ubicunque in curva punctum fixationis A ſumatur [curva enim, per hypoth. 3, ſemper manet eadem] pondus catenæ AB eſt ad potentiam in B, ut EL ad AL, id eſt, $s : a =$ EL : AL $=$ AH : H*a* $= dx : dy$, & inverſe $dy : dx = a : s$. Ex quo patet quod curva Catenaria BA ſit illa ipſa, cujus conſtructionem & naturam ſupra dedimus in Methodo tangentium inverſa [Lect. XII *] ubi prius proportionem hanc $dy : dx = a : s$ redegimus ad hanc æqualitatem.

* pag. 426, 427.

litatem $dy = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$, & dein conſtructa fuit curva, per extenſionem curvæ parabolicæ, ut & per quadraturam ſpatii hyperbolici.

LECTIO TRIGESIMA SEPTIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti. De Curvis funiculariis, ſive Catenariis.

TAB. LXX. *Fig.* 136. UT veritas noſtræ ſolutionis eo magis eluceſcat, examinabimus illam, an cum ſolutione Dni. Leibnitii conveniat. Cujus conſtructio curvæ Catenariæ eſt talis: Sit NCP recta indefinita horizontalis, ſuperque ea deſcribatur curva Logarithmica OMBQ, cujus ideo ſubtangens ubique eſt æqualis ſeu conſtans; eligatur applicata CB, quæ ſubtangenti eſt æqualis, & ſumptis hinc inde quomodocunque æqualibus CD, CP, fiat DA = dimidiæ ſummæ applicatarum DM, PQ; dicit punctum A eſſe in curva Catenaria BA. Ad diſquirendum itaque, an hæc curva ſit eadem cum noſtra quam dedimus; videndum eſt, num natura curvæ BA per eandem æquationem differentialem exprimatur. Sit proinde CB, vel ſubtangens $= a$, BG $= x$, GA $=$ CD $= y$, DM $= z$, G$g = dx$, D$d =$ H$a = dy$; erit, per naturam Logarithmicæ, $zdy = adz$, proinde $dz = zdy : a$. Quoniam per conſtructionem CD = CP; erit DM : CB = CB : PQ, ideoque PQ $= aa : z$, & $\frac{1}{2}$ DM $+ \frac{1}{2}$ PQ, hoc eſt, per conſtructionem, DA $= (aa + zz) : 2z =$ CB + BG $= a + x$; ergo $zz = 2az + 2xz - aa$; quæ æquatio ſi reſolvatur dat $z = a + x + \sqrt{(2ax + xx)}$, proinde $dz = dx + (a + x)\, dx : \sqrt{(2ax + xx)}$. Subſtituto valore ipſius z in priore æquatione $dz = zdy : a$, proveniet $dx + (a + x)\, dx : \sqrt{(2ax + xx)} = (ady + xdy + dy\sqrt{(2ax + xx)}) : a$, vel $(adx\sqrt{(2ax + xx)} + aadx + axdx) : \sqrt{(2ax + xx)} = ady + xdy + dy\sqrt{(2ax + xx)}$, & diviſo utroque per $a + x + \sqrt{(2ax + xx)}$ habetur $adx : \sqrt{(2ax + xx)} = dy$, quæ æquatio, quia eadem

eadem eſt cum illa quam nos invenimus, ſequitur quoque curvam BA eſſe noſtram Catenariam, & proinde conſtructionem *Leibnitianam*, utut diverſiſſimam ab illa quam ſupra dedimus, non tamen diverſam generare lineam.

Reſtat, ut egregias proprietates curvæ Catenariæ ſimplicis addamus, & quidem cum calculo & demonſtratione, quæ in *Actis* non exibita fuit. Adhibeatur Schema quod in *Actis* exſtat, in quo EBF eſt curva Funicularia, B ejus punctum infimum, BA axis, BG Hyperbola æquilatera, quam liceat generatricem appellare, BH Parabola per cujus extenſionem Catenaria EBF conſtructa eſt. TAB. LXX. *Fig.* 137.

1°. Ducta tangente FD, erit AF : AD = BC : BF curvam. Nam AF : AD $= dy : dx$; invenimus autem in calculo $dy : dx = a : s$. Ergo conſtat propoſitum.

2°. AE, vel AF, æquatur curvæ parabolicæ BH, dempta recta AG; hoc patet, quia per conſtructionem EG æqualis ſumpta fuit ipſi BH.

3°. Curva BE, vel BF, æqualis eſt rectæ AG, id eſt, portiones curvæ Funiculariæ ad axem applicatæ conficiunt Hyperbolam æquilateram: Inſignis eſt hujus curvæ proprietas. Hoc demonſtravimus in methodo tangentium inverſa *.

4°. Spatium funicularium BAE, vel BAF, eſt æquale rectangulo ſub BA & AF, diminuto rectangulo ſub CB & FG. Quoniam enim $dy = adx : \surd(2ax + xx)$, erit $xdy = axdx : \surd(2ax + xx) = (ax + aa)dx : \surd(2ax + xx) - aadx : \surd(2ax + xx) = (ax + aa)dx : \surd(2ax + xx) - ady$. Ergo Integr: xdy, id eſt, complementum ſpatii BAF eſt = Integr. poſterioris, quod eſt $a\surd(2ax + xx) - ay =$ CB×AG — CB×AF = CB×FG; ideoque ipſum ſpatium BAF = BA×AF — CB×FG.

5°. Curva MNO, ex cujus evolutione deſcribitur Funicularia BE, eſt tertia proportionalis ad CB & AG. Ad hujus veritatem inveniendam, quæratur prius evolvens EO, quam generaliter in omnibus curvis æqualem eſſe $(dx^2 + dy^2)\surd(dx^2$ +

* Supra pag. 427, ſub finem.

$+dy^2$) : — $ddydx$ ſupra in Articulo de evolutione curvarum* oſtendimus. Hac itaque in curva dx^2+dy^2 ſeu $ds^2=(aa+2ax+xx)\,dx^2:(2ax+xx)$, & quoniam $dy=adx:\sqrt{(2ax+xx)}$ erit $ddy=(-aa-ax)dx^2:(2ax+xx)\sqrt{(2ax+xx)}$. Invenitur itaque tota $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}:-ddydx^2$, ſeu $EO=(aa+2ax+xx):a$, a qua ſi auferatur illa quæ provenit ex ſuppoſitione $x=0$, remanet $(2ax+xx):a=$ curvæ MNO, id eſt a, vel CB: $\sqrt{(2ax+xx)}$ vel AG = AG : MNO.

6°. Recta evolvens EO eſt tertia proportionalis ad CB & CA. Nam ob $EO=(aa+2ax+xx):a$, eſt a, ſeu CB : $a+x$, ſeu CA = CA : EO.

7°. Recta BM uſque ad principium curvæ MNO ſumpta æquatur ipſi CB. Nam ſi $x=0$, erit evolvens EO, quæ nunc eſt BM, $=a=$ CB.

8°. MP eſt dupla ipſius BA, quia $MNO=(2ax+xx):a$, erit differentiale $Oo=(2a+2x)dx:a$; ſed triangulum Oop ſimile eſt triangulo SRE, ideoque etiam triangulo ERe; proinde Ee: $ER=Oo:po$; hoc eſt, $\frac{adx+xdx}{\sqrt{(2ax+xx)}}:\frac{adx}{\sqrt{(2ax+xx)}}=\frac{2adx+2xdx}{a}$: $2dx=po$, ejuſque integrale $=2x=$ PM.

9°. Rectangulum ſub CB & PO duplum eſt ſpatii hyperbolici ABG. Nam quia $Ee:Oo=eR:pO$, hoc eſt, $\frac{adx+xdx}{\sqrt{(2ax+xx)}}:\frac{2adx+2xdx}{a}=dx:\frac{2dx\sqrt{(2ax+xx)}}{a}=pO$, ergo $CB\times pO=2dx\sqrt{(2ax+xx)}$, ejuſque Integr. $CB\times PO=$ duobus ſpatiis hyperbolicis ABG.

10° Recta CP biſecta eſt in puncto A. Quia enim $MP=2x$, erit $BP=2x+a$, $BP-BA$ ſeu $AP=x+a=$ CA.

11°. Curva EB eſt ad curvam MNO ut recta CB ad rectam AG. Nam EB, id eſt, $\sqrt{(2ax+xx)}$: MNO, vel $\frac{2ax+xx}{a}=a:\sqrt{(2ax+xx)}=$ CB : AG.

* pag. 437.

12°.

12°. Si ad AG applicentur duo rectangula AI, AK, quorum unum AI ei quod ſub ſemilatere tranverſo CB & recta FG comprehenditur rectangulo, alterum AK, quod ipſi ſpatio hyperbolico BGA æquatur, & differentiæ latitudinum KI ſumatur in axe a vertice B æqualis BL, erit punctum L centrum gravitatis curvæ Funiculariæ EBF. Hoc alibi demonſtratur.

13°. Si ſuper EF infinitæ intelligantur deſcriptæ curvæ ipſi Funiculariæ EBF æquales, illæque in rectas extendantur, & in ſingulis ſingulæ extenſæ punctis applicentur rectæ ipſis reſpective diſtantiis a linea EF æquales, erit omnium ſpatiorum quæ ſic efficiuntur illud, quod a Funicularia gignitur, maximum.

Hoc demonſtratur per axioma illud, quod centrum gravitatis in tantum deſcendit quantum deſcendere poteſt.

LECTIO TRIGESIMA OCTAVA.

De Curvatura Funis inæqualiter craſſi.

THeoria, quam adhibuimus in determinanda Catenaria ſimplici, facile accommodari poteſt ad alias ejuſmodi curvas Catenarias vel Funicularias; quæ nempe generantur a funibus inæqualiter craſſis, id eſt, in ſingulis ſuis punctis inæqualiter gravatis: oportet autem ut craſſities ad longitudinem datam quandam relationem obtineat. Afferemus caſum ubi relatio iſta æquatione algebraica eſt exprimibilis, & Problema per ſimplicem curvam mechanicam ſolvi poteſt.

Sit figura curvilinea ABDEG proprietatis talis, ut applicata GE ſit in reciproca dimidiata ratione abſciſſæ AG, hoc eſt, cujus natura [poſito AG $= s$, GE $= t$, conſtans $= a$] exprimatur per hanc æquationem $a^3 = stt$, & concipiatur AG eſſe funem perfecte flexilem, & in omnibus ſuis punctis gravatum ſecundum rationem reſpective applicatarum GE, vel, quod tantundem eſt, in ratione differentialium applicatarum TAB. LXXI. *Fig.* 138.

Digitized by Google

GH in Parabola AHI, aut denique portiuncularum curvæ cycloidalis AH [cujus vertex A] iſque ſic gravatus ſuſpendi intelligatur, ita ut punctum A ſit omnium infimum, quod ſit ubi connexum habuerit a parte A alium funem ejuſdem longitudinis, & in æqualibus a puncto A diſtantiis æqualiter gravatum. Quæritur qualem curvam funis AGC hac ſuſpenſione formaturus ſit?

TAB. LXXI. Fig. 139. Sit curva quæſita AE*e*, $AI = x$, $IE = y$, $Ii = dx = HE$, $He = dy$, curva $AE = s$; oportet nunc, ut gravitas vel pondus curvæ AE, vel, quod idem eſt, in priori figura ſpatium ABDEG, quod invenitur ſumpto integr: ex tds, id eſt, ex $ds \sqrt{(a^3 : s)}$, ſic itaque hujus integr: $2\sqrt{a^3 s}$, eſt æquale, vel potius denotat pondus funis AE: ſed hoc pondus eſt ad potentiam conſtantem in A, ut ſinus anguli LEF ad ſinum anguli LFE, ut LF ad LE, ut HE ad H*e*; hoc eſt, $2\sqrt{a^3 s} : 4aa = dx : dy$, vel $4s : a = dx^2 : dy^2$; vel denique, ſi litteram a vocemus $4a$, $s : a = dx^2 : dy^2$. Curva itaque AE eſt illa cujus conſtructionem exhibuimus in Methodo tangentium inverſa *, ubi proportionem hanc $s : a = dx^2 : dy^2$, in hanc æquationem mutavimus $dy \sqrt{(yy - 4aa)} = 2adx$. Conſtructio

TAB. LXXI. Fig. 140. autem fuit talis: Ductis normalibus FB, AC, ſumptaque $BA = 2a$, centro A & vertice B deſcribatur Hyperbola æquilatera BD; ducatur AG parallela BF; erit ſumpto rectangulo AH æquali ſpatio hyperbolico BDI, punctum occurſus E in curva Funicularia quæſita. Notandum autem eſt, quod curvæ initium immutabile ſit in puncto A, quoniam, ob $\sqrt{(yy - 4aa)} = ID$, Hyperbolæ initium ibi eſt. Si itaque libeat illud ſumere in puncto B, oportet ut y appelletur $y + 2a$; & ſic æquatio $dy \sqrt{(yy - 4aa)} = 2adx$ convertetur in hanc $dy \sqrt{(yy + 4ay)} = 2adx$. Longitudo hujus curvæ ita invenitur: $dx = dy \sqrt{(yy + 4ay)} : 2a$, ergo $dx^2 = (yy + 4ay)\, dy^2 : 4aa$, proinde $dx^2 + dy^2 = (yy + 4ay + 4aa)\, dy^2 : 4aa = ds^2$; ideoque $ds = (y + 2a)\, dy : 2a$, & s, vel curva BE, $= (yy + 4ay) : 4a$. Ex quo patet quod curva BE ſit tertia proportionalis ad rectum vel tranſverſum latus Hyperbolæ, & applicatam ejus ID.

* Supra pag. 429, Art. VI.

Spa-

N.o CXLIX.

Fig. 133.

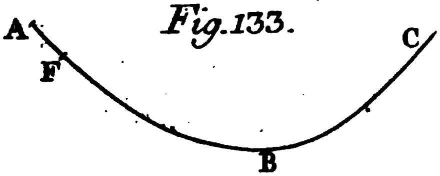


Fig. 132.

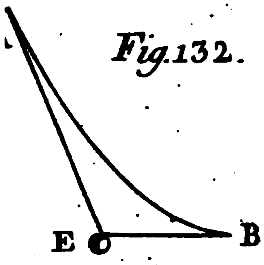


Fig. 134.

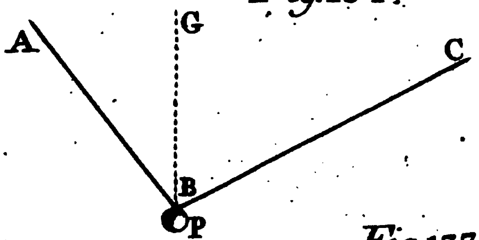
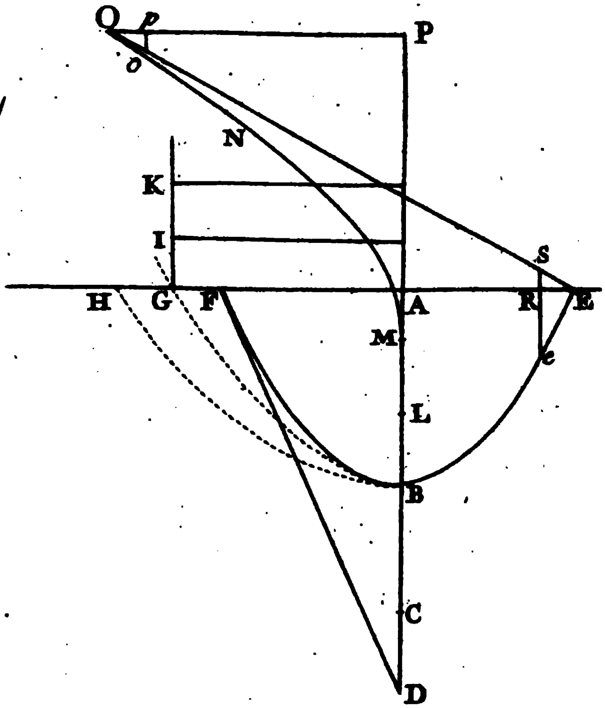


Fig. 137.





Digitized by Google

Spatium funicularium B H E ſic determinatur, $dx = dy\sqrt{(yy+4ay)}:2a$; proinde $ydx = ydy\sqrt{(yy+4ay)}:2a = (y+2a)dy\sqrt{(yy+4ay)}:2a - 2a\,dy\sqrt{(yy+4ay)}:2a = (y+2a)dy\sqrt{(yy+4ay)}:2a - dy\sqrt{(yy+4ay)}$. Integrale prioris membri eſt $= (yy+4ay)\sqrt{(yy+4ay)}:6a = ID^3:6a$; poſterioris vero = ſpatio hyperbolico B D I; ideoque ſpatium B H E = $ID^3:6a$, minus ſpatio hyperbolico B D I.

Tangens curvæ E L ita habetur; $dy:dx = HE:HL$, quia vero $dx = dy\sqrt{(yy+4ay)}:2a$, erit $dy:dx = 2a:\sqrt{(yy+4ay)}$; ergo $HE:HL = 2a:\sqrt{(yy+4ay)}$. Sumenda itaque eſt H L quarta proportionalis ad ſemilatus rectum, abſciſſam H E vel B I, & applicatam I D.

Egregia hujus curvæ B E proprietas non eſt omittenda; eſt enim hæc Funicularia B E eadem cum illa, ex cujus evolutione Catenaria ſimplex vel vulgaris deſcribitur. Ad hoc demonſtrandum apponatur figura ultima Lect: præc:, & inſuper centro C & vertice M deſcribatur alia Hyperbola æquilatera M X. TAB. LXXI. Fig. 141. Oſtenſum ibi eſt, quod C M ſemidiameter Hyperbolæ M X ſit dupla ipſius C B ſemidiametri Hyperbolæ B G; item quod abſciſſa M P ſit dupla abſciſſæ B A; ergo, ob ſimilitudinem Hyperbolarum, ſpatium hyperbolicum M P X æquale eſt quatuor ſpatiis hyperbolicis B A G: ibidem autem oſtendimus, quod rectangulum ſub C B & P O ſit duplum ſpatii hyperbolici B A G, ergo rectangulum ſub C M & P O ejuſdem ſpatii hyperbolici erit quadruplum; ideoque æquale ſpatio hyperbolico M P X: proinde curva M O eſt eadem quæ in priori figura B E; utrobique enim rectangulum ſub ſemidiametro Hyperbolæ & applicata eſt æquale correſpondenti ſpatio hyperbolico.

Lectio Trigeſima Nona.

Continuatio ejuſdem argumenti. De Curvatura Funis inæqualiter craſſi.

Rationem craſſitiei vel gravaminum funis, aut catenæ inæqualium, in præced: Lect: conſideravimus tanquam figuram planam curvilineam ad funem in rectum extenſum, ceu ad axem, applicatam, cujus figuræ quælibet applicata denotabat gravationem puncti in fune correſpondentis. Conſiderabimus nunc funem jam habere ſuam curvaturam, & rationem gravaminum determinari per figuram quandam planam ſuper applicata curvæ Funiculariæ erectam, cujus figuræ applicata quælibet deſignet gravitatem portiunculæ indefinite parvæ in fune correſpondentis. Ut differentia harum duarum hypotheſium eo melius percipiatur, res per ſchema explicanda eſt: In præcedenti Lectione funis A G conſideratus eſt tanquam primo in rectam lineam extenſus, qui in ſingulis ſuis portiunculis ut B *b* inæqualiter eſt gravatus, & quidem in ratione applicatarum B C alicujus datæ figuræ curvilineæ E C F, & dein ſuppoſitum eſt unum funis punctum A eſſe fixum in α, alterum vero G elevari in γ, donec linea horizontalis tranſiens per α curvam in eodem puncto tangat; ſic itaque gravationes particularum B *b* vel βG ſecundum applicatas B C, in fune A B G certam quandam producent curvaturam $\alpha\beta\gamma$, quæ diverſa eſt pro ratione curvæ E C F. Naturam harum curvarum $\alpha\beta\gamma$ determinandi modum tradidimus in Lect: præced. Nunc ſupponemus funem A B G gravitate ſua formare curvam A B G, cujus vertex vel punctum infimum A, axis A E, applicata B H, & ipſi parallela G E; ſuper quo tanquam axe data eſt curva E C F; particulæ funis B *b* gravatæ ſunt in ratione applicatarum correſpondentium C L. Sit A H $= x$, H B vel E L $= y$, C L $= t$, pondus portionis catenæ A B, vel ſpatium quod illud

TAB. LXXI. *Fig.* 142. & 143.

TAB. LXXI. *Fig.* 144.

illud exprimit, ELC $= p$; potentia conſtans in A $= aa$. His ita poſitis, facile ad cognitionem curvæ AB in terminis generalibus pervenitur: Eſt enim in omnibus curvis Catenariis, ut dx ad dy, ita pondus catenæ AB ad potentiam conſtantem in A; hoc eſt, $dx : dy = p : aa$, proinde $pdy = aadx$, & integr: $pdy = aax$; ex quo patet, quod ſi quadratura ſpatii ELC innoteſcat, curva ABG ſit plerumque geometrica, etiamſi curva ECF ſit mechanica; tunc enim valor ipſius p in puris y exprimi poteſt; adeo ut exinde plerumque integrale ſumi queat quantitatis pdy. Sit. v. g. ECF linea recta & parallela ipſi EG; CL $= b$; proinde ſpatium ELC vel $p = by$ & $pdy = bydy$; hujus itaque integrale $\frac{1}{2} byy = aax$ vel $yy = 2aax : b$; quod oſtendit curvam ABG eſſe Parabolam cujus parameter $= 2aa : b$.

Sit nunc ECF linea recta angulum faciens in E cum linea EG; ratio EL ad CL ut a ad b; proinde CL $= by : a$, ſpatium ELC $= byy : 2a = p$, ideoque $pdy = byydy : 2a$, hujus integrale $by^3 : 6a = aax$ vel $y^3 = 6a^3x : b$; ideoque curva ABG eſt Parabola cubicalis prima cujus parameter $\surd(6a^3 : b)$.

Si ECF ſit Parabola, ejuſque parameter $= b$, proinde CL $= \surd by$, & ſpatium ECL $= \frac{2}{3} y \surd by$, erit $pdy = \frac{2}{3} ydy \surd by$, ideoque ejus integrale $\frac{4}{15} yy \surd by = aax$, vel $\frac{16}{225} by^5 = a^4 xx$, proinde curva ABG eſt ſpecies Parabolarum ſecundarum. Pari modo oſtenditur quod ſi ECL ſit complementum vel trianguli, vel ſemiparabolæ communis, vel ſemiparabolæ cubicalis primæ &c. quod, inquam, curva Funicularia ABG ſit vel Parabola cubicalis, vel biquadratica, vel ſurdeſolidalis &c.

Si nunc viceverſa natura curvæ Funiculariæ data eſt, quæritur curva ECF, hoc eſt, ſi funis vel catena præſcriptam quandam curvam formare debeat, quæritur in qua ratione ſingula illius puncta ſint oneranda. Sit ut prius AH $= x$, HB vel EL $= y$, CL $= t$, ſpatium ELC $= p$; potentia conſtans in A $= aa$: quibus poſitis pervenietur ad eandem æquationem $pdy = aadx$. Quia autem nunc quæritur CL, dividendum utrumque eſt per dy & erit $p = aadx : dy$, ſumptis utrobique diffe-

differentialibus dp vel tdy = differ. $(aadx:dy)$ proinde $t = d(aadx:dy):dy$; quo concludendum, quod quotieſcunque Catenaria ABG eſt geometrica, curva ECF etiam ſit geometrica: nam quia relatio inter x & y datur, poterit quantitas $aadx:dy$ dari in quantitatibus definitis; proinde diff. $d(aadx:dy)$ erit ſimplex differentiale, quod diviſum per dy, dabit iterum quantitatem definitam vel algebraicam. Sit ex. gr, ABG Parabola, ejus parameter $= a$, proinde $x = yy:a$ & $dx = 2ydy:a$; ergo $aadx:dy = 2ay$, & $d(aadx:dy) = 2ady$, proinde $d(aadx:dy):dy = 2a = t =$ CL; & ideo ECF eſt linea recta, & parallela ipſi EG. Sit itaque quod antea ſuppoſuimus, nunc per ſuppoſitionem inverſam idem invenimus.

Sit ABG circulus, cujus centrum E, radius AE vel EB $= a$, erit AH vel $x = a - \sqrt{(aa - yy)}$, & $dx = ydy:\sqrt{(aa - yy)}$; ergo $aadx:dy = aay:\sqrt{(aa - yy)}$, ejuſque different. $a^4 dy:(aa - yy)\sqrt{(aa - yy)}$; quo diviſo per dy, provenit $a^4:(aa - yy)\sqrt{(aa - yy)} = t =$ CL.

Hinc ſi $y = a$, id eſt, ſi punctum B ſumatur in G, erit t vel CL infinita, ideoque ponduſculum particulæ Bb, quod eſt in G, infinities majus eſſe debet, quam reliquarum ponduſcula: hinc evenit ut directio primæ particulæ ſit verticalis, tangens enim in G parallela eſt axi EA.

LECTIO QUADRAGESIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti. De Curvatura Funis inæqualiter craſſi.

SOlutio non difficilior evadit, ſi gravamina particularum funis ſint in ratione applicatarum correſpondentium figuræ ad axem appoſitæ. Sit enim curva quædam Funicularia
TAB. LXXII. *Fig.* 145. ABG, cujus punctum infimum A, axis AE, particulæ curvæ Bb onerantur in ratione applicatarum, vel potius parallelogrammorum correſpondentium Cb figuræ ACF ad

axem

LIX.

Fig.139.

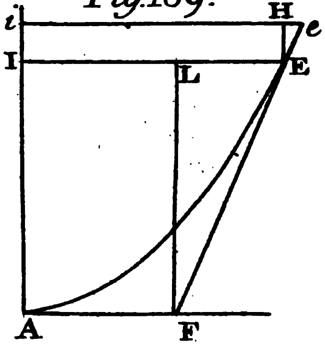


Fig.140.

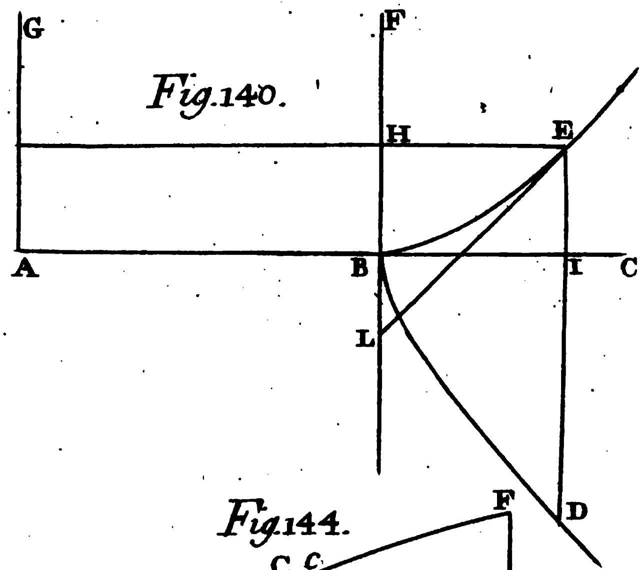
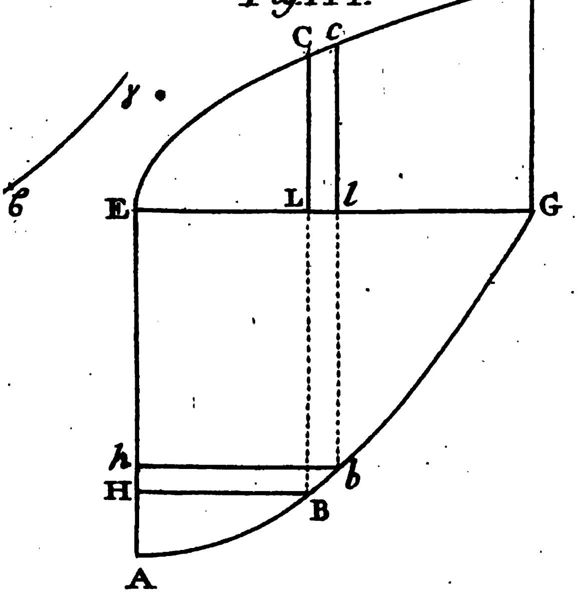


Fig.144.



axem AE appoſitæ. Sit, ut in præcedentibus, AH $= x$, HB $= y$, CH $= t$, ſpatium AHC [quod pondus deſignat catenæ AB] $= p$, potentia conſtans in infimo puncto A $= aa$. Hoc præliminato, ſic pervenitur ad naturam curvæ ABG. Quia, ceu ſæpius dictum, ut dx ad dy, ita pondus catenæ AB ad potentiam conſtantem in A, ſeu quod idem eſt $dx : dy = p : aa$, erit $pdy = aadx$, proinde $dy = aadx : p$, eorumque integralia, $y =$ integr. $(aadx : p)$.

Si linea ACF eſt recta & parallela axi AE, erit $p = ax$, ideoque $aadx : p = adx : x = dy$, vel $adx = xdy$; quod oſtendit curvam Catenariam ABG eſſe Logarithmicam cujus ſubtangens $= a$.

Sit nunc ACF linea recta angulum faciens in A, cum axe AE; ratio AH ad HC, ut a ad b, proinde HC $= bx : a$; ſpatium AHC $= bxx : 2a = p$; ideoque $aadx : p = 2a^3 dx : bxx$; hujus integrale $- 2a^3 : bx = y$; quod indicat curvam Catenariam aBG eſſe Hyperbolam, ſed ab altera parte poſitam, ob quantitatem negativam y; quod ſemper accidet quotieſcunque curvæ ACF vertex eſt in A; curva enim aBG una ex Hyperboloidibus erit, ſed ex adverſo poſita, cujus aſymptotarum una eſt verticalis, altera vero horizontalis. TAB. LXXII. *Fig.* 146.

Cum autem aCF eſt ex Hyperbolicarum genere, erit Catenaria ABG curva cujus vertex in A. Si ex. gr. aCF eſt talis ut CH, vel t, ſit $= aa : \sqrt{ax}$, erit ſpatium aCHA vel $p = 2a\sqrt{ax}$, proinde $aadx : p = adx : 2\sqrt{ax}$, ejuſque integrale $\sqrt{ax} = y$; ex quo patet, quod curva Funicularia ABG ſit in hoc caſu Parabola, cujus parameter $= a$. TAB. LXXII. *Fig.* 147.

Problematis inverſi ſolutio etiam nullo negotio habetur. Si nempe ex cognita natura curvæ Funiculariæ ABG invenienda ſit curva aCF. Poſitis quæ prius, AH $= x$, HB $= y$, CH $= t$, ſpatium AHC $= p$, potentia conſtans in A $= aa$. Quia itaque $dx : dy = p : aa$, erit $p = aadx : dy$, eorumque different. dp ſeu $tdx = d(aadx : dy)$; ideoque $t = d(aadx : dy) : dx$; ex quo itidem patet quod, exiſtente curva ABG geometrica, curva aCF etiam ſit geometrica.

Sit

Sit ex. gr. ABG Parabola, parameter $= a$, proinde $y = \sqrt{ax}$ & $dy = adx : 2\sqrt{ax}$, ergo $aadx : dy = 2a\sqrt{ax}$, ejuſque differ. $= aadx : \sqrt{ax}$; proinde $d(aadx : dy) : dx = aa : \sqrt{ax} = t =$ CH; ideoque curva aCF eadem eſt quam antea ſuppoſuimus ad inveniendam Catenariam ABG.

Sit nunc ABG Circulus, radius $= a$, ergo $y = \sqrt{(2ax - xx)}$ & $dy = (a - x)dx : \sqrt{(2ax - xx)}$, erit $aadx : dy = aa\sqrt{(2ax - xx)} : (a - x)$ & $d(aadx : dy) = a^4 dx : (a - x)^2 \sqrt{(2ax - xx)}$; proinde $d(aadx : dy) : dx = a^4 : (a - x)^2 \sqrt{(2ax - xx)} = t =$ HC.

Antequam materiam hanc de curvis Catenariis deſeramus; ſolutionem cujuſdam curvæ ad Mechanicam pertinentis adjungamus, quam eandem eſſe cum Catenaria ſimplici deprehendi. Sit vectis indefinite protenſus AE, cujus hypomochlion C: ſit in extremitate A brachii CA appenſum pondus P; ſumptaque CB æquali ipſi AC, quæritur qualis debeat eſſe curva BFG, ita comparata, ut ſi in vecte CE ad quodcunque punctum D appendatur pondus Q æquale ponderi P, illiuſque directio ſit ſecundum planum RS tangens curvam BFG in puncto F in quod cadit applicata DF, [id quod effici poteſt ſi filum DHQ tranſeat per appoſitam trochleam H] ut, inquam, pondus Q hoc in ſtatu æquiponderet ponderi P. Sit CA vel CB $= a$, BD $= x$, DF $= y$, curvæ portio BF $= s$, pondus P vel Q $= p$; ductis ST horizontali & RT verticali, delineetur ſeparatim triangulum rst ſimile triangulo RST. Intelligatur ſuper rs deorſum tendere pondus q æquale Q, cui contra nitatur *X* verticaliter deſcendens. Si hæc duo pondera æquilibrantur, manifeſtum eſt, ex mechanicis, quod q ſit ad *X* ut rs ad rt, ſeu ut RS ad RT, ut ds ad dy, proinde $X = qdy : ds = Qdy : ds$; quia itaque momentum ponderis *X* verticaliter deſcendentis æquale eſt momento ponderis q oblique deſcendentis in plano rs; ſi ad punctum D directe appendi intelligatur pondus X $=$ ponderi *X*, erit punctum D tantundem oneratum a pondere X directe deſcendere conante, quantum oneratum eſt a pondere Q, cujus directio eſt obliqua; ideoque

TAB. LXXII. Fig. 148. & 149.

quia

Digitized by Google

quia pondus Q æquiponderare ſupponitur ponderi P; erunt etiam pondera X & P in æquilibrio: ſed quia utriuſque ponderis directio eſt verticalis, erit $AC \times P = DC \times X$, id eſt, $ap = (aQdy + xQdy) : ds = (apdy + xpdy) : ds$; vel diviſo per p, & multipl. per ds, $ads = ady + xdy$; eorumque quadrata $aads^2$ vel $aadx^2 + aady^2 = aady^2 + 2axdy^2 + xxdy^2$; & $aadx^2 = 2axdy^2 + xxdy^2$; tandemque $adx = dy \sqrt{(2ax + xx)}$ vel $adx : \sqrt{(2ax + xx)} = dy$; ex quo liquet curvam BFG eſſe Catenariam vulgarem cujus centrum C.

LECTIO QUADRAGESIMA PRIMA.

De Curvatura Funis extenſibilis.

Omnia, quæ hactenus diximus de curvis Funiculariis vel Catenariis, ſuppoſuerunt catenam vel funem non eſſe extenſibilem, id eſt, non eſſe obnoxium extenſioni, quam propria gravitas cauſari poteſt. Sit nunc funis, uniformis quidem craſſitiei, at a pondere ſuo extenſibilis; quæritur qualem formaturus ſit curvam? Diverſa namque erit ab illa, quæ formatur a fune uniformiter craſſo, ſed inextenſibili. Ad hoc ſolvendum, præter ea quæ ſupra ſuppoſuimus pro Catenariis in genere, ſupponendum eſt LEIBNITII axioma, extenſiones nempe viribus tendentibus eſſe proportionales; hoc eſt, ſi AB ſit funis non extenſus, abc idem funis extenſus ab una vi, $a\beta\gamma\delta$ idem funis extenſus ab alia vi; erit bc exceſſus prioris extenſi ſupra non extenſum AB ad $\beta\gamma\delta$ exceſſum poſterioris extenſi ſupra non extenſum AB, ut prior vis ad poſteriorem vim. Hoc præſuppoſito, vocetur portio funis non extenſi PQ, cujus ponderi æquipollet vis conſtans & tendens imum funis punctum, a; baſis vel craſſities funis PR, 1; & exceſſus qt, quo portio hæc a dicta vi extenſa non extenſam ſuperat, b; craſſities itaque funis extenſi pr habetur multiplicato PR per PQ & diviſo per pt, ideoque $pr = 1a : (a + b) = a : (a + b)$. Sit curva quæſita ABb, quam

TAB. LXXII. *Fig.* 150. 151. 152.

TAB. LXXII. *Fig.* 153. & 154.

TAB. XXII. *Fig.* 155. quam format funis uniformiter craſſus libere pendens & a gravitate ſua extenſus $AB\beta\alpha$, qui ob inæqualem tenſionem in ſingulis ſuis punctis evadit inæqualiter craſſus; conſideratur tamen craſſities tanquam infinite parva. Sit $AC = x$, $CB = y$, longitudo curvæ $AB = s$, Ce vel $Be = dx$, $be = dy$, $Bb = ds$ [intelligantur puncta B & b, reſpondere ad curvam in medio expreſſam, peculiares enim literæ vitandæ confuſionis gratia apponi non potuerunt,] ducantur tangentes AD, BD, axique parallela DE. Quia itaque, per hypotheſes in præcedentibus aſſumptas, potentia conſtans in A eſt ad potentiam in B, ut ſinus anguli BDE ad ſinum anguli EDA, id eſt, ad ſinum totum; ergo potentia in B ad potentiam in A, ut BD ad BE, ut bB ad be, ſeu ds ad dy; quia itaque potentia conſtans in A poſita eſt $= a$, erit potentia in $B = ads : dy$. Quærenda nunc

TAB. LXXII. *Fig.* 154. 155. 156. eſt in puncto B craſſities funis $B\beta$, quod ita peragitur. Potentia a eſt ad potentiam $ads : dy$, ut extenſio qt, vel b, (*Fig.* 154) ad extenſionem $x\theta$ (*Fig.* 156), quæ itaque erit $= bds : dy$, totaque $\pi\theta = (ady + bds) : dy$; ideoque RQ diviſum per $\pi\theta$, id eſt $\pi\varrho$ vel ipſi æqualis $B\beta = ady : (ady + bds)$, proinde $B\beta \times Bb$, id eſt, different. funis vel ponderis funis $= adyds : (ady + bds)$. Quia vero ſinus anguli BDE eſt ad ſinum anguli BDG vel DBE, ut potentia in A ad pondus totum funis, id eſt, BE ad DE vel dy ad dx, ut a ad $adx : dy =$ ponderi funis, erit differ. $d(adx : dy) = ady\,ds : (ady + bds)$. Sed [poſito dy conſtante] $d(adx : dy) = addx : dy$; ergo $addx : dy = ady\,ds : (ady + bds)$ & $adyddx + bddx \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy^2 \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; diviſo utroque per ds, vel per $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ provenit $adyddx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + bddx = dy^2$, & , ut integralia ſumi poſſint multiplicetur ubique per dx, ſicque habebitur $adydxddx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + bdxddx = dy^2\,dx$. Sumantur integralia, & erit $ady \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{1}{2} bdx^2 = xdy^2$ vel $2ady \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2xdy^2 - bdx^2$; eorum quadrata $4aady^2dx^2 + 4aady^4 = 4xxdy^4 - 4bxdy^2dx^2 + bbd.^4$; reducta æquatione provenit $dy^4 = (4aadx^2dy^2 + 4bxdx^2dy^2 - bbdx^4) : (4xx - 4aa)$; ergo $dy^2 = ((2aa + 2bx)\,dx^2 + 2adx^2$

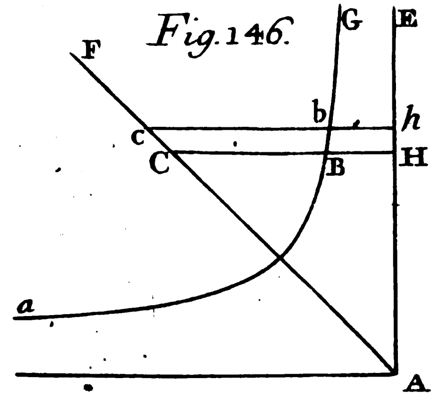
$\sqrt{(aa +}$

Digitized by Google

CXLIX.



Fig. 146.



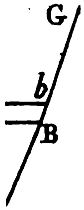
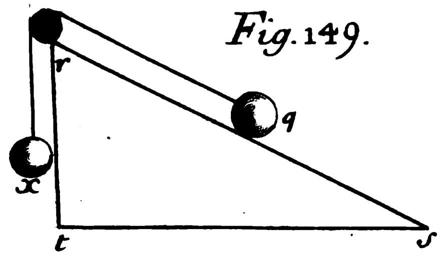


Fig. 149.



8.

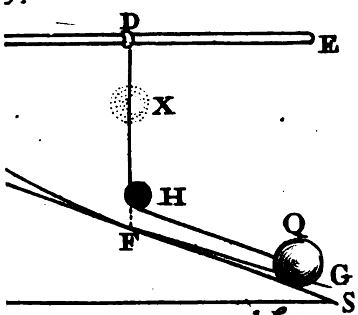
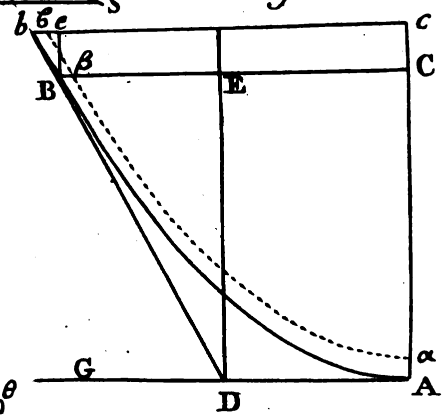
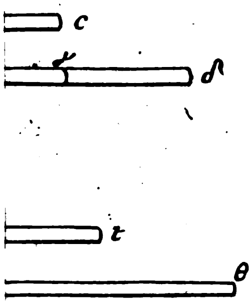


Fig. 155.





Digitized by Google

$\surd(aa+2bx+bb)):(4xx-4aa)$ & $dy = \surd(aa+bx+a\surd(aa+2bx+bb))dx:\surd(2xx-2aa)$.

Invenitur alia quantitas, quæ tamen eadem eſt, quærendo dx, quia nempe $4aadx^2dy^2+4aady^4=4xxdy^4-4bxdy^2dx^2+bbdx^4$, erit $dx^4=(4aadx^2dy^2+4bxdy^2dx^2+4aady^4-4xxdy^4):bb$; proinde $dx^2=((2aa+2bx)dy^2\pm 2ady^2\surd(aa+2bx+bb)):bb$, ideoque $dy^2=bbdx^2:(2aa+2bx\pm 2a\surd(aa+2bx+bb))$ & $dy=bdx:\surd(2aa+2bx\pm 2a\surd(aa+2bx+bb))$. Curva itaque A B b deſcribi poteſt, mediante quadratura alicujus ſpatii curvilinei, cujus applicata [ſi abſciſſa eſt x] eſt vel $=a\surd(aa+bx+a\surd(aa+2bx+bb)):\surd(2xx-2aa)$, vel $=ab:\surd(2aa+2bx-2a\surd(aa+2bx+bb))$; hæ enim duæ quantitates eædem ſunt.

LECTIO QUADRAGESIMA SECUNDA.

De Curvatura fili ex preſſione fluidi.

AD curvas Funicularias ſeu Catenarias, quas hucuſque tractavimus, merito referri poſſunt curvæ fluidorum, hoc eſt, illæ curvæ, quas induit quævis materia flexilis, tanquam nullius gravitatis conſiderata, ut velum, linteum, filum, & alia hujuſmodi, quæ impetum venti, impulſum cujnſdam fluidi, vel ejuſdem quieſcentis gravitatem ſuſtinent. In indagatione harum curvarum duo obſervanda ſunt. Primum eſt directio virium venti allabentis, vel cujuſcunque fluidi ſtagnantis, & in ſubjectum velum vel linteum gravitantis; directio enim hæc non verticalis eſt in ſingulæ curvæ punctis, ſicuti in curvis Catenariis A B C, in qua cujuſlibet particulæ D E gravitas efficit ut verticaliter deſcendere nitatur, ſecundum directionem D F, vel E G, quæ ſunt parallelæ axi curvæ B H. In curvis autem fluidorum abc, directio particulæ curvæ de ubique variat; ſemper quippe tendens ſecundum df, vel eg, quæ ſunt perpendiculares ad curvam abc, in ipſis punctis d vel e; nam ventus

TAB. LXXIII. *Fig.* 157. 158.

Sss 2 im-

impellens, vel fluidum gravitans, neque verticaliter, neque
TAB. LXXIII. *Fig.* 159. horizontaliter, ſed perpendiculariter in curvam agit. Hoc cuivis manifeſtum erit, ſi modo conſideretur quod globus L, ſi moveatur in linea recta LS, & oblique impingat in corpus MN, quod, inquam, propellat hoc corpus MN, ſecundum lineam SQ tranſeuntem per punctum contactus S & per centrum globi; id eſt, ſecundum lineam, quæ eſt perpendicularis ad rectam MN.

Alterum quod eſt obſervandum eſt, quod ventus allabens, cum poſt impulſum aliorſum evadere poteſt, non ea vi, qua irruit, ſubjectam particulam ſecundum perpendicularem ad curvam protrudat, ſed vi imminuta, quæ erit ad vim venti abſolutam, ut ſinus anguli inclinationis venti ad ſinum totum. Si vero ventus poſt allapſum non evadit; manifeſtum eſt tota ſua vi agere in ſubjectam particulam, illamque protrudere ſecundum perpendicularem ad curvam vi non imminuta. Patet enim, quod ſi globus L poſt ictum aliorſum deflectatur, major vis ad retinendum corpus MN non requiratur, quam quæ eſt ad vim abſolutam globi impingentis L, ut perpendicularis MP ad MS, ſeu, quod idem eſt, ut ſinus anguli MSP ad ſinum totum. Si vero globus poſt ictum manere cogitur, neceſſario tota vis globi abſoluta requiritur in S ad ipſi reſiſtendum, hoc eſt, qua vi globus L verſus S movetur, eadem corpus MN verſus SQ propelletur. Suppono autem hic corpus MN nullam habere gravitatem, vel reſiſtentiam paſſivam, ſed cuicunque potentiæ allabenti facillime obſequi & cedere, abſque ut potentia allabens de vi ſua perdat. Quæ cum ita ſe habeant, ad naturam hujuſmodi curvarum ita pervenitur. Quærenda prius eſt vis, qua quælibet particula curvæ perpendiculariter
TAB. LXXIII. *Fig.* 160. extrorſum verſus pellitur: ſit ex. gr. B*b* particula curvæ, quæ pellatur ſecundum perpendicularem BC, & quidem vi quæ exprimatur per ipſam BC; hæc autem vis componitur ex duabus aliis, quarum una eſt horizontalis BD, & altera verticalis BE; quæ nempe exprimuntur per latera rectanguli DE, cujus diagonalis eſt BC; ſic itaque ſingulæ potentiæ BC, *bc*,

bc

Digitized by Google

bc &c. perpendiculares ad curvam A*b*B dividi poſſunt in duas alias æquivalentes BE & BD, *be* & *bd* &c. quarum una eſt verticalis, & altera horizontalis; proinde curva A*b*B reſpectu potentiarum verticalium eſt ſpecies Catenariæ directæ, ſed reſpectu horizontalium erit ſpecies Catenariæ inverſæ, cujus nempe punctum infimum eſt in B. Hoc interim verum eſt, quod in quocunque puncto *b* curva A*b*B figatur, ſemper æqualis potentia in A requiratur, ut in Catenariis vulgaribus; nam per fixationem curvæ ſitus non mutatur. Ea igitur, quæ ſupra dicta ſunt de curvis Catenariis, etiam hic quadrant; ſi videlicet omnes potentiæ verticales colligantur in unam, & omnes horizontales in aliam, & iſtæ duæ ſummæ applicentur in concurſu duorum filorum AH, BH, curvam AB tangentium in punctis A & B, ita ut directio ſummæ verticalium ſit verticalis, id eſt, ſecundum verticalem HM, & directio ſummæ horizontalium ſit horizontalis, id eſt, ſecundum horizontalem HA, & tunc potentia, quæ requiritur in A ad ſuſtinendas duas iſtas potentias in H, erit æqualis potentiæ, quæ requiritur ad curvam AB in ſitu tenendam; proinde æqualis potentiæ conſtanti: Hæc autem ita invenitur, ſi fiat ut ſinus anguli *b*HL, vel H*b*M, ad ſinum anguli *b*HM, id eſt, ut HM ad *b*M, vel ut *dx* ad *dy*, ita ſumma potentiarum verticalium appenſa in H, ad quartam quandam; cui ſi adjungatur ſumma potentiarum horizontalium appenſa in H ſecundum directionem AH [punctum enim A illam ſummam totam ſuſtinet,] erit aggregatum æquale potentiæ requiſitæ in A, id eſt, æquale conſtanti. In reliquis deinde procedendum eſt ut ſupra, & ſummæ difficultas conſiſtet in ſumendis integralibus. Exempla quædam in ſequentibus afferemus.

TAB. LXXIII. *Fig.* 161.

TAB. LXXIII. *Fig.* 162.

Digitized by Google

LECTIO QUADRAGESIMA TERTIA.

De Curvatura Veli a Vento inflati.

PRima harum curvarum quæ ſeſe ſpeculationi offerunt eſt curvatura Veli a vento inflati; quæritur itaque, ſi Velum in hoc ſtatu ſecetur plano verticali, ſectio iſta qualis ſit curva? Ad hoc ſolvendum, duæ hypotheſes neceſſario formandæ ſunt; aut quod globuli venti poſt allapſum evadant & alioríum deflectantur; aut quod non evadant, & ſiſtantur in punctis in quibus impegerunt. Poteſt quidem eſſe ut in inferiori Veli parte ſecunda hypotheſis, in ſuperiori vero prima valeat; hoc autem rem difficiliorem non reddit. Nam ſi Problema juxta utramque hypòtheſin ſolverimus; dicendum erit Velum in hac parte hanc curvaturam, in alia aliam induere. Conſideremus ergo primo poſteriorem hypotheſin, ut pote quæ propoſitum facilius expedit. Per ea quæ ſupra dicta ſunt patet quod, ſecundum hanc hypotheſin, ſingulæ particulæ æquales in curva æquali vi premantur, perpendiculariter ad curvam; nam particulæ æquales in curva globulos numero æquales recipiunt, quorum quilibet æqualiter premit: Ideoque ſumptis [in fig: 161] Bb, bb &c. æqualibus, erunt BC, bc, bc, &c: etiam æquales. Sit AF $=x$, FB $=y$, AB $=s$, F$f=dx$, BG $=dy$, Bb, vel B$c=ds$; quia ang: cBe +Bce = recto = cBb, erit Bce = eBb = BbG; proinde triang: cBe & BbG ſunt ſimilia & æqualia; proinde Be = BG $=dy$, & ce, ſeu BD, = G$b=dx$; ergo omnes Be, id eſt, omnes potentiæ verticales ſimul ſumptæ $=y$, & omnes BD, id eſt, omnes potentiæ horizontales ſimul ſumptæ $=x$; ideoque fiat, ut dx ad dy ita y ad quartam, quæ proin erit $=ydy:dx$; huic ergo adjungatur x ſecundum ea quæ ſupra docuimus, & habebitur $ydy:dx+x=a$ potentiæ conſtanti in A; reducta itaque æquatione provenit $ydy+xdx=adx$, & ſumptis integralibus $\frac{1}{2}yy+\frac{1}{2}xx=ax$, vel $yy+xx=2ax$,

TAB. LXXIII. *Fig.* 163.

$= 2ax$, vel $yy = 2ax - xx$; quod oſtendit curvam AB eſſe Circulum, cujus radius $= a$; quod etiam ante calculum manifeſtum eſſe potuit ex hoc, quoniam ſi curva ubique æqualiter ſecundum perpendiculares ad curvam extrorſum trahitur, nulla ratio eſt, cur unum curvæ punctum magis vel minus a centro diſtare debeat quam alterum. Calculum autem conſulto appoſuimus, ut pateat quod fundamenta quibus inſiſtimus veritati reſpondeant, & confirment ea quæ de curvis Catenariis dicta jam ſunt, & quæ in poſterum de curvis fluidorum dicentur.

Supponamus nunc globulos venti poſt allapſum evadere: ex hac ſuppoſitione ante omnia ſequitur, quod eodem temporis momento ad curvæ particulam B*b* plures globuli appellere non poſſint, quam qui intercipiuntur in latitudine BG duarum parallelarum directioni venti QB & PG. Quia autem ſinguli globuli æquali vi pelluntur, erit vis conjuncta globulorum in ratione latitudinis BG, ſeu dy; appelletur ergo illa vis dy, hæc autem, quia globuli poſt ictum deflectuntur, non tota agit in particulam B*b*, ſed imminuta, quæ [per id quod dictum eſt in Lect: præced:] eſt ad totam ut BG ad B*b*: fiat ergo ut B*b* ad BG, id eſt, ds ad dy, ita vis tota, ſeu dy, ad imminutam, quæ itaque erit $dy^2 : ds =$ BC. TAB. LXXIII. *Fig.* 164. TAB. LXXIII. *Fig.* 165.

Sed ob ſimilitudinem triangulorum B*cc* & BG*b*, B*b* eſt ad BG, ut B*c* ad B*e*, id eſt, ad potentiam verticalem, quæ itaque invenitur $= dy^3 : ds^2$. Per eandem rationem invenitur BD, id eſt, potentia horizontalis, $= dy^2\, dx : ds^2$, ideoque omnes potentiæ verticales ſimul ſumptæ $=$ integr. $(dy^3 : ds^2)$ & omnes horizontales ſimul ſumptæ $=$ Integr. $(dy^2\, dx : ds^2)$. Fiat ergo dx ad dy ut integr. $(dy^3 : ds^2)$ ad quartam, quæ erit $\frac{dy}{dx} \times$ integr. $(dy^3 : ds^2)$, cui ſi addatur integr: $(dy^2\, dx : ds^2)$, habebitur $\frac{dy}{dx}$ int. $(dy^3 : ds^2) +$ int. $(dy^2\, dx : ds^2) = a$, potentiæ conſtanti in A; ſumptis ubique differentialibus [poſito

ds

ds = conſt: id eſt, $dds = 0$] $\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$ integr: $(dy^3 : ds^2)$ $+ dy^4 : dxds^2 + dy^2 dx : ds^2 = 0 =$ (ob $dy^2 + dx^2 = ds^2$) $\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$ integr: $(dy^3 : ds^2) + dy^2 : dx$; multipl. per $dx^2 ds^2$ erit $(dx\,ddy - dyddx)$ integr: $dy^3 + dxdy^2 ds^2 = 0$; quoniam autem $dy = \surd(ds^2 - dx^2)$, erit $ddy = - dxddx : dy$; ſubſtituatur ergo valor ipſius ddy, & multiplicetur per dy, provenit $(- dx^2 ddx - dy^2 ddx)$ integr: $dy^3 + dxdy^3 ds^2 = 0$, vel [ob $dx^2 + dy^2 = ds^2$] $- ds^2 ddx$. integr. $dy^3 + dx\,dy^3 ds^2 = 0$, ideoque ddx. integr. $dy^3 = dxdy^3$, id eſt, $ddx : dx = dy^3 :$ integr. dy^3. Si ulterius progredi velimus & tollere ſignum integralitatis; ponatur integr. $dy^3 = m$, proinde $dy^3 = dm$; item $dx = n$, proinde $ddx = dn$; æquatio ergo inventa convertetur in hanc $mdn = ndm$, vel $mdn - ndm = 0 = (mdn - ndm) : mm$, ejus itaque integrale, quod eſt $n : m$, vel [ſubſtituto valore ipſius n & m], dx: integr. dy^3 = quantitati conſtanti b; ideoque $dx : b$ = integr. dy^3, eorumque different. $ddx : b = dy^3$. Ut autem utrobique quantitatum ſit æqualis dimenſio, ſit $b = 1 : ads$ [ds enim eſt conſtans] & ſic habebitur $adsddx = dy^3$. Verum cum in Methodo tangentium inverſa, Lect: 13 * oſtenderimus curvam, cui competit hæc æquatio, eſſe Catenariam ſimplicem, ſequitur curvam Catenæ & curvam Veli, ſuppoſita prima hypotheſi, eſſe eaſdem.

LECTIO QUADRAGESIMA QUARTA.

De Curvatura Lintei a fluido incumbente.

A Problemate de curvatura Veli non multum abludit Problema de curvatura Lintei formata a gravitate liquoris in illo ſtagnantis. Hoc autem in caſu, certiori fundamento inniti poſſumus, quam in præcedenti: certi quippe ſumus, quod ſecunda hypotheſis hic valeat; globuli enim liquoris, qui immediate ſubjectum linteum contingunt, utpote quieſcentes, evadere

* pag. 428, Art. V.

Digitized by Google

evadere nequeunt; ideoque numerus globulorum qui unam particulam curvæ occupant ut B*b*, eſt ad numerum qui aliam occupant ut *bb*, in ratione ut ipſa particula B*b* ad particulam *bb*; globuli enim, cum evadere non poſſint, perfecte contigui ſunt. Si itaque particulæ B*b*, *bb*, ſunt æquales, erunt etiam numeri globulorum æquales. Quilibet autem globulus, tota ſua vi premit perpendiculariter in ſubjectam particulam, per ea quæ in præcedentibus dicta ſunt; verum hæc vis eſt in ratione altitudinis reſpective liquoris, id eſt, vis globuli B eſt ad vim globuli *b*, ut altitudo liquoris BR ad altitudinem ejuſdem *b*S; ideoque ſi particulæ B*b* & *bb* ſunt æquales & indefinite parvæ, erit vis qua premitur particula B*b* ab omnibus adjacentibus globulis, ad vim qua premitur particula *bb* ab omnibus adjacentibus, ut altitudo BR ad altitudinem *b*S: ſi vero particulæ ſunt inæquales, erunt vires prementes [intellige perpendiculariter in curvam] in ratione compoſita ex ratione altitudinum liquoris & ex ratione particularum. TAB. LXXIV. *Fig.* 165.

Quod hucuſque rationibus phyſicis demonſtratum eſt, nunc experimento comprobabimus.

Sit Vaſculum cujuſcunque figuræ curvilineæ ABC, plenum liquore uſque ad AC, & ad aperturam alicubi factam DE adaptetur perpendiculariter ad curvam ABC tubus ubique æqualiter craſſus DHGIE. Si tubus iſte eodem liquore ad eandem altitudinem impleatur, nempe ad GH; manifeſtum eſt quod liquor in vaſculo & alter in tubo æquiponderabunt; id eſt, quod vis liquoris exeundi ex vaſculo ſit æqualis vi ejuſdem exeundi ex tubo. Quia autem tubus EIGHD eſt perpendicularis ad curvam, erit etiam vis qua liquor in tubo agit in particulam DE perpendicularis ad eandem; ſed ob æqualem craſſitiem tubi, vis illa habetur ex multiplicatione altitudinis GI, vel FL, in baſin vel craſſitiem tubi DE; ergo etiam vis liquoris in vaſculo, qua agit in particulam DE, compoſita eſt ex ratione altitudinis & ex ratione ipſius particulæ DE, ſicut antea. TAB. LXXIV. *Fig.* 166.

Digitized by Google

Hoc præmonſtrato, ad cognitionem curvæ quæſitæ eodem fere modo quo antea pervenitur.

Sit ABS curva quæſita, AL altitudo liquoris ſumma $= a$, AF $= x$, FB $= y$, AB $= s$, Ff $= dx =$ Gb, BG $= dy$, Bb $= ds$; erit itaque vis qua premitur perpendiculariter particula Bb, & quæ repræſentatur per lineolam Bc, $=$ RB×Bb $= ads - xds$: ob ſimilitudinem triangulorum Bce & BGb, eſt Bb: BG $=$ Bc: Be, id eſt, $ds : dy = ads - xds : ady - xdy =$ Be $=$ potentiæ verticali; proinde integr. $(ady - xdy) =$ ſummæ potentiarum verticalium; & quia Bc : ce vel BD $=$ Bb : Gb; invenitur BD, vel potentia horizontalis $= adx - xdx$, hujuſque integr. $[ax - \frac{1}{2}xx] =$ ſummæ potentiarum horizontalium; fiat nunc, ut dx ad dy ita integr. $(ady - xdy)$ ad quartam, quæ proinde erit $= \frac{dy}{dx}$ integr. $(ady - xdy)$, cui ſi adjungatur $ax - \frac{1}{2}xx$, erit aggregatum $\frac{dy}{dx}$ int. $(ady - xdy) + ax - \frac{1}{2}xx =$ potentiæ conſtanti in A; ſumptis differentialibus [poſito $ds =$ conſtanti, id eſt $dds = 0$] erit $\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$ integr. $(ady - xdy) + (ady^2 - xdy^2) : dx + adx - xdx = 0$; quia autem $dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$, eſt $ddy = - dxddx : dy$; ſubſtituto ergo valore ipſius ddy in æquatione inventa, provenit $\frac{-dx^2ddx - dy^2ddx}{dydx^2}$ [vel quia $dx^2 + dy^2 = ds^2$] $\frac{-ds^2ddx}{dydx^2}$ × integr. $(ady - xdy) + (ady^2 - xdy^2 + adx^2 - xdx^2) : dx$ vel [ob eandem rationem] $(ads^2 - xds^2) : dx = 0$. Reducta æquatione, invenitur $adydx - xdydx = ddx$ integr. $(ady - xdy)$. Ad ulterius progrediendum, & ſignum integralitatis tollendum, ponatur $dx = m$, proinde $ddx = dm$; & integr. $(ady - xdy) = n$, proinde $ady - xdy = dn$. Per hanc poſitionem æquatio inventa mutabitur in hanc $mdn - ndm = 0 = (mdn - ndm) : mm$; ejus ergo integrale, quod eſt $n : m$, vel [ſubſtituto valore ipſius n & m] int. $(ady - xdy)$:

TAB. LXXIV. Fig. 167.

dx

Digitized by Google

$dx =$ quantitati conſtanti $aa : ds$; ideoque integr. $(ady - xdy) = aadx : ds$, eorumque differ. $ady - xdy = aaddx : ds$, vel $adx - xdx = aadxddx : ds\sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Eorum ergo integralia $ax - \frac{1}{2}xx = - aa\sqrt{(ds^2 - dx^2)} : ds = - aady : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sumantur quadrata $aaxx - ax^3 + \frac{1}{4}x^4 = a^4dy^2 : (dx^2 + dy^2)$ & $(aaxx - ax^3 + \frac{1}{4}x^4) \times (dx^2 + dy^2) = a^4dy^2$; tranſpoſitis tranſponendis, & extractis radicibus, habetur $axdx - \frac{1}{2}xxdx = dy\sqrt{(a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$ & tandem $dy = (ax - \frac{1}{2}xx)dx : \sqrt{(a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$; ex hoc patet, quomodo curva quæſita ſit conſtruenda, ope quadraturæ alicujus ſpatii curvilinei.

LECTIO QUADRAGESIMA QUINTA.

Conſtructio Curvæ lintearia.

Conſtructio curvæ præcedentis ad quadraturam Hyperbolæ ita reduci poteſt. Cum ſupra poſuimus int. $(ady - xdy) : dx =$ quantitati conſtanti $aa : ds$, poſſumus loco $aa : ds$ univerſaliter ponere $bb : ds$, & ſic perveniemus ad hanc æquationem $dy = (ax - \frac{1}{2}xx)dx : \sqrt{(b^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$. Pro littera itaque b quæcunque quantitas conſtans ſubſtitui poteſt; ponatur ergo $b^4 = \frac{1}{4}a^4$, ut habeatur hæc æquatio $dy = (ax - \frac{1}{2}xx)dx : \sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$ vel $ady = (aax - \frac{1}{2}axx)dx : \sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$. Ut hæc æquatio abbrevietur, ſumatur initium loci quæſiti alibi, id eſt, ponatur $x = a + m$, erit $dx = dm$, & $ax - \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}mm$; proinde $\sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)} = \sqrt{(\frac{1}{2}aamm - \frac{1}{4}m^4)}$ & tota quantitas $(aax - \frac{1}{2}axx)dx : \sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$ ſeu $ady = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}amm)dm : m\sqrt{(\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}mm)} = (a^3 - amm)dm : m\sqrt{(2aa - mm)} = a^3dm : m\sqrt{(2aa - mm)} - amdm : \sqrt{(2aa - mm)}$; ergo integr. ady, hoc eſt $ay =$ int. $(- amdm : \sqrt{(2aa - mm)})$ [hoc eſt $a\sqrt{(2aa - mm)}$] + int. $(a^3dm : m\sqrt{(2aa - mm)})$. Quia autem integrale hujus quantitatis haberi nequit, poteſt

 ſal-

Digitized by Google

ſaltem redigi ad quadraturam Hyperbolæ; id quod ita peragitur. Ponatur $m = aa : n$, proinde $dm = - aadn : nn$, & $\surd(2aa - mm) = \surd(2aann - a^4) : n$; ergo tota quantitas $a^3dm : m\surd(2aa - mm) = a^3dn : \surd(2aann - a^4) = - aadn : \surd(2nn - aa) = - aadn\surd\frac{1}{2} : \surd(nn - \frac{1}{2}aa)$, ideoque int. $(a^3dm : m\surd(2aa - mm)) =$ int. $(- aadn\surd\frac{1}{2} : \surd(nn - \frac{1}{2}aa))$. Facta ergo Hyperbola æquilatera A B C, cujus vertex A, centrum E, axis A D, ſemidiameter tranſverſa E A $= a\surd\frac{1}{2}$; ſi abſcindatur ED $= n$, erit, ductis DB & EB, ſpatium hyperbolicum E A B $=$ int. $(\frac{1}{2}aadn : \surd(nn - \frac{1}{2}aa))$, ideoque $2\surd 2$ ſpat. E A B $=$ int. $(aadn\surd\frac{1}{2} : \surd(nn - \frac{1}{2}aa))$; quia autem $m = aa : n$ erit $n = aa : m$, ſumenda itaque eſt E D $= aa : m$; eritque $2\surd 2$ ſpat. hyperbolic. E A B $=$ int. $(- a^3dm : m\surd(2aa - mm))$; proinde in æquatione ſupra inventa ſubſtituto valore integralis, provenit $ay = a\surd(2aa - mm) - 2\surd 2$ ſpat. hyperb. E A B. Ex quo curva quæſita ſic conſtruitur: Sint G H, G L normales, & producatur L G ad F, ita ut G F ſit $= a$; fiat F M parallela ipſi G H, ſumpta ad libitum G K $= m$, accipiatur E D (in priore figura) $aa : m$, & fiat rectangulum F H $=$ different. ſpatiorum $a\surd(2aa - mm)$ & $2\surd 2$ ſpat. hyperb. E A B; hoc facto producatur M H, quæ parallelæ K I occurrat in I, erit punctum occurſus I in curva quæſita L I.

TAB. LXXIV. *Fig.* 168. & 169.

LECTIO QUADRAGESIMA SEXTA.

De curvitate radii ſolaris vel viſivi, per medium inæqualiter denſum tranſeuntis.

NOtum eſt, & experientia conſtat, quod radius ſolaris, vel viſivus, procedat in linea recta, ſi medium per quod tranſit eſt uniformiter denſum. Si vero idem radius ex hoc medio incidat in aliud magis vel minus denſum, experientia oſtendit radium in ipſo incidentiæ puncto a directione viæ inceptæ declinare & rumpi ad perpendicularem, ſi medium in quod

Digitized by Google

quod incidit eſt denſius; ſed a perpendiculari, ſi rarius: hoc eſt, ſi radius CB a medio ABD incidat in aliud medium denſitate a priori diverſum ABF; radius incidens non ſecundum rectam CBG procedet, ſed ſecundum CBE fractam in puncto B; ita ut BE accedat magis ad perpendicularem BF, ſi medium ABF eſt denſius medio ABD, ſed ab eadem recedat, ſi medium ABF eſt rarius medio ABD. Supponemus nunc, quod Dnus. HUGENIUS in Tractatu ſuo *De lumine* demonſtravit, nempe ſinum anguli incidentiæ & ſinum anguli refractionis eſſe in reciproca ratione denſitatum mediorum; id eſt, ſumptis CB, BE æqualibus, & demiſſis a punctis C, E perpendicularibus CD, EF, denſitatem medii ABD eſſe ad denſitatem medii ABF ut EF ad CD. Liquet igitur ex his omnibus, quod radius Solis, tranſiens per Atmoſphæram noſtram aëream, vel per aliud medium inæqualiter denſum, recta linea non ſit; medium quippe cum in ſingulis altitudinibus denſitatem mutet, neceſſario radium in ſingulis punctis frangit; ita ut radius perfectam curvaturam induat. Suppoſita itaque & cognita ratione denſitatum medii, quæritur natura curvaturæ radii? Sit ABE medium, cujus denſitates ſint in ratione applicatarum curvæ GHIKD; LB radius incidens ex medio uniformiter denſo ABL, cujus denſitas exprimitur per rectam GB, primam applicatam curvæ GHIKD; BSF radius in curvam formatus, cujus natura ſic invenitur: Per principium Dioptricum a Dno. HUGENIO demonſtratum, HN eſt ad IO ut ſinus anguli ZRS [RSX] ad ſinum anguli TRV, & IO eſt ad KP ut ſinus anguli $\alpha S\beta$ [$S\beta\gamma$] ad ſinum anguli RSX; ergo perturbate, HN eſt ad KP, ut ſinus anguli $S\beta\gamma$ ad ſinum anguli TRV, & ſic de omnibus reliquis. Eo itaque reductum eſt Problema, ut inveniatur curva BF, cujus ſinus inclinationis ad perpendicularem ſint reciproce ut ordinatim applicatæ curvæ datæ GHIKD.

TAB. LXXIV. *Fig.* 170.

TAB. LXXIV. *Fig.* 171.

Sit ergo BN $= x$, NH $= z$, NR $= y$; DE, quæ conſtans & ad libitum aſſumta eſt, $= a$; ſint Rr, Ff æquales; quia itaque HN debet eſſe ad DE, ut ſinus anguli WFX ad ſinum anguli TRV, vel ut ſinus anguli MFf ad ſinum anguli ZRr, TAB. LXXIV. *Fig.* 172.

id eſt [ob $Ff = Rr$] ut Mf ad Zr; id eſt, ex rationibus applicatæ EF ad tangentem in F, & tangentis in R ad applicatam RN. Quoniam autem ratio applicatæ EF ad tangentem in F eſt conſtans, ſit EF ad tangentem in F ut b ad a, & [poſitis $RZ = dx$, $Zr = dy$, $Rr = ds$] erit HN ad DE ſeu z ad $a = b : a + ds : dy = bds : ady$; proinde $bds = zdy$ vel $b\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = zdy$; ſumptiſque quadratis $bbdx^2 + bbdy^2 = zzdy^2$, tranſpoſitis tranſponendis & reducta æquatione $bdx = dy\sqrt{(zz - bb)}$, vel $bdx : \sqrt{(zz - bb)} = dy$, ideoque $y =$ integr. $(bdx : \sqrt{(zz - bb)})$; ex quo patet, quod interdum contingere poſſit, ut curva quæſita BRF ſit geometrica, ſi nempe integrale ſumi poteſt ex quantitate $bdx : \sqrt{(zz - bb)}$. Si ex. gr. curva GHD eſt Parabola, erit $zz = ax + bb$, vel generaliter $zz = cx + fc$, & ſic poterit ſumi integrale ex $bdx : \sqrt{(zz - bb)}$, quod monſtrabit curvam quæſitam radii iterum eſſe Parabolam. Si GHD eſt linea recta, erit curva quæſita mechanica, cujus natura dependet à quadratura Hyperbolæ.

Si Problema hoc inverſe proponatur; id eſt, ex data natura curvæ BRF invenire naturam curvæ GHD, id eſt denſitates medii; res multo facilior eſt: nam quotieſcunque curva BRF eſt geometrica, BGHD ſemper etiam erit geometrica: ſiquidem ſupra invenimus $b\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = zdy$, poterit dx reddi in quantitatibus dy, vel vice verſa, per cognitam curvæ naturam; & ſic utrumque æquationis membrum dividi poterit per dx vel dy; adeo ut valor ipſius z in quantitatibus pure finitis & algebraicis haberi poſſit.

Sit ex. gr. BRF Parabola cujus parameter $= b$, erit $x = yy : b$, proinde $dx = 2ydy : b$, & $dx^2 = 4yydy^2 : bb$, ideoque $b\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = bdy\sqrt{(4yy : bb + 1)} = zdy$, & reducta æquatione $4yy + bb = zz$; ponatur loco $4yy$ ejus valor $4bx$, provenit $4bx + bb = zz$; quæ æquatio oſtendit curvam GHD eſſe Parabolam.

Digitized by Google

N°. CXLIX

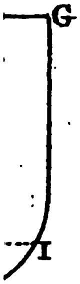


Fig. 165.

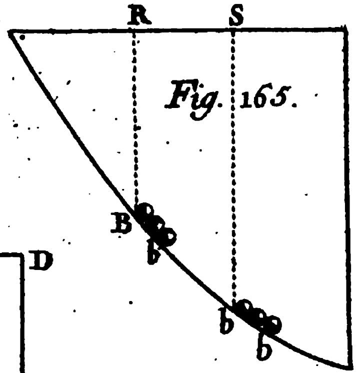


Fig. 168.

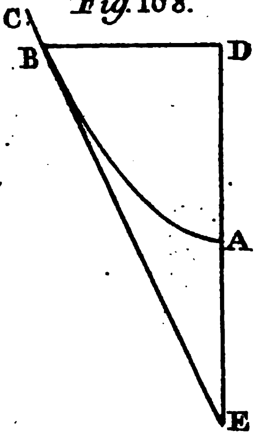


Fig. 169.

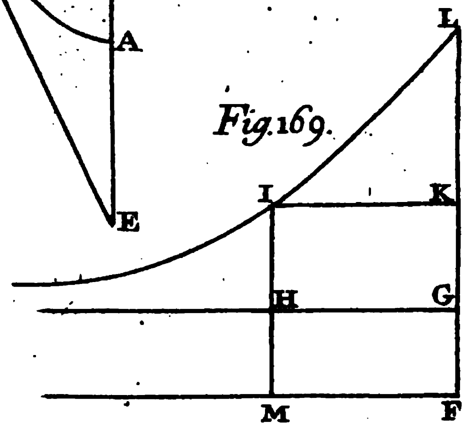


Fig. 170.

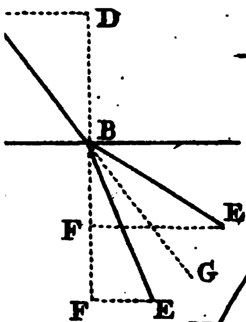
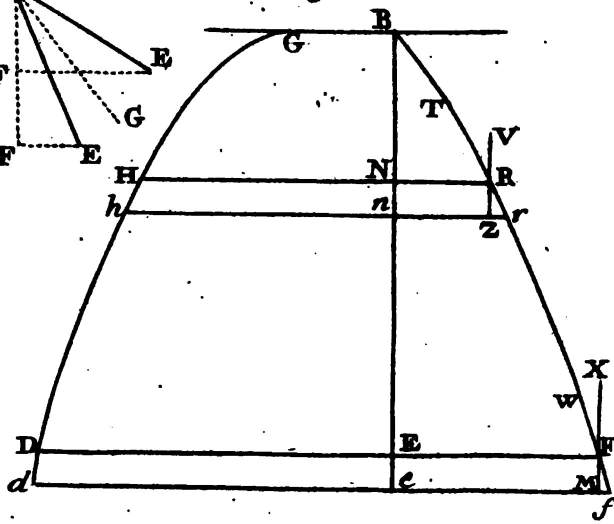


Fig. 172.





Digitized by Google

LECTIO QUADRAGESIMA SEPTIMA.

De Quadratura & Rectificatione univerſali ſpatiorum & curvarum per ſeries infinitas.

OStenſum eſt in Calculo integralium *, quod cujuſcunque ſpatii vel curvæ, quorum differentiale exprimitur per quantitatem, quæ producitur ex multiplicatione differentialis quantitatis abſolutæ per abſolutam, vel per abſolutam ad quamcunque poteſtatem elevatam, haberi poſſit quadratura vel rectificatio. Eſt enim integrale $cx^{c-1}dx\sqrt[a]{(x^c+f)} = \frac{a}{a+1}(x^c+f)\sqrt[a]{(x^c+f)}$. Ex eodem etiam Calculo patet, quod etiamſi differentiale ſpatii vel curvæ exprimatur per quantitatem quæ non producitur ex multiplicatione differentialis quantitatis abſolutæ per abſolutam, vel per abſolutam ad quamvis poteſtatem elevatam, nihilominus tamen interdum quadratura vel rectificatio innoteſcere poſſit. Exemplum ibi attulimus quantitatis $x^b dx\sqrt{(a+x)}$, cujus datur integrale †, ut ut ipſa quantitas non proveniat ex multiplicatione differentialis quantitatis abſolutæ per abſolutam, vel per eandem ad quamcunque poteſtatem elevatam: mentionem autem ibidem non fecimus [licet id directe concludere potuiſſemus] quod integrale admittat generalis quantitas $x^{c-1+mc}dx\sqrt[a]{(x^c+f)}$, quæ nempe producitur ex multiplicatione differentialis quantitatis abſolutæ per abſolutam ad quamcunque potentiam elevatam, & inſuper per x elevatum ad poteſtatem quandam mc, quæ eſt multipla poteſtatis c. Cujus demonſtrationem, quia omiſimus, nunc adjungemus. Primo demonſtrari poteſt, eodem modo quo demonſtratum in Calculo integralium quantitatem $x^b dx\sqrt{(a+x)}$ admittere integrale; nempe per additionem novarum quantitatum: dein aliter ita demonſtramus: ſit $\sqrt[a]{(x^c+f)} = y$, erit

x^c

* pag. 388. † pag. 390.

$x^c + f = y^a$ & $x^c = y^a - f$; eorumque differentialia $cx^{c-1}dx = ay^{a-1}dy$, vel $x^{c-1}dx = \frac{a}{c}y^{a-1}dy$; quia autem $x^c = y^a - f$, erit $x^{mc} = (y^a - f)^m$, ideoque productum x^{mc} in $x^{c-1}dx$, erit æquale producto $(y^a - f)^m$ in $\frac{a}{c}y^{a-1}dy$; hoc eſt $x^{c-1+mc}dx = \frac{a}{c}y^{a-1}dy\,(y^a - f)^m$; multiplicetur prius membrum per $\sqrt[a]{(x^c+f)}$ & poſterius per y, & habebitur $x^{c-1+mc}dx\sqrt[a]{(x^c+f)} = \frac{a}{c}y^a dy\,(y^a - f)^m$. Quoniam vero m ſupponitur numerus integer, patet quod integrale quantitatis $\frac{a}{c}y^a dy\,(y^a - f)^m$ per partes haberi poſſit; ideoque etiam ſubſtituto valore ipſius y, habebitur integrale quantitatis propoſitæ $x^{c-1+mc}dx\sqrt[a]{(x^c+f)}$. *Q. E. D.*

Ex his liquet, quod Dn. GREGORI per ſuas ſeries abrumpentes demonſtravit, quod ſcilicet quantitatis $x^n dx\sqrt[a]{(x^c+f)}$ integrale haberi poſſit, tunc cum $(n+1):c$ eſt numerus integer. In noſtra enim expreſſione $c-1+mc$ eſt $=n$, cui ſi addatur unitas provenit $c+mc = n+1$, quod ſi dividatur per c erit $(n+1):c = (c+mc):c = 1+m =$ numero integro: ergo &c.

Sic itaque abſque ſeriebus idem præſtitimus quod Dn. GREGORI, qui antequam ad integrale perveniſſet, neceſſario quantitatem differentialem in ſeries convertere debebat. Quod ſpectat generalem expreſſionem Dni. GREGORI quantitatis $ax^n dx\,(bx^c+f)^m$, in qua littera n quamcunque poteſtatem denotat, ſive $(n+1):c$ ſit numerus integer ſive non integer; patet interim, ſi m eſt numerus integer, nullam difficultatem eſſe in ſumendo integrali quantitatis $ax^n dx\,(bx^c+f)^m$; ſi vero ſit numerus fractus, integrale ad imitationem Dni.

GRE-

Digitized by Google

GREGORII exhibebimus per Series infinitas. In anteceſſum autem demonſtrandum eſt ſequens

LEMMA. Si ſint duæ Series figuratæ immediate ſibi ſubſequentes, & ſit ubique ſumma terminorum primæ ad totidem maximo æqualium ut 1 ad r, erit & ubique ſumma terminorum ſecundæ ad totidem maximo æqualium ut 1 ad $r+1$.

$$n\left\{\begin{array}{cc} a & o \\ b & f \\ c & g \\ d & h \\ e & i \\ & k \end{array}\right.$$

Demonſtratio: Sit a, b, c, d, e, &c. ſeries quæcunque figurata cujus numerus terminorum ſit n, & ſeries ſubſequens o, f, g, h, i, k. Eſt per naturam ſerierum figuratarum, & per hypotheſin, $k+i+h+g+f+o=\frac{ne}{r}+\frac{(n-1)d}{r}+\frac{(n-2)c}{r}+\frac{(n-3)b}{r}+\frac{(n-n+1)a}{r}=$ [connexis correſpondentibus] $\frac{n(e+d+c+b+a)}{r}$. [per naturam ſerierum] $\frac{nk}{r}$, $\frac{-i-h-g-f-o}{r}$, ideoque multiplicato utroque per r, erit $rk+r(i+h+g+f+o)=nk-i-h-g-f-o$, & reducta æquatione invenitur $nk-rk=(r+1)\times(i+h+g+f+o)$, dividatur utrumque per $r+1$, addaturque dein utrique k, habebitur $\frac{(n+1)}{r+1}k=k+i+h+g+f+o$ &c. *Q. E. D.*

COROLL: Liquet exinde cujuslibet Seriei figuratæ quamlibet ſummam terminorum habere ad totidem maximo æqualium rationem conſtantem.

Series enim unitatum, quæ eſt prima omnium figuratarum, habet hanc proprietatem requiſitam; ſequitur itaque ex demonſtratis ſecundam ſeriem eandem proprietatem habere, & ex ſecunda demonſtratur tertiam, ex tertia quartam, ex quarta quintam &c: & ita de ceteris. *Q. E. D.*

LECTIO QUADRAGESIMA OCTAVA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

De quadraturis & rectificationibus per Series infinitas. Series exprimens binomium ad potentiam indeterminatam elevatum.

His prædemonſtratis, quantitas propoſita differentialis $ax^n dx\,(bx^c+f)^m$ convertenda eſt in Seriem, ex cujus terminis ſingulis integrale haberi poteſt; quod aliam Seriem progenerat, cujus ſumma æqualis eſt integr. $ax^n dx\,(bx^c+f)^m$. Quomodo autem invenienda ſit Series æqualis $ax^n dx\,(bx^c+f)^m$ id hoc modo peragitur. Notum eſt, quod numeri caracteriſtici cujuſdam binomii ad certam quandam dimenſionem elevati ſint numeri laterales eodem dimenſionis ordine Serierum figuratarum verticaliter poſitarum: ut ſi A B C D E &c.

		A	B	C	D	E
F	0	1	0	0	0	0
G	1	1	1	0	0	0
H	2	1	2	1	0	0
I	3	1	3	3	1	0
K	4	1	4	6	4	1

ſint Series verticales numerorum ſiguratorum, quarum prima A eſt Series unitatum, ſecunda B Series numerorum naturalium, tertia C Series numerorum trigonalium, quarta D pyramidalium, quinta E triangulo-pyramidalium, & ita conſequenter, erunt Series laterales FGHIK Series numerorum caracteriſticorum binomii ad dimenſiones elevati; quarum prima F exponit caracteriſticos ſi dimenſio binomii eſt 0, ſecunda G ſi dimenſio binomii eſt 1, tertia H ſi dimenſio eſt 2, quarta I ſi dimenſio eſt 3, quinta K ſi dimenſio eſt 4 & ſic deinceps. Per numerum caracteriſticum intelligo numerum illum, cum quo quidam terminus binomii ad dimenſionem elevati multiplicatur: Si ex. gr. binomium $p+q$ ad tres dimenſiones elevandum ſit, obſervo trium dimenſionum caracteriſticos,

XLIX.

Fig. 158.

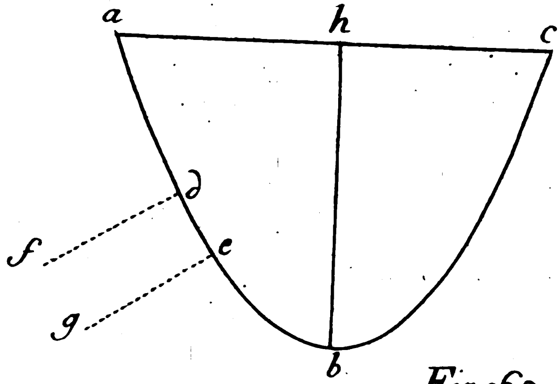
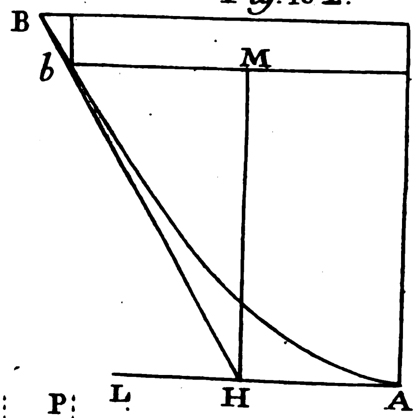


Fig. 162.



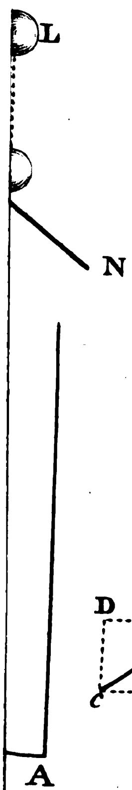
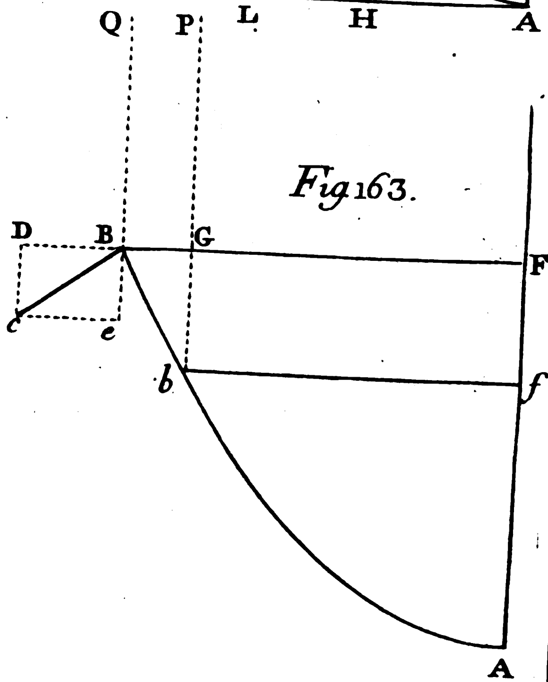


Fig. 163.



riſticos, qui ſunt 1, 3, 3, 1; proinde ſumo $1p^3 + 3ppq + 3pqq + 1q^3$, quod eſt cubus binomii $p+q$, vel $p+q$ ad tres dimenſiones elevatum, & ſic de ceteris. Sic itaque binomium ad quamcunque dimenſionem elevari poteſt, ſi modo caracteriſtici innoteſcant; qui quidem per continuationem Serierum figuratarum facile haberi poſſunt, ſi numerus dimenſionum eſt determinatus. Si vero ſit indeterminatus, id eſt, per litteram algebraïcam exprimatur, caracteriſtici per continuationem Serierum figuratarum inveniri non poſſunt; Series enim nunquam eo pertingunt: ideoque quia ab inventione caracteriſticorum univerſali totum præſens negotium dependet, aliter ſic quærendi ſunt: Sint Series figuratæ A, B, C, D, E, aliquouſque continuatæ, quarum laterales F, G, H, I, K, oſtendunt caracteriſticos dimenſionum 0, 1, 2, 3, 4 &c: dato nunc numero dimenſionum univerſali m, quæruntur ejus caracterici; ad quos inveniendos nihilo alio opus eſt quam ut quærantur ultimi termini Serierum figuratarum A, B, C, D, E, quarum primæ A ultimum terminum eſſe 1, & ſecundæ B eſſe m oppido liquet; tertiæ C ſic invenitur. Ultimus terminus Seriei C, per naturam figuratarum, eſt æqualis ſummæ terminorum Seriei B excepto ultimo; ſumma autem hæc, per præcedens *Lemma*, eſt æqualis $\frac{m \cdot m+1}{1 \cdot 2}$, ideoque ultimus terminus ſeriei C erit $= \frac{m \cdot m+1}{1 \cdot 2} - m = \frac{m \cdot m+1}{1 \cdot 2} + \frac{m.-2}{1 \cdot 2} = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$. Nunc ultimus terminus Seriei D eſt æqualis ſummæ terminorum Seriei C dempto ultimo; Summa autem

		A	B	C	D	E
F	0	1	0	0	0	0
G	1	1	1	0	0	0
H	2	1	2	1	0	0
I	3	1	3	3	1	0
K	4	1	4	6	4	1
L	m	1	m	$\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

tem hæc, per præcedens *Lemma*, eſt æqualis $\frac{m . m - 1 . m + 1}{1 . 2 . 3}$; proinde ultimus terminus Seriei D erit $= \frac{m . m - 1 . m + 1}{1 . 2 . 3} - \frac{m . m - 1}{1 . 2} = \frac{m . m - 1 . m + 1}{1 . 2 . 3} + \frac{m . m - 1 . - 3}{1 . 2 . 3} = \frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3}$. Jam ultimus terminus Seriei E eſt æqualis ſummæ præcedentis D dempto ultimo; ſumma autem hæc, per præcedens *Lemma*, eſt $= \frac{m . m - 1 . m - 2 . m + 1}{1 . 2 . 3 . 4}$, proinde ultimus terminus Seriei E eſt $= \frac{m . m - 1 . m - 2 . m + 1}{1 . 2 . 3 . 4} - \frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3} = \frac{m . m - 1 . m - 2 . m + 1}{1 . 2 . 3 . 4} + \frac{m . m - 1 . m - 2 . - 4}{1 . 2 . 3 . 4} = \frac{m . m - 1 . m - 2 . m - 3}{1 . 2 . 3 . 4}$. Series itaque lateralis L, ſeu caracteriſtici dimenſionis univerſalis m, exprimuntur per hanc Seriem 1, m, $\frac{m . m - 1}{1 . 2}$, $\frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3}$, $\frac{m . m - 1 . m - 2 . m - 3}{1 . 2 . 3 . 4}$, &c: cujus Seriei natura jam patet, & proinde abſque calculo quantumlibet continuari poteſt. Liquet etiam quod, ſi m ſit numerus integer & poſitivus [poteſt enim etiam eſſe fractus, vel negativus, vel utrumque] Series inventa, ſi aliquouſque proceſſerit, tandem abrumpatur, & ultimus terminus nihil evadat; ſi vero m ſit numerus fractus, vel negativus, vel utrumque, Series inventa in infinitum continuabitur. Hæc itaque ſi ad præſens negotium accommodare velimus, & invenire Seriem $= ax^n dx (bx^c + f)^m$, conſidero $bx^c + f$ tanquam binomium ad poteſtatem m elevatum, ideoque ſumpto bx^c pro priori & f pro poſteriori binomii membro, erit quantitas $(bx^c + f)^m = b^m x^{cm} + m b^{m-1} x^{cm - 1c} f^1 + \frac{m . m - 1}{1 . 2} b^{m-2} x^{cm - 2c} f^2 + \frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3} b^{m-3} x^{cm - 3c} f^3$

+

$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} b^{m-4} x^{cm-4c} f^4 +$ &c. Ideoque multiplicatis per $ax^n\ dx$ provenit $ax^n\ dx\ (bx^c+f)^m = (ab^m\ x^{cm+n} + mab^{m-1}\ x^{cm-1c+n} f^1 + \frac{m.\ m-1}{1.\ 2} ab^{m-2}\ x^{cm-2c+n} f^2 + \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3.} ab^{m-3}\ x^{cm-3c+n} f^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} ab^{m-4}\ x^{cm-4c+n} f^4 +$ &c. $) \times dx$; ideoque, ſumptis ſingulorum terminorum integralibus, erit Series

$$\frac{ab^m\ x^{cm+n+1}}{cm+n+1} + \frac{m.\ ab^{m-1}\ x^{cm-1c+n+1} f^1}{cm-1c+n+1}$$
$$+\frac{m.\ m-1.\ ab^{m-2}\ x^{cm-2c+n+1} f^2}{1.\ 2.\ cm-2c+n+1}$$
$$+\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ ab^{m-3}\ x^{cm-3c+n+1} f^3}{1.\ 2.\ 3.\ cm-3c+n+1}$$
$$+\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ ab^{m-4}\ x^{cm-4c+n+1} f^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ cm-4c+n+1} \text{ \&c.} =$$

[diviſis ſingulis terminis per $ab^m\ x^{cm+n-1}$ & multiplicata ſumma ſeriei per $ab^m\ x^{cm+n+1}$] $ab^m\ x^{cm+n+1} \times (\frac{b^{-0}\ x^{-0c}}{cm+n+1}$,

$$+\frac{mb^{-1}\ x^{-1c} f^1}{cm-1c+n+1} + \frac{m.\ m-1.\ b^{-2}\ x^{-2c} f^2}{1.\ 2.\ cm-2c+n+1}$$
$$+\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ b^{-3}\ x^{-3c} f^3}{1.\ 2.\ 3.\ cm-3c+n+1}$$
$$+\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ b^{-4}\ x^{-4c} f^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ cm-4c+n+1} + \text{\&c.}) =$$

int. $ax^n\ dx\ (bx^c+f)^m$ *Q. E. I.*

LECTIO QUADRAGESIMA NONA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

De quadraturis & rectificationibus & de radicum extractionibus per Series infinitas.

QUantitatem nunc $ax^n dx(bx^c+f)^m$ in aliam Seriem convertemus, conſiderando bx^c+f tanquam binomium ad poteſtatem m elevatum; ſed jam f pro priori & bx^c pro poſteriori binomii membro ſumendum eſt; erit itaque quantitas $(bx^c+f)^m = f^m + mf^{m-1}b^1x^{1c} + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}f^{m-2}b^2x^{2c} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}f^{m-3}b^3x^{3c} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.2.3.4}f^{m-4}b^4x^{4c}$ + &c. ideoque multiplicatis per $ax^n dx$ provenit $ax^n dx(bx^c+f)^m = (af^m x^n + amf^{m-1}b^1x^{1c+n} + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}af^{m-2}b^2x^{2c+n} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}af^{m-3}b^3x^{3c+n} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.2.3.4}af^{m-4}b^4x^{4c+n}$ + &c.) $\times dx$. Ideoque, ſumptis ſingulorum terminorum integralibus, erit Series $\frac{af^m x^{n+1}}{n+1} + \frac{maf^{m-1}b^1x^{1c+n+1}}{1c+n+1} + \frac{m.\overline{m-1}.af^{m-2}b^2x^{2c+n+1}}{1.2.\overline{2c+n+1}} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.af^{m-3}b^3x^{3c+n+1}}{1.2.3.\overline{3c+n+1}} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.af^{m-4}b^4x^{4c+n+1}}{1.2.3.4.\overline{4c+n+1}}$ &c. = [diviſis ſingulis terminis per $af^m x^{n+1}$ & multiplicata ſumma Seriei per $af^m x^{n+1}$] $af^m x^{n+1} \times (\frac{b^0x^{0c}}{n+1} + \frac{m.f^{-1}b^1x^{1c}}{1c+n+1}$

✠

$+\frac{m.\ m-1.\ f^{-2}\ b^2 x^{2c}}{1.\ 2.\ 2c+n+1}+\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ f^{-3} b^3 x^{3c}}{1.\ 2.\ 3.\ 3c+n+1}$
$+\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ f^{-4}\ b^4 x^{4c}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 4c+n+1}+\&c.\ )=$ int: $ax^n\,dx$ $(bx^c+f)^m$. Hæc itaque Series, quoniam ejus terminorum denominatores ſimpliciores ſunt quam præcedentis eidem præferri poterit.

Quomodo hæc methodus ad alia integralia ſumenda applicari poſſit nunc oſtendendum eſt. Si quantitas propoſita plura quam duo membra habet, primum, vel quodlibet aliud, conſiderandum eſt tanquam prius, & omnia reliqua ſimul ſumpta tanquam poſterius binomii membrum; & alias procedendum eſt ut docuimus. Exemplum nobis eſto hæc quantitas $ax^n dx(bx^c+gx^h+f)^m$, in qua tria membra reperiuntur, proinde conſidero bx^c+gx^h+f tanquam binomium, cujus primum membrum eſt f, & poſterius bx^c+gx^h, ſic itaque quantitas $(bx^c+gx^h+f)^m$ erit $=f^m+mf^{m-1}\ (bx^c+gx^h)^1$ $+\frac{m.m-1}{1.\ 2}f^{m-2}\ (bx^c+gx^h)^2+\frac{m.m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3}f^{m-3}$ $(bx^c+gx^h)^3+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}f^{m-4}(bx^c+gx^h)^4$, $+\&c.$ Multiplicatis per $ax^n\,dx$ provenit $ax^n\ dx\ (bx^c+gx^h+f)^m$ $=(af^m\ x^n+maf^{m-1}\ x^n\,(bx^c+gx^h)^1+\frac{m.\ m-1}{1.\ 2}af^{m-2}$ $x^n\,(bx^c+gx^h)^2+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3.}af^{m-3}\ x^n\,(bx^c$ $+gx^h)^3\ \&c.\ )\times dx$; quoniam itaque bx^c+gx^h ſemper ad poteſtatem numero integro expreſſam elevatur, patet ex ſingulis terminis hujus Seriei integrale haberi poſſe. Eodem modo proceditur, ſi quantitas propoſita quatuor, quinque, aut quantumlibet membra habeat: ſemper enim unum pro priori & reliqua ſimul ſumpta pro poſteriori binomii membro ſumenda ſunt; quibus

quibus in Seriem converſis, poterit ſemper ex ſingulis terminis haberi integrale, quæ aliam Seriem conſtituunt, cujus ſumma æquatur integrali quæſito quantitatis propoſitæ. Concludimus itaque ex his, quod cujuſcunque ſpatii quadratura & cujuſcunque curvæ rectificatio per Seriem quandam, ope noſtræ methodi, exhibere poſſimus.

Hac occaſione non abs re alienum erit, ſi oſtenderimus quomodo, per eandem methodum, numeri irrationales exprimi poſſint per Series infinitas numerorum rationalium. Numerus enim propoſitus, ex quo radix quæcunque extrahenda eſt, dividatur in duas partes, quarum una radicem habeat, & pro priori binomii membro, altera vero pars pro poſteriori ponatur, & dein, modo conſueto, ſecundum caracteriſticos 1, m, $\frac{m.\,m-1}{1.\,2}$, $\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.}$ &c. binomium ad potentiam m [m ſemper = eſt unitati diviſæ per numerum radicis extrahendæ] elevetur, quod Seriem generabit, cujus ſinguli termini ſunt rationales, eorumque ſumma æqualis numero propoſito irrationali. Sic, ſi radix quadrata ſit extrahenda ex 2; pono $2 = 1 + 1$, quod eſt binomium, cujus prius membrum radicem habet; verum m hoc in caſu eſt $= \frac{1}{2}$, proinde ſecundum caracteriſticos invenitur $\sqrt{2} = 1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.\,1^{\frac{1}{2}-1}\,1^{1} + \frac{\frac{1}{2}.\,\frac{1}{2}-1.\,1^{\frac{1}{2}-2}.\,1^{2}}{1.\,2} + \frac{\frac{1}{2}.\,\frac{1}{2}-1.\,\frac{1}{2}-2.\,1^{\frac{1}{2}-3}.\,1^{3}}{1.\,2.\,3} + \frac{\frac{1}{2}.\,\frac{1}{2}-1.\,\frac{1}{2}-2.\,\frac{1}{2}-3.\,1^{\frac{1}{2}-4}.\,1^{4}}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{\frac{1}{2}.\,\frac{1}{2}-1.\,\frac{1}{2}-2.\,\frac{1}{2}-3.\,\frac{1}{2}-4.\,1^{\frac{1}{2}-5}.\,1^{5}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$ &c. quæ Series ſi digeratur, producit $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{-1}{1.\,2.\,4} + \frac{-1.\,-3}{1.\,2.\,3.\,8} + \frac{-1.\,-3.\,-5}{1.\,2.\,3.\,4.\,16}$ &c. Eodem modo ſi radix cubica ſit extrahenda ex 2, erit $\sqrt[3]{2} = 1^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}.\,1^{\frac{1}{3}-1}.\,1^{1} + \frac{\frac{1}{3}.\,\frac{1}{3}-1.\,1^{\frac{1}{3}-2}.\,1^{2}}{1.\,2}$

$+ \frac{1}{3}.$

$$+ \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1.\frac{1}{3}-2.1^{\frac{1}{3}-3}.1^3}{1.2.3} + \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1.\frac{1}{3}-2.\frac{1}{3}-3.1^{\frac{1}{3}-4}.1^4}{1.2.3.4}$$

&c. vel reducta ſerie provenit $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{-2}{1.2.9} + \frac{-2.-5}{1.2.3.27} + \frac{-2.-5.-8}{1.2.3.4.81}$ &c. Non aliter procedendum eſt cum extractione radicum aliorum numerorum.

LECTIO QUINQUAGESIMA.

De Extractione Radicum numerorum irrationalium per Series infinitas, modo diverſo a præcedenti.

IN præcedentibus oſtenſum eſt, quomodo per elevationem binomii ad poteſtatem litteralem, vel univerſalem, radices quæque numerorum ſurdorum per Series exprimi poſſint: Non injucundum fore puto, ſi, ob materiæ affinitatem, oſtenderimus quo pacto numerorum irrationalium radices exprimi poſſint, per alias Series inventas ex occaſione methodi approximandi Dni. ROOLE in *Ephemer. Societatis Regiæ* Pariſ. menſ. Mart. *1692*, traditæ. Sit a numerus quicunque radicis integer; non neceſſe eſt ut ſit maximus, ut vult Dn. ROOLE, & ſit b reſiduum extractionis. Si itaque primo radix quadrata ſit extrahenda; habebitur hæc æquatio $xx = aa + b$, ubi $aa + b$ eſt numerus datus, qui dividitur in quadratum aa & reſiduum b: Ideoque x erit æqualis numero ſurdo $\sqrt{(aa+b)}$, cujus tamen valorem per Seriem convergentem determinabimus, quæ dein mutari poterit in Seriem continuam, cujus nempe ſumma oſtendit verum valorem. Sit $x = a + z$, erit xx, id eſt $aa + b = aa + 2az + zz$, ideoque $b = 2az + zz$; per diviſionem itaque invenitur $z = b : (2a + z)$. Nunc, in fractione $b : (2a + z)$ poni poteſt pro z qualiſcunque numerus, qui ad diviſionem commodiſſimus æſtimatur [rurſus

Digitized by Google

enim non opus eſt, ut ſecundum Dn. Roole ponatur $z = 0$, vel $= 1$: verum quidem eſt, quod per ejus poſitionem interdum citius approximetur ad radicem quæſitam; præſtat autem ut facilitas & commoditas præ brevitate ſeligatur, ſi ea haberi poterit]; quia autem hic numerus datus in litteris proponitur, ſtatuatur $z = 0$, ideoque erit $b : (2a + z) = b : 2a = z$. Quoniam vero $z > 0$, erit $b : 2a > z$; ſi itaque in fractione $b : (2a + z)$, loco z ponatur $b : 2a$, provenit $2ab : (4aa + b) < z$; poſito ergo in fractione $b : (2a + z)$, loco z, $2ab : (4aa + b)$, habebitur $(4aab + bb) : (8a^3 + 4ab) > z$. Si nunc in fractione $b : (2a + z)$ loco z ponatur $(4aab + bb) : (8a^3 + 4ab)$, erit $(8a^3b + 4abb) : (16a^4 + 12aab + bb) < z$. Sic itaque alternative ſigna majoritatis & minoritatis mutantur, & operatio ſi in infinitum continuetur, exceſſus vel defectus valoris z omnino evaneſcit. Series autem in ordinem redacta eſt hæc:

$$\frac{b}{2a}, \quad \frac{2ab}{4aa + b}, \quad \frac{4aab + bb}{8a^3 + 4ab}, \quad \frac{8a^3b + 4abb}{16a^4 + 12aab + bb},$$

$$\frac{16a^4b + 12aabb + b^3}{32a^5 + 32a^3b + 6abb}, \quad \frac{32a^5b + 32a^3bb + 6ab^3}{64a^6 + 80a^4b + 24aabb + b^3}, \text{ \&c.}$$

quæ talem legem obſervat, ut numerator cujuſque termini ſit æqualis denominatori termini præcedentis multiplicato per b, denominator autem ſit æqualis denominatori termini præcedentis multiplicato per $2a$ addito numeratore termini præcedentis; ita ut hæc ſeries quantumlibet nullo negotio continuari poſſit; cujus ſinguli termini impares 1us, 3us, 5us, &c. juſto majores ſunt z, ſed quia decreſcendo magis magiſque ad verum valorem accedunt, erit tandem exceſſus data quavis quantitate minor; e contra termini pares 2us, 4us, 6us, &c. juſto minores ſunt z, quia vero accreſcendo vero valori appropinquant, erit pariter defectus data quavis quantitate minor. Infiniteſimus terminus itaque hujus Seriei erit valor ipſius z, qui quæritur, cui ſi addatur a, habebitur $a + z = x = \sqrt{(aa + b)}$. Si hanc Seriem convergentem velimus convertere in continuam, primus Seriei terminus ponendus eſt pro primo, & differentiæ ſubſequentium ſub ſignis contrariis pro ſequentibus; quo facto,

hæc

hæc prodibit Series continua $\frac{b}{2a} - \frac{bb}{2a.(4aa+b)} + \frac{b^3}{(4aa+b).(8a^3+4ab)} - \frac{b^4}{(8a^3+4ab).(16a^4+12aab+bb)}$ &c. $= z$; ideoque ſi ſummæ Seriei addatur a, habebitur $a + z = x = \sqrt{(aa+b)}$. Exemplum unum in numeris addidiſſe ſufficiat: Quæritur numerus $= \sqrt{2}$; in hunc finem ponatur $a = 1$, ideoque $aa = 1$, & $b = 1$: Series itaque convergens $\frac{b}{2a}$, $\frac{2ab}{4aa+b}$, $\frac{4aab+bb}{8a^3+4ab}$, $\frac{8a^3b+4abb}{16a^4+12aab+bb}$ &c. exprimetur per hanc $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{29}$, $\frac{29}{70}$, $\frac{70}{169}$, &c. cujus infiniteſimus terminus plus unitate erit $= \sqrt{2}$: Series autem continua $\frac{b}{2a} - \frac{bb}{2a.(4aa+b)} + \frac{b^3}{(4aa+b).(8a^3+4ab)} - \frac{b^4}{(8a^3+4ab).(16a^4+12aab-bb)}$ &c. erit æqualis huic $\frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.12} - \frac{1}{12.29} + \frac{1}{29.70}$ &c. cui ſi addatur 1, proveniet $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.12} - \frac{1}{12.29} +$ &c. $= \sqrt{2}$. Quia itaque per methodum in Lect. præced. invenimus $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{1.2.4} + \frac{1.3}{1.2.3.8} - \frac{1.3.5}{1.2.3.4.16}$ &c. oportet ut duæ iſtæ Series ſint æquales; proinde, demptis æqualibus $1 + \frac{1}{2}$ & inverſis ſignis, erunt Series remanentes adhuc æquales, id eſt, $\frac{1}{2.5} - \frac{1}{5.12} + \frac{1}{12.29} - \frac{1}{29.70}$ &c. $= \frac{1}{1.2.4} - \frac{1.3}{1.2.3.8} + \frac{1.3.5}{1.2.3.4.16} - \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5.32}$ &c. Hoc anſam præbere poteſt iis quibus plus vacat, penitius in naturam harum Serierum inquirendi.

Digitized by Google

LECTIO QUINQUAGESIMA PRIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti; De Radicum extractione per Series infinitas.

ANtequam ulterius pergamus, oſtendendum eſt, quod termini Serierum convergentium, quas dedimus & daturi ſumus, non ſolum ad optatam radicem magis magiſque accedant, ſed etiam eouſque continuari poſſint, ut tandem exceſſus vel defectus data quavis quantitate minor evadat; adeoque terminus infiniteſimus ſit neceſſario radici quæſitæ æqualis. Quod per deductionem ad abſurdum facile ſic demonſtramus. Si enim dicatur exceſſum vel defectum non data quantitate minorem evadere, oportet ut ſi termini Seriei *in* infinitum continuantur, exceſſus vel defectus ſemper maneat æqualis; ſecus minor evaderet ultima quantitate, contra hypotheſin adverſarii: verum ſi exceſſus vel defectus ſemper manet æqualis, oportet ut, per ſubſtitutionem, loco z eadem quantitas proveniat quæ ſubſtituta fuit; ſed quæ ſubſtituta fuit loco z eſt ipſe valor ipſius z quæſitus, & ſic exceſſus vel defectus plane nihil eſſet, iterum contra hypotheſin adverſarii. Demonſtratio per litteras, in Serie convergente in præced: explicata, magis patet. Si dicatur infiniteſimum terminum non eſſe æqualem radici quæſitæ z; ſit ergo major, & ponatur æqualis $z+m$: infiniteſimus itaque terminus eſt $z+m$, major quam z; proinde ſi loco z ſubſtituatur in fractione $b:(2a+z)$, provenit pro termino ſequenti $b:(2a+z+m)$, qui erit minor quam z; ſi itaque & hic ſubſtituatur in fractione $b:(2a+z)$, provenit terminus conſecutivus $(2ab+zb+mb):(4aa+2az+2am+b)$, qui rurſus erit major quam z; quia itaque, juxta adverſarium, termini infiniteſimi amplius haud accedunt ad radicem quæſitam; proinde exceſſus vel defectus æqualis manet; oportet ut terminus infiniteſimus

z

$z+m$ ſit $=$ termino ſubſequenti $(2ab+zb+mb):(4aa+2az+2am+b)$; uterque enim major eſt quam z. Reducta itaque æquatione habetur $4aaz+2azz+4amz+bz+4aam+2amm+bm=2ab+zb+mb$; deletis utrobique æqualibus, & diviſis per $2a$, erit $2az+zz+2mz+2am+mm=b$; verum in Lect. præced. habetur $b=2az+zz$, ergo $2az+zz=2az+zz+2mz+2am+mm$, ideoque $2mz+2am+mm=0$; ſequitur hinc quod ſit $m=0$, & infiniteſimus terminus $z+m=z+0=z$; ergo non eſt major quam z, contra quod aſſerit adverſarius, nec etiam minor eſſe poteſt, alias per ſubſtitutionem major evaderet, contra quod modo demonſtravimus.

Ex his, quæ demonſtravimus, inferri poteſt, quod methodus Dni. ROOLE approximandi ad radices ultra quadraticas non quadrat; in extrahendis enim radicibus cubicis & altiorum dimenſionum, non ſolum ad veram radicem non appropinquat, ut exceſſus vel defectus ſit tandem data qualibet quantitate minor; ſed etiam poſt operationes aliquas, interdum ab initio, a vera radice magis ac magis recedit; tantum abeſt ut ad illam accedat. Ratio hujus eſt, quia quaſdam quantitates negligit, quæ minime negligendæ ſunt.

Exemplum nobis eſto, radicis cubicæ extrahendæ ex quantitate a^3+b. Dn. ROOLE hanc æquationem ponit $x^3=a^3+b$, proinde $\sqrt[3]{(a^3+b)}=x$, quam hoc modo approximare contendit; ſupponit $x=z+a$, ideoque x^3, id eſt, $a^3+b=z^3+3zza+3zaa+a^3$ & $b=z^3+3zza+3zaa$; nunc tollit z^3 [ſed perperam] & habet $b=3zza+3zaa$, & diviſa utraque per $3az+3aa$ facit $z=b:(3az+3aa)$; cum reliquis procedit ut in radicibus quadraticis extrahendis. Dico autem hoc modo non niſi ad certum uſque terminum appropinquari ad radicem quæſitam. Evidens enim eſt, quod ſi operatio in infinitum continuetur, terminus infiniteſimus ſit æqualis radici æquationis hujus quadratæ $b=3zza+3zaa$, & non radici æquationis cubicæ $b=z^3+3zza+3zaa$. Quia autem hæ æquationes diverſas habent radices; patet

quod cum radici illius appropinquat, ſimul ad radicem hujus quæſitam accedere nunquam poſſit, ut error inſenſibilis evadat. Hoc luculentius patebit per aliquod exemplum. Radix cubica ex 8, eſt $= 2$: ſed ſupponamus radicem eſſe ignotam, & quæramus illam per modum approximandi Dni. ROOLE: Sit itaque $8 = a^3 + b$, $a = 1$ & $b = 7$; oporteret itaque ut per ſubſtitutionem continuam ſemper magis accederet ad valorem verum ipſius z, qui in hoc exemplo eſt $= 1$, & quidem, ut Dn. ROOLE prætendit, alternative excedendo & deficiendo. Formula itaque illius $z = b : (3az + 3aa)$, in hoc exemplo hæc eſt $z = 7 : (2z + 3)$; ſi ergo in hac fractione loco z ponatur o, provenit $\frac{7}{3} > z$; ideoque ſubſtituto loco z, $\frac{7}{3}$, erit $\frac{7}{10} < z$; & ſubſtituto $\frac{7}{10}$ erit $\frac{70}{31} > z$; ſi hæc ſubſtitutio continuetur, provenit hæc Series convergens $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{70}{31}$, $\frac{119}{121}$, $\frac{847}{720}$, $\frac{1680}{1567}$, $\frac{10969}{9741}$, $\frac{22729}{20710}$, &c. in qua termini impares 1us, 3us, 5us, 7us, &c. ſunt majores quam z, termini pares autem 2us, 4us, 6us, 8us, &c. ſunt minores quam z. Verum ſextus terminus jam major eſt quam unitas; & ceteri omnes, tam pares, quam impares, majores ſunt quam unitas; ideoque termini pares non ſolum non accedunt ad numerum quæſitum qui eſt 1, ſed prorſus ab eodem recedunt; ideoque termini impares, qui majores ſunt quam pares, nunquam convergent ad unitatem; etiamſi Series in infinitum continuetur.

Si nunc in formula $z = 7 : (3z + 3)$, loco z ſubſtituatur, 1, & ſubſtitutio continuetur, habebitur hæc Series $\frac{7}{6}$, $\frac{14}{13}$, $\frac{91}{81}$, $\frac{119}{172}$ &c. in qua termini pares nequidem ab initio unitati approximantur, ſed e contra quo plus continuatur Series eo magis ab unitate recedunt.

LECTIO

LECTIO QUINQUAGESIMA SECUNDA.

Continuatio ejuſdem argumenti. De Radicum extractionibus per Series infinitas.

POſtquam vidimus methodum approximandi Dni. ROOLE, per neglectionem dimenſionum quadraticam tranſcendentium, adhiberi non poſſe, ſi ad radicem quæſitam eouſque accedere velimus, ut tandem exceſſus vel defectus data quavis quantitate aſſignabili minor evadat: oſtendemus nunc modum, quo id obtineri poſſit, & quidem generaliter in omnibus radicibus extrahendis. Regula pro hoc talis eſt: Poſtquam æquatio propoſita $x^p = a^p + b$ converſa eſt in hanc $z^p + pz^{p-1}a + \&c. = b$, termini in quibus z ad plures quam duas dimenſiones aſcendit neutiquam omittendi ſunt, ſed tota æquatio dividenda eſt per $z^{p-1} + pz^{p-2}a + \&c$; quo facto proveniet hæc æquatio $z = b : (z^{p-1} + pz^{p-2}a + \&c)$. Nunc loco z in fractione ſubſtitui debet o, vel quicunque numerus; & quod inde provenit iterum ſubſtituendum eſt loco z in fractione, quæ ſubſtitutio ſi ulterius continuetur, fractio ſemper propius accedit ad radicem quæſitam, & ſic haberi poteſt Series convergens, cujus terminus infiniteſimus æqualis eſt radici z, cui ſi adjungatur a, habebitur $z + a = x = \sqrt[p]{(a^p + b)}$.

In hac Serie annotandum eſt, quod ſinguli termini alternative excedant verum valorem & ab eodem deficiant; illi qui excedunt appropinquant deſcendendo, alteri qui deficiunt accedunt aſcendendo; ita tamen ut in infinito concurrant, & proinde uterque radici quæſitæ z æqualis evadat. Series iſta convergens facile in continuam convertitur, ponendo primum convergentis terminum pro primo continuæ, & differentias reliquorum convergentis ſub ſignis contrariis pro reliquis continuæ; & ſic ſumma hujus Seriei continuæ erit æqualis ultimo termino Seriei convergentis, & inde æqualis radici quæſitæ z.

Ut

Digitized by Google

Ut exemplum addamus: ſit radix cubica extrahenda ex $a^3 + b$, id eſt, ſit $x^3 = a^3 + b$, & ponatur $x = z + a$, ſeu $z^3 + 3azz + 3aaz = b$, ideoque diviſis per $zz + 3az + 3aa$, habetur $z = b : (zz + 3az + 3aa)$, & non $= b : (3az + 3aa)$. Si nunc in fractione $b : (zz + 3az + 3aa)$; loco z ponatur 0, provenit $b : 3aa$, qui primus eſt Seriei convergentis terminus & juſto major quam z; proinde in eàdem fractione poſito $b : 3aa$ loco z, provenit $9a^4 b : (27a^6 + 9a^3 b + bb)$, qui ſecundus eſt Seriei convergentis terminus & juſto minor quam z. Hoc pacto per continuationem ſubſtitutionis habebitur 3us, 4us, 5us, &c. Operatio quidem in litteris tædioſa, & difficilis eſt: in numeris huic labori parcitur.

Sit ergo radix cubica extrahenda ex 2., ſeu quod idem eſt $x^3 = 1 + 1$, ubi $a = 1$ & $b = 1$, ideoque poſito $x = z + 1$, erit $z^3 + 3zz + 3z = 1$, & $z = 1 : (zz + 3z + 3)$. Sit ergo in fractione $z = 0$, erit $\frac{1}{3}$ primus terminus & juſto major; & poſito $\frac{1}{3}$ loco z, habetur $\frac{9}{37}$ ſecundus terminus, & juſto minor; per ſubſtitutionem tertiam $\frac{(37)^2}{81 + 3 \cdot 9 \cdot 37 + 3 \cdot 379}$ tertius terminus, per ſubſtitutionem quartam

$$\frac{(81 + 3 \cdot 9 \cdot 37 + 3 \cdot 379)^2}{37^4 + 3 \cdot 37^2 \cdot (81 + 3 \cdot 9 \cdot 37 + 3 \cdot 379) + 3(81 + 3 \cdot 9 \cdot 37 + 3 \cdot 379)^2}$$

pro quarto termino, & ita deinceps. Sic verus valor ipſius z ſemper inter duos terminos ſibi immediate ſubſequentes continebitur; ex quibus, ceu ex limitibus, nunquam excedet, ut accidit per Methodum Dni. ROOLE.

Hoc adhuc annotaſſe convenit circa radices extrahendas, quod ſi radix ſit extrahenda, cujus denominatio eſt *numerus* compoſitus, præſtet ut per partes componentes extrahatur. Si ex. gr. extrahenda ſit $\sqrt[6]{}$ ex 2, quæratur primo $\sqrt[3]{}$ ex 2, quæ quam proxime haberi poteſt, & dein ex hac radice cubica inventa extrahatur radix quadrata, & hæc ipſa erit $\sqrt[6]{}$ ipſius 2. Si conducibilius videretur, poſſet prius extrahi radix quadrata ex 2, & dein radix cubica radicis quadratæ erit $\sqrt[6]{}$ quæſita ipſius 2, & ſic in aliis.

LECTIO

Digitized by Google

LECTIO QUINQUAGESIMA TERTIA.

De inveniendis radicibus æquationum per continuam approximationem.

EX iis quæ in præcedentibus dicta ſunt, manifeſte liquet, quod hujuſmodi Series, quæ extrahendis radicibus numerorum inſerviebant, non abſimili modo conſtrui poſſunt, ut non ſolum numerorum ſed, ipſarum æquationum cubicarum, biquadraticarum, vel cujuſcunque generis radicibus ſint æquales. Quoniam autem harum Serierum termini circino & norma conſtrui poſſunt; patet quod idem præſtare poſſimus per continuationem hujus conſtructionis, quod Frater præſtitit ope ſuæ methodi infra explicandæ.

Ut autem ad rem accedamus; modi noſtri nervus conſiſtit in hoc, ut primo cujuſvis æquationis propoſitæ omnes termini in quibus littera incognita reperitur ad unam partem, & terminus pure cognitus ad alteram ponatur; ita ut hæc quantitas pure cognita ſit æqualis omnibus terminis ad alteram poſitis: quo facto, utrumque æquationis membrum per eam quantitatem dividendum eſt, ut ab una parte proveniat x, ab altera vero fractio quædam; id quod ſemper fieri poteſt.

Numerator hujus fractionis erit quantitas pure cognita; in denominatore autem continebuntur quantitates incognitæ, pro quibus ſubſtituta o vel unitate [prout hoc vel illud conducibilius videtur] proveniet alia fractio, quæ in priori fractione [quam ad diſtinctionem generatricem appellare poſſumus, ex illa enim Series generatur] loco incognitæ ſubſtituenda eſt; & ſic proveniet ſecunda fractio quæ radici quæſitæ appropinquat: Hæc denuo in generatrice ſubſtituenda eſt & generabitur tertia, & ſubſtitutio iſta, quomodo in antecedentibus factum eſt, continuanda eſt; & dabit Seriem convergentem, cujus nempe termini magis magiſque ad optatam radicem accedunt, & quidem alternando; id eſt, quivis terminus qui vera radice major

Digitized by Google

eſt, ſubſequentem habet qui eadem minor erit. Interim exceſſus & defectus tandem data quavis aſſignabili quantitate minor eveniet. Series iſta convergens per modum jam ſæpe dictum converti poteſt in Seriem continuam; cujus ſumma æqualis eſt radici quæſitæ.

Proponatur æquatio cubica $x^3 * + px - q = 0$; quæritur hujus æquationis radix x? Per regulas exhibitas ſic operandum eſt. Quia $x^3 * + px - q$ eſt $= 0$, erit $x^3 + px = q$; dividatur utrumque per $xx + p$, ut ab una parte x ſola maneat; & habebitur $x = q : (xx + p)$. Si nunc in fractione generatrice $q : (xx + p)$ ponatur $x = 0$, provenit $q : p$, primus Seriei convergentis terminus, & juſto major quam radix æquationis quæſita x. Subſtituto ergo loco x in generatrice primo termino $q : p$, habebitur $qpp : (qq + p^3)$, ſecundus Seriei terminus & juſto minor quam radix quæſita; qui ſubſtitutus in generatrice producit $q . (qq + p^3)^2 : (qqp^4 + p . (qq + p^3)^2)$, tertius Seriei terminus, & iterum major quam x; per ſubſtitutionem quartam invenitur $q . (qqp^4 + p . (qq + p^3)^2)^2 : (qq . (qq + p^3)^4 + p (qqp^4 + p . (qq + p^3)^2)^2)$ quartus Seriei terminus, qui iterum minor eſt quam radix x; & ſic per ſubſtitutionis continuationem inveniuntur ſequentes Seriei termini. Quæ Series hanc legem obtinet, cujuſvis termini numerator eſt productum quadrati denominatoris præcedentis per q, & denominator eſt aggregatum quadrati numeratoris præcedentis & producti quadrati denominatoris præcedentis per p; & hoc modo Series radicis æquationis numericæ facile continuari poteſt. Sit ex. gr. $x^3 * + 1x - 1 = 0$; erit $p = 1$ & $q = 1$, proinde *primus* Seriei convergentis terminus $\frac{1}{1}$, ſeu 1; *ſecundus* $\frac{1}{2}$, *tertius* $\frac{4}{5}$; *quartus* $\frac{25}{41}$; *quintus* $\frac{(41)^2}{(25)^2 + (41)^2}$; *ſextus* . . . . . .

$$\frac{((25)^2 + (41)^2)^2}{(41)^2 + ((25)^2 + (41)^2)^2}$$; ſic deinceps: in qua Serie termini impares *primus*, *tertius*, *quintus* &c. decreſcunt & majores ſunt quam x, pares vero *ſecundus*, *quartus*, *ſextus* &c. accreſcunt & minores ſunt quam x; ita tamen ut utrobique tandem error imperceptibilis fiat.

Quod

Digitized by Google

Quod hucuſque in æquationibus cubicis factum eſt, in aliis altiorum dimenſionum pariter obſervandum erit; ut ſi habeatur hæc æquatio $x^4 * + pxx + qx - r = 0$; erit $x^4 + pxx + qx = r$, & proinde $x = r : (x^3 + px + q)$; formata nunc fractione generatrice, formari poteſt & Series: poſito enim in illa $x = 0$; erit $r : q$ primus terminus & major radice vera, quo ſubſtituto in generatrice, habebitur $rq^3 : (r^3 + rpqq + q^4)$ ſecundus terminus qui minor eſt quam x; eodem modo, quo prius, inveniuntur per ſubſtitutionem reliqui termini, quæ operatio (ut verum fatear) in litteris admodum prolixa evadit, & quidem eo prolixior quo æquatio plures dimenſiones habet. Interim tamen aliquando in æquationibus numericis expeditior eſt, & non incommode in praxi adhiberi poterit, ſi modo natura Seriei bene obſervetur; tunc enim brevi temporis ſpatio, ope logarithmorum, multi Serierum termini nullo quaſi negotio inveniri poſſunt.

LECTIO QUINQUAGESIMA QUARTA.

De Conſtructione geometrica Problematum ſolidorum & hyperſolidorum per rectas lineas & circulos.

CUm impoſſibile ſit æquationes ſolidas & hyperſolidas, unâ conſtructione, ope circini & regulæ reſolvere; modum hic oſtendemus conſtruendi geometrice earum radices, ope quidem circini & normæ, ſed per conſtructionis alicujus ſeriem, vel potius continuationem, quæ eouſque ad veram radicem appropinquare poteſt, ut tandem error imperceptibilis & data quavis quantitate minor evadat. Interim non abs re erit, ſi in anteceſſum ſummam vel potius valorem quarundam Serierum, quæ huic methodo anſam præbuerunt, perveſtigemus. Quæritur itaque valor hujus Seriei, &c. $\surd(2 + \surd(2 + \surd 2))$, cujus expreſſionis ſenſus hic eſt. Radix quadrata ex 2 additur ad 2, & radix hujus ſummæ iterum ad 2 additur, & ex ag-

gregato hoc radix extracta ad 2 ut ante additur, ex quo rurſus radix extrahenda, & ſic in infinitum continuandum eſt: cujus Seriei valor ita invenitur. Ponatur &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})})} = x$; ergo eorum quadrata $2+$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})} = xx$; tranſponatur 2 ad alteram partem, & habebitur $xx - 2 =$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}$, quæ Series, quia priorem faciem induit, eſt $= x$; provenit ergo hæc æquatio $xx - 2 = x$, vel $xx = x + 2$, quæ reſoluta dat $x = 2$; ergo Series &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})} = 2$. Eodem modo, ſi proponatur Series, &c. $\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{6})})})}$, invenitur æqualis 3, & &c. $\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{12})})})} = 4$, & &c. $\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{20})})})} = 5$, & generaliter Series dupli numeri cujuſque trigonalis eſt æqualis lateri iſtius numeri aucto unitate; ut ex. gr. 15 eſt numerus trigonalis, cujus latus eſt 5, ergo &c. $\sqrt{(30+\sqrt{(30+\sqrt{(30+\sqrt{30})})})} = 6$. Si vero Series proponatur univerſaliter, &c. $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{a})})})}$ invenitur $= \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}+a)}$. Si loco additionis, multiplicetur, ut in hac Serie &c. $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2})})})})}$ in qua radix ex 2 multiplicetur per 2, & radix producti iterum multiplicetur per 2, & ſic conſequenter; valor iſtius Seriei facile ſic invenitur: $x =$ &c. $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2})})})}$; proinde $xx = 2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2})})})}$, & $\frac{1}{2}xx = \sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2})})})} = x$; ex quo concluditur quod &c. $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2})})})} =$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}$, utraque enim æquatur 2. In his Seriebus animadvertendum eſt, quod pro prioribus terminis quicunque alius numerus poni poſſit, abſque ut valor Seriei vel augeatur vel diminuatur, ſi modo poſteriores eidem maneant; Ex. gr. &c. $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(b+\sqrt{c})})})})} =$ &c. $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{a})})})})}$, & &c. $\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{c})})})})} =$ &c. $\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{a})})})})}$. Ratio hujus manifeſta eſt. Si nunc Series quæ conſiſtit diverſis numeris, alternative procedit; qualis hæc &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(3+\sqrt{(2+\sqrt{(3+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})})})}$; valor invenitur ſupponendo Seriem $= x$, & ſumendo quadrata, redigendoque ſemper Se-

riem,

riem ad priorem faciem; ita ut æquatio proveniat inter quantitatem inventam & inter x. Ponatur ergo $x =$ &c. $\surd(2 + \surd(3 + \surd(2 + \surd(3 + \surd(2 + \surd 3)))))$; erit $xx = 2 + \surd(3 + \surd(2 + \surd(3 + \surd 2)))$; proinde $xx - 2 =$ &c. $\surd(3 + \surd(2 + \surd(3 + \surd(2 + \surd 3))))$; quia autem hæc Series priorem faciem nondum induit, ſumatur iterum utriuſque quadratum, & erit $x^4 - 4xx + 4 = 3 +$ &c. $\surd(2 + \surd(3 + \surd 2)) =$ [ob identitatem Seriei cum priori poſita] $3 + x$; reducta itaque æquatione provenit $x^4 - 4xx + 1 = x$, vel $x^4 * - 4xx - x + 1 = 0$; radix itaque hujus æquationis biquadraticæ x conſtrui poteſt per circinum & normam, ope hujus Seriei &c. $\surd(2 + \surd(3 + \surd(2 + \surd 3)))$. Poteſt enim radix extrahi ex 3, & illa addi ad 2, & ex aggregato iterum radix extrahi & addi ad 3, & ſic additio vicibus alternativis in infinitum continuari debet; ita ut tandem radix ex 2 plus illo quod ex radice extracta proxime præcedenti provenit ſit ſenſibiliter $= x$, radici æquationis biquadraticæ $x^4 * - 4xx - x + 1 = 0$. Si vero operatio ſubſiſtat in $\surd(3 +$ &c.$)$, erit x radix alterius cujuſdam æquationis; quæ ita invenitur: ſit $x =$ &c. $\surd(3 + \surd(2 + \surd(3 + \surd(2 + \surd(3 + \surd 2)))))$; ergo $xx = 3 +$ &c. $\surd(2 + \surd(3 + \surd(2 + \surd 3)))$, & $xx - 3 = \surd(2 + \surd(3 + \surd(2 + \surd 3)))$; ſumptiſque iterum quadratis, $x^4 - 6xx + 9 = 2 + \surd(3 + \surd(2 + \surd 3)) =$ [ob identitatem Seriei cum priore poſita] $2 + x$; ergo reducta æquatione $x^4 - 6xx + 7 = x$, vel $x^4 * - 6xx - x + 7 = 0$. Sic itaque per eandem Seriem duarum æquationum radices ſimul conſtrui poſſunt; hoc tamen cum diſcrimine, ut ad approximandum ad radicem prioris æquationis ſubſiſtendum ſit in $\surd(2 +$ &c.$)$, ad approximandum vero ad radicem poſterioris in $\surd(3 +$ &c.$)$.

Si nunc habetur hæc Series, &c. $\surd(2\surd(3\surd(2\surd(3\surd 2))))$; ad æquationem haud difficulter pervenitur. Sit enim $x =$ &c. $\surd(2\surd(3\surd(2\surd 3)))$; ergo $xx = 2\surd(3\surd(2\surd(3\surd 2)))$ & $\frac{1}{2}xx = \surd(3\surd(2\surd(3\surd 2)))$; ideoque $\frac{1}{4}x^4 = 3\surd(2\surd(3\surd(2\surd 3))) =$ [ob identitatem Seriei] $3x$; proinde

$x^4 = 12x$, vel $x^3 = 12$, & $x = \sqrt[3]{12}$. Si ponatur $x = \sqrt{(3\sqrt{(2\sqrt{(3\sqrt{2})})})}$; provenit $x^3 = 18$, vel $x = \sqrt[3]{18}$. Si generaliter ponatur $x = \sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{b})})})}$, habetur $x^3 = aab$ vel $x = \sqrt[3]{aab}$, quæ eſt prima duarum mediarum proportionalium inter a & b. Hinc ſolvitur Problema Deliacum vel duplicatio cubi. Si vero $x = \sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{a})})})}$; erit $x = \sqrt[3]{abb}$, quæ ſecunda eſt duarum mediarum proportionalium inter a & b. Ex his ratio patet approximandi ad radices cubicas cujuſque numeri dati, per circinum & normam, & ſimul ſumendi duas medias proportionales. Si enim a & b ſint numeri dati vel datæ lineæ, erit &c. $\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{b})})})} =$ primæ mediarum proportionalium, & &c. $\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{b})})})})}$ ſecundæ mediarum proportionalium.

Si proponatur Series &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(3+\sqrt{(4+\sqrt{(2+\sqrt{(3+\sqrt{4})})})})})}$; habetur æquatio 8 dimenſionum $x^8 - x^6 + 17x^4 - 8xx - x - 3 = 0$.

Si datur Series &c. $\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(c\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{c})})})})})}$; erit æquatio $x^7 = a^4c$. Hinc ratio patet ſumendi 6 medias proportionales. Si velimus 4 medias proportionales invenire; conſtruatur hæc Series $\sqrt[5]{(aa\sqrt{(b\sqrt[3]{(aa\sqrt{b})})})}$, invenitur enim pro æquatione $x^5 = a^4b$; Series autem hæc conſtrui poteſt ope præcedentium. Ex his, ni fallor, ſatis liquet methodi ſumendarum mediarum proportionalium a *Fratre* in *Actis Lipſienſibus* propoſitæ demonſtratio.

LECTIO QUINQUAGESIMA QUINTA.

Continuatio ejuſdem argumenti. De Conſtructione geometrica Problematum ſolidorum & hyperſolidorum per continuam approximationem.

SI nunc modum conſtruendi Problemata ſolida, cujus in præcedentibus adumbrationem duntaxat dedimus, ad ipſas æquationes ſolidas & hyperſolidas applicare velimus, ita ut illius

illius ope radices harum æquationum, ut ut generaliter propoſitarum, per regulam & circinum poſſimus determinare. Notandum itaque primo, quod ſi valor quarundam hujuſmodi Serierum, in præcedentibus explicatarum, inveniendus ſit per duplicem ſumptionem quadrati, antequam Series ad priſtinam formam redigatur, æquatio proveniat quatuor dimenſionum, quæ inſerviet radicibus determinandis æquationum biquadraticarum. Si quadratum ſumendum eſt ter, antequam Series priorem formam induat, habebit æquatio reſultans 8 dimenſiones, quæ reſolvet radices æquationum quadrato-quadraticarum; & ſic deinceps. Quoniam autem in æquationibus altiorum dimenſionum, ob multitudinem terminorum, res difficilis evadit, non tamen impoſſibilis; Radices ſaltem æquationum biquadraticarum & cubicarum aſſignandi modum tradidiſſe hic ſufficiet.

In æquatione biquadratica generaliter expreſſa $x^4 * pxx.qx.r = 0$, quia tres ſunt termini qui litteris cognitis afficiuntur, neceſſario quoque tres diverſæ litteræ in Serie formatrice [formatricem appello, quia format Seriem conſtructricem, id eſt, quæ radicem æquationis quæſitam conſtruit] ponendæ ſunt; & tunc æquationis provenientis ſinguli termini cum ſingulis terminis propoſitæ reſpective comparandi ſunt; & quod pro qualibet littera in Serie poſita exſurgit, valor iſte in eadem Serie pro eadem littera ſubſtituendus eſt, & nova Series, quæ inde generatur, erit æquationis propoſitæ conſtructrix. Series autem illa, quæ in conſtructricem mutanda eſt, ad libitum formari poteſt, ſi modo tres diverſas litteras contineat, & per duplicem ſumptionem quadrati ad priſtinam formam redigatur. Sit ergo Series formatrix hæc: &c: $\sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{cc})})})})}$; cujus valor quæratur ponendo $x =$ &c: $\sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{cc})})})})}$; ideoque $xx = cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{cc})})})}$, & $(xx - cc) : a = \sqrt{(cc + b\sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{cc})})})}$; ſumptiſque denuo quadratis, tranſpoſito cc, & diviſis per b, provenit $(x^4 - 2ccxx + c^4 - aacc) : aab = \sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{cc})})} =$ [ob eandem

dem cum priori poſita formam] x; reducta itaque æquatione ad cyphram, erit $x^4 * - 2ccxx - aabx + c^4 - aacc = 0$, cujus æquationis radix x conſtruitur per Seriem formatricem &c: $\sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{(cc + a\sqrt{cc})})})}$. Hujus autem ope conſtruitur etiam radix æquationis litteris generalibus expreſſæ $x^4 * - pxx - qx - r = 0$; ſi nempe termini illius cum terminis hujus comparentur, $p = 2cc$, $q = aab$, $r = - c^4 + aacc$; ideoque invenitur $cc = \frac{1}{2}p$, & ſubſtituto loco cc ejus valore in æquatione $r = - c^4 + aacc$, habetur $r = - \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}aap$; & proinde $aa = (4r + pp) : 2p$, & $a = \sqrt{(4r + pp)} : \sqrt{2p}$, & ſubſtituto loco aa ejus valore in æquatione $q = aab$, provenit $q = (4rb + ppb) : 2p$, ideo $b = 2pq : (4r + pp)$. Si ergo in Serie formatrice ſubſtituatur loco cc valor ejus, qui eſt $\frac{1}{2}p$, & loco a, $\sqrt{(4r + pp)} : \sqrt{2p}$, tandemque loco b, $2pq : (4\sqrt{} + pp)$, proveniet Series quam conſtructricem appellavimus, &c. $\sqrt{(\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{4r + pp}{2p}} \sqrt{(\frac{1}{2}p + \frac{2pq}{4r + pp}} \sqrt{(\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{4r + pp}{2p}} \sqrt{(\frac{1}{2}p + \frac{2pq}{4r + pp}} \sqrt{\frac{1}{2}p})))))}$, quæ nempe conſtruit & æqualis eſt radici quæſitæ æquationis propoſitæ $x^4 * - pxx - qx - r = 0$. Nunc non opus eſt, ut oſtendatur quo pacto Series formandæ ſint cum ſigna æquationis propoſitæ ſunt aliter conſtituta: aliud enim nihil faciendum eſt, quam ut, quomodocunque ſigna poſſint eſſe, ſemper ſinguli termini cum ſingulis comparentur: & ſi accidit ut in Serie conſtructrice aliquid imaginarii proveniat, ut ſi p eſſet quantitas negativa & proinde $\sqrt{(4r + pp)} : \sqrt{2p}$ imaginarium, huic inconvenienti occurri poteſt, ſi in Serie formatrice alicubi ſigna, vel aliud quid, prout rei natura exigit, mutetur.

Eſto nunc exemplum æquationis biquadraticæ reſolvendæ $x^4 * - 4xx - 2x - 5 = 0$; in qua $p = 4$, $q = 2$, $r = 5$, ideoque $\frac{1}{2}p = 2$, $2pq : (4 + pp) = \frac{4}{9}$, & $\sqrt{(4 + pp)} : \sqrt{2p} = \frac{9}{2}$. Sic itaque Series conſtructrix formatur in hanc &c. $\sqrt{(2 + \sqrt{(\frac{9}{2}} \sqrt{(2 + \frac{4}{9}} \sqrt{(2 + \sqrt{(\frac{9}{2}} \sqrt{(2 + \frac{4}{9}} \sqrt{2})))))}$, cujus valor æqualis eſt radici x æquationis $x^4 * - 4xx - 2x - 5 = 0$.

Oſten-

Oſtendendum nunc eſt, quomodo per hanc methodum æquationes cubicæ reſolvi poſſint; quod facillime ſic fit. Eſto æquatio cubica propoſita, cujus radix invenienda ſit $x^3 * - px - q = 0$, ideoque etiam $x^4 * - pxx - qx = 0$, hoc modo hæc æquatio eſt ſpecialis caſus æquationis biquadraticæ $x^4 * - pxx - qx - r = 0$ in qua nempe $r = 0$, poſito ergo, pro r, 0; provenit Series conſtructrix &c: $\surd(\frac{1}{2}p + \surd(\frac{1}{2}p \surd(\frac{1}{2}p + \frac{2q}{p} \surd(\frac{1}{2}p + \surd(\frac{1}{2}p \surd\frac{1}{2}p)))))$, quæ conſtruit radicem æquationis biquadraticæ $x^4 * - pxx - qx = 0$, vel hujus cubicæ $x^3 * - px - q = 0$. Exemplum eſto $x^3 * - 8x - 8 = 0$, in qua $p = 8$, & $q = 8$, proinde $\frac{1}{2}p = 4$ & $\surd\frac{1}{2}p = 2$, $2q : p = 2$, ideoque Series conſtructrix mutatur in hanc &c: $\surd(4 + 2\surd(4 + 2\surd(4 + 2\surd 4)))$. Ex qua Serie quoque ſtatim patet æquationem propoſitam eſſe reducibilem, & diviſibilem; quoniam enim Series hæc non alternative faciem mutat, ſed ubique eandem formam obtinet, & proinde per unicam ſumptionem quadrati ad æquationem perveniri poteſt; patet hanc æquationem non niſi ad duas dimenſiones aſcendere, & proinde æquationem cubicam per hanc eſſe diviſibilem: Sit namque $x = \surd(4 + 2\surd(4 + 2\surd(4 + 2\surd 4)))$, erit $(xx - 4) : 2 = x$, vel $xx - 2x - 4 = 0$, & ideo $x^3 * - 8x - 8 = 0$ dividi poterit per $xx - 2x - 4 = 0$; provenit quippe $x + 2 = 0$. Ergo æquatio per $x + 2 = 0$ reduci poteſt. Modus iſte reducendi in multis aliis uſui venire poteſt, & quidem abſque longa diſquiſitione. Supra diximus quod ad libitum Series formatrix formari poſſit: id verum eſt; interim oportet ut illa ſemper tres differentes litteras contineat, & alternative primam formam induat. Sic itaque loco Seriei formatricis quam ſupra poſuimus, &c. $\surd(cc + a\surd(cc + b\surd(cc + a\surd cc)))$, poni poſſent hæ aliæ, &c. $\surd(bc + a\surd(bc + b\surd(bc + a\surd bc)))$; vel $\surd(bb + a\surd(cc + a\surd(bb + a\surd(cc + a\surd bb))))$, vel quæcunque aliæ: quæ omnes alias dabunt Series conſtructrices; & ſic per diverſas vias ad eaſdem æquationum radices deducent.

Digitized by Google

LECTIO QUINQUAGESIMA SEXTA.

Additamentum ad Articulum de curvis Cauſticis.

De Cauſticis per Refractionem.

CUm de Cauſticarum natura & proprietatibus egimus, illas tantum conſideravimus quæ a radiis reflexis generantur. Siquidem autem radii refracti non minus quam reflexi, vel in Foco coincidunt, vel etiam ſuas Cauſticas formant, id eſt, curvas quarum radii refracti ſunt tangentes; oportet ut & harum natura, & quid ipſis proprium ſit paucis explicetur; ex quibus apparebit qualis illas inter, & a reflexione genitas *differentia* intercedat. Quid primo per radium refractum intelligatur jam conſtat: Si nempe radius luminis, vel viſivus, ab uno medio diaphano in aliud denſitate diverſum oblique incidit, radius ſecundum rectam, qua incidit, amplius non procedit; ſed in ipſo incidentiæ puncto rumpitur, & vel ad perpendiculum accedit, vel ab eodem recedit; ita tamen ut, quomodocunque incidat, ſinus anguli incidentiæ, id eſt, anguli quem radius incidens facit cum perpendiculo, habeat ad ſinum anguli refractionis, id eſt, anguli quem radius refractus facit cum perpendiculo, habeat, inquam, rationem conſtantem. Hoc ſaltem ſupponimus & non demonſtrabimus; nihilque nobis refert ſi medium, quod radios verſus perpendicularem rumpit, denſius dicatur, vel rarius, quam illud ex quo radii proveniunt; ſed modo refractionis allata lex, quæ per experientiam ſtabilita eſt, & de qua omnes conveniunt, hic tanquam hypotheſis ſupponenda eſt; cui calculum in Cauſticis determinandis ſuperſtruemus.

TAB. LXXV. *Fig. 173.* Sit figura quæcunque corporis diaphani DCK; punctum radians A; radii infinite parum diſtantes AK, AC; qui refracti coeant in B. Sit ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis,

tionis, ut *m* ad *n*: Dico $\frac{n}{m}$ AK + KB eſſe = $\frac{n}{m}$ AC + CB, vel AK + $\frac{m}{n}$ KB = AC + $\frac{m}{n}$ CB.

Centris A & B deſcribantur arculi CM & KL, & per punctum K agatur ad curvam perpendicularis NKO. Quoniam angulus NKM + MKC = recto = MKC + MCK; ergo angulus NKM = angulo MCK. Item ang. BKO + OKL = recto = OKL + LKC; ergo BKO = LKC. Sinus autem anguli NKM ad ſinum anguli BKO, per hypotheſin, ut *m* ad *n*; ergo ſinus anguli MCK ad ſinum anguli LKC, ut *m* ad *n*, id eſt, KM : LC = *m* : *n*; ideoque $\frac{n}{m}$ KM = LC; addatur illi $\frac{n}{m}$ AM & huic $\frac{n}{m}$ AC; erit $\frac{n}{m}$ KM + $\frac{n}{m}$ AM, ſeu $\frac{n}{m}$ AK = $\frac{n}{m}$ AC + LC; rurſumque additis BK & BL provenit $\frac{n}{m}$ AK + BK = $\frac{n}{m}$ AC + BC. *Q. E. D.*

Si Radii incidentes AK, *a*C ſint paralleli; erit, ducta per illos perpendiculari quacunque A*a*, $\frac{n}{m}$ AK + KB = $\frac{n}{m}$ *a*C + CB. TAB. LXXV. *Fig.* 174.

Hinc facile eſt determinare curvam DK, ita ut radii emanantes ex puncto dato A coincidant in puncto dato C. Per ea enim quæ modo demonſtravimus, oportet ut $\frac{n}{m}$ AK + KC, ſit ſemper eidem æqualis. Ducta itaque recta AC, & aſſumpto in ea puncto quocunque fixo D, fiat DX, ad libitum aſſumpta, ad DF ut *n* ad *m*, & centris C & A fiant arcus XK & FK; erit communis interſectio K in curva quæſita. Nam quia DX : DF = *n* : *m*, erit $\frac{n}{m}$ DF = DX; ideoque $\frac{n}{m}$ DF + $\frac{n}{m}$ AD ſeu $\frac{n}{m}$ AK = $\frac{n}{m}$ AD + DX; additiſque æqualibus KC, XC, erit $\frac{n}{m}$ AK + KC = $\frac{n}{m}$ AD + DC; Ergo &c. Si *m* TAB. LXXV. *Fig.* 175.

eſt ad n, ut 3 ad 2, quæ eſt ratio refractionis in vitro; erit curva DK Cartesii Ovalis prima, quæ in ejus *Geometria* abſque demonſtratione habetur. Omnes reliqui caſus, qui ibi exſtant, eodem modo facillime ſolvuntur, & ceteræ Ovales determinantur per unicum hoc Lemma, quod (*Fig.* 173) $\frac{n}{m}AK + KB$ ſit $= \frac{n}{m}AC + CB$.

TAB. LXXV. *Fig.* 176. Si datur curva AGK, punctum radians L, & punctum in quo radii colligendi ſunt F; quæritur curva BDK per punctum D tranſiens, ut radii incidentes ab L & per diaphanum AKB tranſeuntes reüniantur in puncto dato F? Ad curvam hanc conſtruendam, ducatur radius quicunque AG, cujus refractus ſit GDV; in quo ſumatur punctum D, ita ut $GD + \frac{n}{m}DF$ ſit $= \frac{n}{m}LA + AB + \frac{n}{m}BF - \frac{n}{m}LG$, erit punctum D in curva quæſita BDK. Demonſtratio hujus, quia a priore haud multum abludit, ob facilitatem ſuam apponi haud meretur.

Deveniendum tandem ad curvas Cauſticas, quæ generantur ab interſectionibus radiorum refractorum, qui vel parallele, vel a puncto quodam incidunt in ſuperficiem diaphani determinatam. Harum autem Cauſticarum non minus quam a reflexione genitarum generalis habetur rectificatio.

TAB. LXXV. *Fig.* 177. Sit enim AgG curva quæcunque; punctum datum radians L; radii incidentes LG, Lg; refracti GN, gn; curva Cauſtica NnC. Sit GhM curva, quæ ex evolutione curvæ NnC deſcribitur; & radio LA deſcribatur arcus AO. In præcedentibus demonſtratum eſt, quod ſit $GK : gh = m : n$; ergo omnes GK, id eſt GO, ad omnes gh, id eſt, ad AM, ut m ad n. Per ea autem quæ de evolutione curvarum dicta ſunt, recta CM eſt æqualis curvæ CN + GN; ideoque $AC - AM$, ſeu $AC - \frac{n}{m}GO = CN + GN$, & ipſa curva $CN = AC - \frac{n}{m}GO - GN$: puncta autem N & C

geo-

XLIX.

Fig. 174.

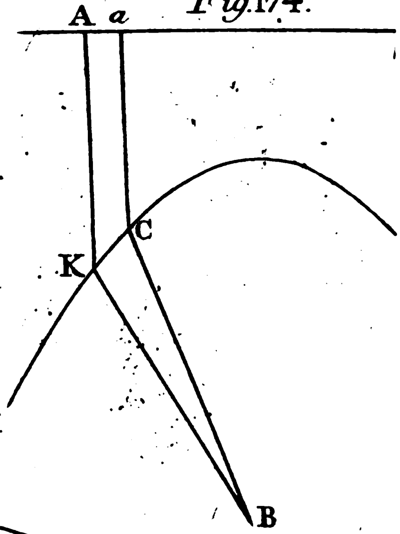


Fig. 175.

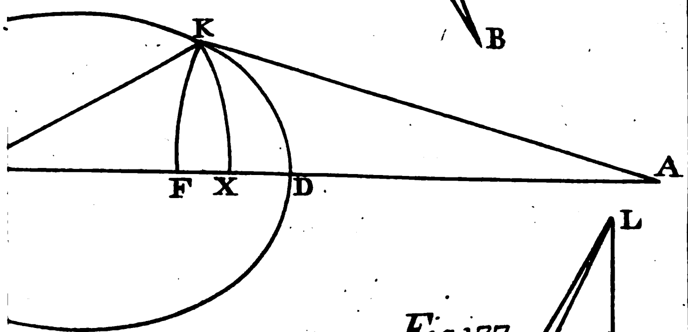


Fig. 177.

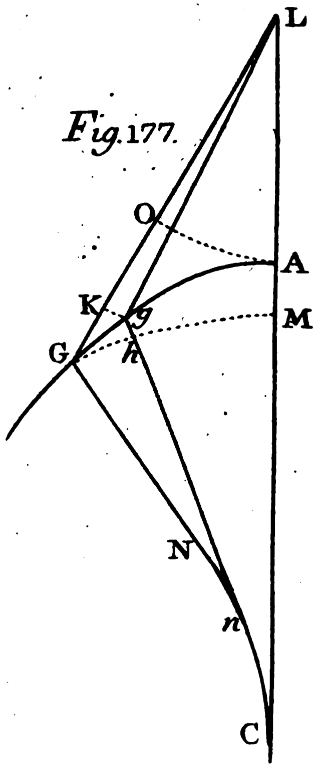
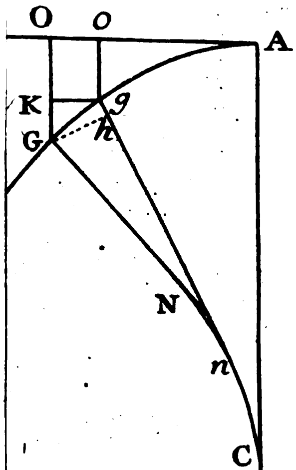


Fig. 178.



Digitized by Google

geometrice determinari poſſunt, ut infra patebit; ergo curva NC rectificata eſt.

Si radii ſunt paralleli eodem modo demonſtratur, quod ducta per verticem A perpendiculari AO, curva Cauſtica NC ſit $= AC - \frac{n}{m} GO - GN$; quod vel exinde patet, quia AO conſiderari poteſt, tanquam arcus centro infinite diſtante deſcriptus; radii enim a puncto illo provenientes pro parallelis cenſentur. TAB. LXXVI. *Fig.* 178.

LECTIO QUINQUAGESIMA SEPTIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti. De Cauſticis per Refractionem.

SI curvas Cauſticas determinare, vel conſtruere libet; quærenda eſt longitudo radii concurrentis, id eſt, quæ intercipitur inter curvam datam & punctum concurſus duorum radiorum infinite parum diſtantium; quod punctum in ipſa eſt Cauſtica, ut ſupra diximus in Titulo *De Cauſticis.* * Idem ergo & hic faciendum ad conſtruendas Cauſticas a refractione ortas.

Sit ergo ABC, curva quæcunque data; radii incidentes paralleli DB, *db*; eorum refracti BE, *b*E; ratio refractionis ut *m* ad *n*; E punctum concurſus: quæritur longitudo BE? qua inventa, erit punctum E, quod eſt in Cauſtica, determinatum. Ductis BF, *bf* applicatis ad axem AF parallelum radio DB, agatur BM perpendicularis ad curvam, & MN perpendicularis ad radium refractum BG; ducatur BL parallela axi AG, ſecans *bf* in H. Sit $AF = x$, $BF = y$, proinde $Ff = dx$, $bH = dy$; item $FG = z$; ideoque $BG = \sqrt{(yy + zz)}$, quoniam $dx : dy = BF [y] : FM$; erit $FM = ydy : dx$; angulus BMF = LBM = angulo incidentiæ, & NBM eſt angulus refractionis; ergo ſinus anguli BMF ad ſinum anguli NBM, id eſt, ſumpta BM pro ſinu toto. BF ad MN, ut *m* ad *n*; ſed, ob ſimilitudinem triangulorum GMN, TAB. LXXVI. *Fig.* 179.

 GBF,

* Supra, pag. 464.

Digitized by Google

GBF, $BF : MN = BG\ [\surd(yy + zz)] : GM$; invenitur itaque $GM = \frac{n}{m}\surd(yy + zz)$; proinde $FG - FM$, hoc eſt, $z - ydy : dx = \frac{n}{m}\surd(yy + zz)$, vel ſumendo quadrata $zz - 2zydy : dx + yydy^2 : dx^2 = nnyy : mm + nnzz : mm$; multiplicatis omnibus per $mmdx^2$, habebitur $mmzzdx^2 - 2mmzydydx + mmyydy^2 = nnyydx^2 + nnzzdx^2$; reducta æquatione provenit $zz = (2mmzydydx - mmyydy^2 + nnyydx^2) : (mm - nn)dx^2$, ex cujus reſolutione oritur $z = (mmydydx + \surd(mmnnyydy^2dx^2 + mmnnyydx^4 - n^4yydx^4)) : (mm - nn)dx^2$ vel diviſo per dx, $z = (mmydy + \surd(mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2)) : (mmdx - nndx) = FG$ vel fg. Eſt autem $bf : fg = bH\ [dy] : HL$; ergo $HL = (mmdy^2 + dy\surd(mmnndy^2 + mmnndx^2 - n^4dx^2)) : (mmdx - nndx)$, & $BH + HL = BL$; proinde $BL = dx + (mmdy^2 + dy\surd(mmnndy^2 + mmnndx^2 - n^4dx^2)) : (mmdx - nndx)$. Sed $AF + FG = AG$, ergo $AG = x + (mmydy + \surd(mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2)) : (mmdx - nndx)$; ſumatur differentiale lineæ AG, proveniet $Gg = dx + (mmdy^2 + mmyddy) : (mmdx - nndx) + (mmnnydyddy + mmnndy^3 + mmnndx^2dy - n^4dx^2dy) : (mmdx - nndx)\surd(mmnndy^2 + mmnndx^2 - n^4dx^2)$. Eſt autem $BF^2 + FG^2 = BG^2$: Ergo $BG = \surd[yy + (m^4yydy^2 + mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2 + 2mmydy\surd(mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4y^2dx^2)) : (m^4dx^2 - 2mmnndx^2 + n^4dx^2)]$. His inventis, ſumatur differentia inter BL & Gg, & erit $BL - Gg = (-mmyddy - mmnnydyddy : \surd(mmnndy^2 + mmnndx^2 - n^4dx^2)) : (mmdx - nndx)$.

Sed, ob ſimilitudinem triangulorum BLE & GgE, eſt $BL : Gg = BE : GE$; ergo *dividendo* $BL - Gg : BL = BG : BE$; Proportione itaque hac inſtituta, invenitur BE, ſi $mmdx^2 - nndx^2 + mmdy^2 + dy\surd(mmnndy^2 + mmnndx^2 - n^4dx^2)$ multiplicatur per $\surd[yy + (m^4yydy^2 + mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2 + 2mmydy\surd(mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2)) : (m^4dx^2 - 2mmnndx^2 + n^4dx^2)]$, & productum dividatur per

per $- mmyddy - mmnydyddy : \sqrt{(mmdy^2 + mmdx^2 - nndx^2)}$. Hinc in quavis curva data inveniri poteſt longitudo radii refracti BE, ſubſtituendo nempe valorem ipſius dx, vel dy, & ddy; nam dx, dy & ddy, ob curvæ datæ naturam, ſeſe deſtruent, & proin orietur longitudo BE in quantitatibus pure algebraïcis. Cognita autem BE, curva Cauſtica conſtrui & determinari poteſt. *Q. E. D.*

Si m ad n habet rationem infinite magnam, hoc eſt, ſi ſinus anguli refractionis eſt nihil, & proinde radius refractus ipſa perpendicularis ad curvam; manifeſtum eſt quod tunc Cauſtica ſit ipſa curva, ex cujus evolutione curva data ABC deſcribitur, & hoc re ipſa ita invenitur. Poſito enim, in quantitate BE generaliter inventa, $n = 0$; proveniet $BE = (dx^2 + dy^2) \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : - ddydx$; quod idem etiam ſupra, de evolutione curvarum *, pro longitudine lineæ evolventis repertum fuit; id quod calculi noſtri ἀκρίβειαν quodammodo confirmare poteſt.

LECTIO QUINQUAGESIMA OCTAVA.

Continuatio ejuſdem argumenti. De curvis Cauſticis per Refractionem.

POſtquam determinaverimus Cauſticas ex generali refractionis lege, operæ pretium erit ut ad ſpeciales refractiones applicentur; qualis ex. gr. deprehenditur in vitro, ubi ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis, ſeu m ad n, ut 3 ad 2. Si itaque longitudinem radii refracti in quavis curvitate vitri invenire velimus, ponendum eſt $m = 3$ & $n = 2$; quo facto invenitur BE, ſi $5dx^2 + 9dy^2 + dy \sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)}$ multiplicetur per $\sqrt{(117yydy^2 + 45yydx^2 + 18yydy \sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)})} : 5dx$, & productum dividatur per $- 9yddy - 18ydyddy : \sqrt{(9dy^2 + 5dx^2)}$, vel quia numerator & denominator dividi poteſt per y [quod etiam fieri potuit in

* Lect. XVI, pag. 437.

gene-

Digitized by Google

generali quantitate longitudinem BE exprimente] erit BE $=$ $(5dx^2 + 9dy^2 + dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)}) \times \sqrt{(117dy^2 + 45dx^2 + 18dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)})} : (-45dxddy - 90dxdyddy : \sqrt{(9dy^2 + 5dx^2)})$.

Sit nunc curva propoſita ABC Parabola; cujus parameter $= 2a$, ergo $2ax = y$, & $x = yy : 2a$, ideoque $dx = ydy : a$; quoniam autem dx eſt conſtans, erit ddx ſeu $(yddy + dy^2) : a = 0$ proinde $ddy = -dy^2 : y$. Si itaque loco dx & ddy, ponantur eorum valores; proveniet $5dx^2 = 5yydy^2 : aa$; $dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)} = \frac{dy^2}{a}\sqrt{(36aa + 20yy)}$; $\sqrt{(117dy^2 + 45dx^2 + 18dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)})} = \frac{dy}{a}\sqrt{(117aa + 45yy + 18a\sqrt{(36aa + 20yy)})}$; $-45dxddy = 45dy^3 : a$, $-90dxdyddy : \sqrt{(9dy^2 + 5dx^2)} = 90dy^3 : \sqrt{(9aa + 5yy)}$; tota itaque quantitas BE erit $= (5yydy^2 : aa + 9dy^2 + \frac{dy^2}{a}\sqrt{(36aa + 20yy)}) \times \frac{dy}{a}\sqrt{(117aa + 45yy + 18a\sqrt{(36aa + 20yy)})} : 45dy^3 : a + 90dy^3 : \sqrt{(9aa + 5yy)})$. Diviſo numeratore & denominatore per dy^3, & ordinata fractione, habebitur tandem BE $= (\sqrt{(9aa + 5yy)^3} + 18a^3 + 10ayy) \times \sqrt{(117aa + 45yy + 18a\sqrt{(36aa + 20yy)})} : (90a^3 + 45aa\sqrt{(9aa + 5yy)})$. Omnia itaque puncta Cauſticæ in Parabola, & quidem circino & regula, determinari poſſunt. Initium Cauſticæ invenitur ponendo $y = 0$; hoc enim in caſu erit BE $= 3a$; diſtantia ergo initii Cauſticæ a vertice Parabolæ eſt ad parametrum ut 3 ad 2.

Non aliter invenitur longitudo radii refracti in Circulo. Sit enim ABC Circulus, cujus diameter $= 2a$, proinde $2ax - xx = yy$, & $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, $dy = (a - x)dx : \sqrt{(2ax - xx)}$; ſumendo differentiale invenitur $ddy = -aadx^2 : (2ax - xx)\sqrt{(2ax - xx)} = -aadx^2 : y^3$; loco ergo dy & ddy, ponendi ſunt eorum valores, & habebitur $9dy^2 = (9aadx^2 - 18axdx^2 + 9xxdx^2) : (2ax - xx) = (9aa - 9yy)dx^2 : yy$ $dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)}$ $= \left(\frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}\right)\sqrt{\left(\frac{36aadx^2 - 32axdx^2 + 16xxdx^2}{2ax - xx}\right)}$

$=(adx$

$= \left(\frac{adx - xdx}{y}\right) \surd \left(\frac{36aadx^2 - 16yydx^2}{yy}\right) = (adx^2 - xdx^2)$ $\surd(36aa - 16yy) : yy$. Item $\surd(117dy^2 + 45dx^2 + 18dy$ $\surd(36dy^2 + 20dx^2)) = \surd(117aadx^2 - 72yydx^2 + (18adx^2$ $- 18xdx^2) \surd(36aa - 16yy)) : y - 45\ dxddy = 45aadx^3 : y^3$ $- 90dxdyddy : \surd(9dy^2 + 5dx^2) = (90a^3dx^3 - 90aaxdx^3) :$ $y^3 \surd(9aa - 4yy)$. Subſtitutis ergo ubique valoribus, provenit BE $= ((9aa - 4yy)dx^2 : yy + (a - x)dx^2 \surd(36aa - 16yy))$ $\times dx \surd(117aa - 72yy + 18(a - x)\surd(36aa - 16yy) : y)) :$ $(45aadx^3 : y^3 + 90(a - x)aadx^3 : y^3 \surd(9aa - 4yy))$. Diviſo numeratore & denominatore per dx^3, & reducta fractione habebitur BE $= \left(\frac{\surd(9aa - 4yy)^3 + 18a^3 - 8ayy - 18aax + 8yyx}{45aa\surd(9aa - 4yy) + 90a^3 - 90aax}\right) \times$ $\surd(117aa - 72yy + (18a - 18x)\surd(36aa - 16yy))$. Initium hujus Cauſticæ habetur ponendo $x = a$, proinde etiam $y = a$, erit enim BE $= \frac{1}{3}a\surd 5$. Finis ejuſdem Cauſticæ innoteſcit, ſi ponatur x & $y = 0$, ex hac enim poſitione oritur BE $= 3a$. Hi duo caſus ſunt iidem, quos Dn. HUGENIUS aſſignavit in ſuo Tractatu *De lumine*; cæterum generaliter oſtendi poteſt, quod punctum Cauſticæ cujuſcunque in axe curvæ generatricis ſumptæ, ſit a vertice ejuſdem curvæ diſtans linea quæ eſt ad longitudinem perpendicularis ad curvam in vertice ut m ad $m - n$. Radius enim perpendiculariter incidens in vertice curvæ cujuſdam ABC abſque refractione progreditur per lineam & axem AG; punctum itaque Cauſticæ in axe G ibi erit, ubi radius BG, qui eſt refractus ipſius DB infinite parum diſtantis interſecat axem AG. Ductis autem ordinata BF, perpendiculari ad curvam BM, & normali MN ad BG, oſtendimus quod BF : MN $= m : n$; eſt autem BF : MN $=$ GF, vel GA : GN vel GM; ideoque AG : MG $= m : n$, & *dividendo* AG : AM $= m : m - n$. Hinc in Parabola, quia AM $=$ ſemiparametro, ſtatim patet quod AG : param. $= m : 2m - 2n$, & proinde ſi $m = 3$ & $n = 2$; AG : param. $= 3 : 2$. Eodemque modo in Circulo, quia AM $=$ radio,

TAB. LXXVI. *Fig.* 180.

dio, erit AG: radium $= m : m - n$, & ſi $m = 3$ & $n = 2$; AG ad radium ut 3 ad 1; & ſic in aliis.

LECTIO QUINQUAGESIMA NONA.

Continuatio ejuſdem argumenti. De Cauſticis per Refractionem.

ORdo nunc poſtularet ut illas quoque Cauſticas ſupputaremus, quarum radii incidentes, non quidem ab infinito, ſed a puncto quodam determinato procedunt. Prolixitas autem calculi prioris caſus oſtendit eam in hoc multo majorem fore; prior enim poſterioris non niſi peculiaris eſt caſus, & ſub hoc continetur. Sufficiet ergo viam indigitaſſe, per quam ad optatum finem, id eſt, longitudinem radii refracti pervenire poſſimus; quocirca id unicum adnitemur ut valorem ipſius z in litteris generalibus queamus exhibere. Sit adeoque punctum radians D, curva in quam radii DB, Db incidunt ABb; axis curvæ DAG, intercepta inter curvam & punctum radians AD $= a$, AF $= x$, FB $= y$, FG $= z$. Ad curvam in puncto incidentiæ B ducta perpendiculari BM, ducantur a puncto M ad radium refractum BG & ad incidentem continuatum DBO perpendiculares MN & MO: Constructis reliquis ut in priori caſu, erit FM $= ydy : dx$, ſed ob angulos rectos MOD & BFD, triangula MOD & BFD ſunt ſimilia, ideoque BD: BF $=$ DM : MO, & ſic invenitur MO $= (yx + yydy : dx) : \sqrt{(xx + yy)}$. Nunc angulus OBM eſt $=$ angulo incidentiæ & NBM eſt angulus refractionis; proinde, ſumpta BM pro ſinu toto, erunt MO, MN ſinus angulorum incidentiæ & refractionis; ſic itaque $m : n =$ MO: MN, ergo MN $= (nyx + nyydy : dx) : m\sqrt{(xx + yy)}$, & ob ſimilitudinem triangulorum GMN & GBF, BF : MN $=$ GF : GN; Ergo GN $= (nzx + nzydy : dx) : m\sqrt{(xx + yy)}$. Sed GN^2 + MN^2 $=$ MG^2, & ipſa MG $= (nnzzxx$

TAB. LXXVI. Fig. 181.

+

$+ 2nnzzyx\,dy : dx + nnzzyy\,dy^2 : dx^2 + nnyyxx + 2nnxy^3\,dy : dx + nny^4\,dy^2 : dx^2) : mm(xx+yy) = GF - MF = z - y\,dy : dx$. Ex hac itaque æquatione innoteſcit valor z, qui ſi addatur ad D F ſeu x, habebitur GD, cujus differentiale erit $= Gg$, & ſi fiat $BF : FG = bH : HL$, cognoſcetur HL & proinde BL, & ex lineis BF, FG, habebitur hypothenuſa BG, & quia ob ſimilitudinem triangulorum BLE & GgE, $BL : Gg = BE : GE$, & *dividendo* $BL - Gg : BL = BG$, ad quæſitam BE. Si quis calculum inſtituere velit, experietur abſque tædioſa ſupputatione id fieri non poſſe. Interim finis vel initium Cauſticæ, quod in axe curvæ datæ ABC exiſtit, facillime & nullo quaſi calculo reperitur; punctum enim illud ibi erit ubi radius refractus BE radii incidentis DB, qui cum axe angulum facit infinite parvum, interſecat axem. Poſito ergo BDA angulo infinite parvo, quærenda eſt longitudo BG, vel [ob differentiam infinite exiguam] AG. Quia autem ſupra inventa eſt $MN = (nyx + nyy\,dy : dx) : m\sqrt{(xx+yy)}$, erit $BF : MN = y : \frac{nyx + nyy\,dy : dx}{m\sqrt{(xx+yy)}} = m\sqrt{(xx+yy)} : nx + \frac{ny\,dy}{dx} = mDB$, vel $mDA : nDA + nFM$ vel nAM. Eſt vero etiam $BF : MN = BG$, vel $AG : MG$; ergo $mDA : nDA + nAM = AG : MG$; & *dividendo* $mDA - nDA - nAM$, id eſt, $mDA - nDM : mDA = AM$, ad quæſitam AG. Hinc ſtatim patet, quod ſi radii incidentes ſint paralleli, & proinde ex infinito procedant, m ſit ad $m - n$ ut AG ad AM; hoc enim in caſu DA cenſetur $= DM$, proinde $mDA : mDA - nDM = m : m - n$; ergo quoque $m : m - n = AG : AM$.

Si eſt $m : n = DM : DA$, & proinde $nDM = mDA$, erit $mDA - nDM = 0$; ideoque $0 : mDA = AM : AG$ infinitum; in hoc itaque caſu erit axis AG curvæ Cauſticæ aſymptotos.

Si curva data ABb eſt Parabola & $m : n = 3 : 2$, erit $3DA - 2DM = 3DA - 2DA -$ param. $= DA -$ parametro; ideoque $DA -$ param. ad $3DA = \frac{1}{2}$ param. ad AG,

ad AG, hinc ſi DA = parametro, erit AG Cauſticæ aſymptotos.

Si AB*b* eſt Circulus, & $m : n = 3 : 2$; erit 3 DA — 2 DM = 3 DA — 2 DA — diametr. = DA — diametr. proinde DA — diametr. : 3 DA = radius : AG; hinc ſi DA = diametro, erit axis AG curvæ Cauſticæ aſymptotos.

Notandum etiam eſt, quod dato initio Cauſticæ G, determinari poſſit punctum radians D: Quoniam enim MG: AG $= n$DA + nAM : mDA, erit $\frac{1}{n}$MG : $\frac{1}{m}$AG = DA + AM : DA, & proinde *dividendo* $\frac{1}{n}$MG — $\frac{1}{m}$AG : $\frac{1}{m}$AG = AM : DA quæſitam.

Reſtat ut Problema de Cauſticis inverſe reſolvatur; hoc eſt data curva Cauſtica invenire curvam cujus eſt Cauſtica. Hoc Problema autem eſt indeterminatum, una enim eademque Cauſtica infinitas habet curvas in quibus radii tam refracti quam reflexi illam generant. Quoniam autem ſupra in articulo de Cauſticis a reflexione radiorum ortis hujus Problematis inverſe poſiti mentionem nullam fecimus; nunc de utroque genere Cauſticarum inverſe ſolvendarum paucis agemus.

TAB. LXXVI. *Fig.* 182. Sit ABC curva data Cauſtica; quæritur altera curva AFH ita ut radii GF paralleli incidentes & reflectentes FB tangant curvam ABC; Cauſticarum natura enim id requirit? A puncto quodam curvæ datæ C, pro initio ſumpto, ducatur tangens CD & per ejus quodcunque punctum D agatur alia linea DE angulum faciens quemcunque CDE: ducta per punctum E perpendiculari LGEH, fiat in alio curvæ puncto B tangens *BF*, in eaque quæratur punctum F, ita ut ſi FG ducatur parallela ipſi DE, lineæ BF + FG ſint = curvæ BC + CD + DE; erit punctum F in curva quæſita AFH. Demonſtratio hujus ex iis, quæ de Cauſticis dicta ſunt, manifeſta eſt.

TAB. LXXVI. *Fig.* 183. Si nunc radii incidentes ex puncto quodam dato proveniunt, curva quæſita ſic conſtruitur. Sit ABC curva Cauſtica data, & punctum L datum a quo ducatur ad curvam tangens LC

&

& ducta in quolibet alio puncto B tangente BF, quæratur in ea punctum F, ita ut ducta LF + BF ſit = curvæ BC + LC; erit punctum F in curva quæſita AF.

Ex his patet curvam AF in hoc & in præcedenti caſu eſſe mechanicam, ſi Cauſtica ABC non rectificari poſſit. Sic itaque hic idem animadverti poteſt, quod in evolutione curvarum. Nam quemadmodum omnis curva geometrica habet aliam geometricam & ſimul rectificabilem, ex cujus evolutione illa generatur, ſed non vice verſa; non enim omnis curva geometrica per ſui evolutionem producit aliam geometricam; ſic etiam omnis curva geometrica habet Cauſticam geometricam & rectificabilem, ſed non viciſſim.

Alia inſuper analogia his curvis intercedit. Sicut quælibet curva data unicam duntaxat habet curvam ex cujus evolutione progignitur, & e contra unica curva data infinitas alias gradu diverſiſſimas per ſui evolutionem deſcribere poteſt, prout initium evolutionis hic vel alibi ſumatur; ita quoque quælibet curva unicam tantum habet Cauſticam, ſed unica curva infinitarum aliarum poteſt eſſe Cauſtica; prout nempe in primo caſu angulus CDE, in poſteriori vero punctum L ſumatur.

In constructione Cauſticæ primi caſus aſſumtum eſt, quod punctum F inveniri poſſit, ita ut BF + parallela FG ſit = quantitati datæ. Hoc punctum ſic invenitur: producta BF donec occurrat rectæ LG in N; fiat NO perpendicularis ad LN & æqualis ipſi NB, & ducatur OB, abſciſſa NP = quantitati datæ, nempe curvæ BC + CD + DE, agatur PQ parallela NL ſecans OB in Q, & per punctum Q parallela QG: ſecabit hæc QG rectam NB in puncto quæſito F; quoniam enim NO = NB, erit FQ = FB, ergo QF + FG, ſeu PN, ſeu curva BC + CD + DE = BF + FG; ideoque F eſt punctum quæſitum. TAB. LXXVI. *Fig.* 182. & 184.

In conſtructione poſterioris caſus aſſumptum eſt punctum F, ita ut BF + LF [*Fig.* 183] ſit æqualis curvæ BC + LC: Hoc ita invenitur. Prolongetur BF [*Fig.* 185] quantum opus, & deſcribatur curva BOQ ejus naturæ, ut quomodocunque ducta LNO intercepta NO TAB. LXXVI. *Fig.* 183. & 185.

Digitized by Google

ſit = abſciſſæ NB; radio LQ = curvæ BC + CL [*Fig.* 183] deſcribatur arcus circuli PQR ſecans curvam BOQ in Q, erit, ducta LQ, F punctum quæſitum. Demonſtratio hujus evidens eſt.

TAB. LXXVI. *Fig.* 186. Data nunc Cauſtica refractiva, id eſt quæ a radiis refractis oritur; difficile non reperietur curvam deſcribere cujus illa eſt Cauſtica. Sit enim curva data Cauſtica ABC & in puncto C, tanquam fine, ducatur tangens CD, fiatque angulus CDE quicunque. Ducta per E perpendiculari EL, agatur quæcunque tangens BF, in qua quæratur punctum F, ita ut ducta FG parallela ipſi ED, curva $BC + CD + \frac{n}{m} DE$ ſit $= BF + \frac{n}{m} FG$ [quod ad modum præcedentem facile conſtrui poteſt], erit punctum F quæſitum. Si omnes radii in puncto dato N coire debent; oportet in tangente BF ſumere punctum F, ita ut, ducta NF, curva $BC + CD + \frac{n}{m} ND$ ſit $= BF + \frac{n}{m} NF$; erit punctum F iterum quæſitum. Hæc itaque puncta F formabunt curvam quæſitam. Quæ de prioribus Cauſticis, reſpectu evolutionis curvarum, dicta ſunt; ea pariter de his intelliguntur. Cæterum hæc omnia ex præcedentibus tam clare liquent ut demonſtratione nulla indigeant.

INDEX

Digitized by Google

N.o CXLIX.

Fig. 180.

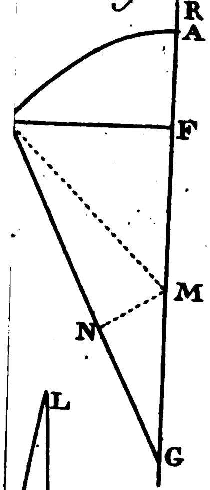


Fig. 181.

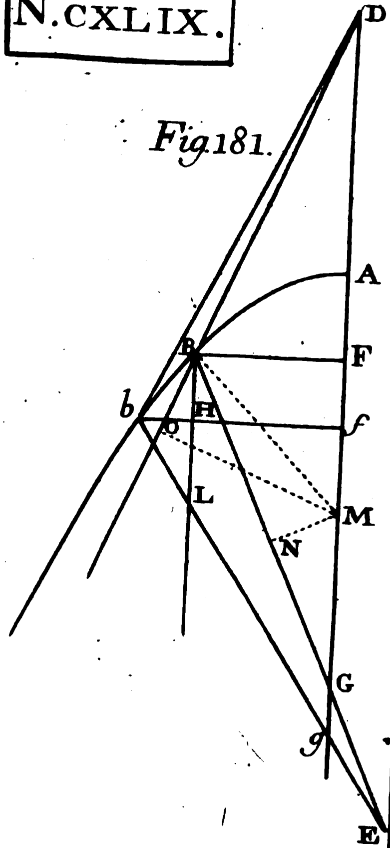


Fig. 183.

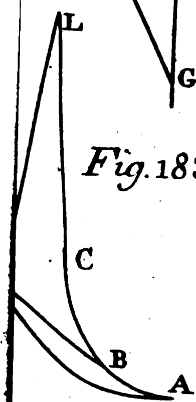


Fig. 185.

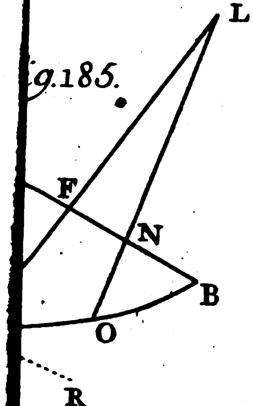
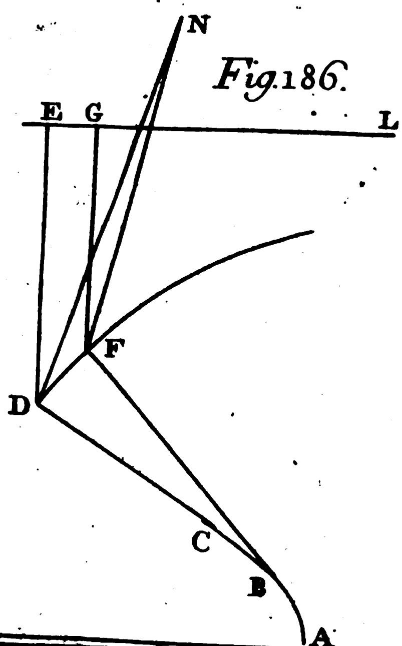


Fig. 186.



INDEX NUMERORUM

Quos Tomus Tertius *complectitur*.

N°. CXXXV. Diſcours ſur les Loix de la communication du Mouvement. pag. 1.
Lettre à *Mrs. de l'Academie Roiale des Sciences*, ſervant de Préface au Diſcours ſuivant, 3
Chap. I. De la dureté des Corps: Définition de la dureté ſelon les differentes idées qu'on en peut avoir, 7
Chap. II. Comment le mouvement ſe détruit & ſe reproduit par la force du reſſort. Egalité de l'action & de la réaction. Solution de quelques Problemes, 13
Chap. III. Ce que c'eſt que la viteſſe virtuelle. Principe de l'équilibre appliqué à la production du mouvement par l'entremiſe d'un reſſort entre deux corps a reſſort, 23
Chap. IV. Recherche de la Régle generale de la determination du mouvement, 28
Chap. V. De la force vive des corps qui ſont en mouvement 35
Chap. VI. En quoi conſiſte la meſure des forces vives. Maniere de les comparer enſemble, 41
Chap. VII. Où l'on démontre que les forces vives des corps ſont en raiſon compoſée de leurs maſſes, & des quarrés de leurs viteſſes, 46
Chap. VIII. Où l'on confirme la meſure des forces vives établie dans le Chapitre précedent, par des expériences & de nouvelles démonſtrations, 50
Chap. IX. Démonſtration générale du Theoréme de la quantité des forces vives proportionelles aux produits des maſſes par les quarrés des viteſſes, 53

Chap.

Chap. X. Des trois loix qui s'obſervent conſtamment dans le choc direct de deux corps. Que l'une de ces loix, priſe à diſcrétion, a toujours une connexion néceſſaire avec les deux autres, 55
Chap. XI. Du choc de trois corps durs ſelon differentes directions, 59
Chap. XII. Du choc d'un corps contre pluſieurs autres, & de la détermination générale de leur mouvement après le choc, 65
Chap. XIII. De la réſiſtance des milieux; qu'elle ne change pas les loix de la communication du mouvement. Maniére de calculer la perte de la viteſſe cauſée par la réſiſtance, 73
Chap. XIV. Nouvelle maniere de déterminer, par la théorie des forces vives expliquée dans cet Ouvrage, le centre d'oſcillation dans les Pendules compoſez, 77
Addition au Diſcours ſur les loix de la communication du Mouvement, où l'Auteur entreprend de donner une explication probable de la cauſe phyſique du reſſort, 81
N°. CXXXVI. De integrationibus æquationum differentialium, ubi traditur Methodi alicujus ſpecimen integrandi ſine prævia ſeparatione indeterminatarum, 108
N°. CXXXVII. Theoremata ſelecta, pro conſervatione virium vivarum demonſtranda & experimentis confirmanda, 124
N°. CXXXVIII. Nouvelles penſées ſur le Syſtème de Mr. DES-CARTES, & la maniere d'en déduire les Orbites & les Aphelies des Planètes, 131
N°. CXXXIX. Methode pour trouver les Tautochrones dans les milieux réſiſtans comme les quarrés des viteſſes, 173
N°. CXL. Meditationes de Chordis vibrantibus, cum ponduſculis æquali intervallo a ſe invicem diſſitis, ubi nimirum ex principio virium vivarum quæritur numerus vibrationum chordæ pro una oſcillatione Penduli datæ longitudinis, 198
N°. CXLI. *De Epicyloidibus in ſuperficie Sphærica deſcriptis*, 211
N°. CXLII. Probléme ſurles Epicycloïdes ſphériques, 216
N°. CXLIII. Sur les courbes algebriques & rectifiables tracées ſur une ſurface ſphérique, 230
N°. CXLIV. *Excerptum ex Theoria generali motuum, Auct.* HERMANNO, 237
N°. CXLV. De vera notione virium vivarum, earumque uſu in Dynamicis, Diſſertatio, 239
N°. CXLVI. Eſſai d'une nouvelle Phyſique Céleſte; ſervant à expliquer les principaux Phénomènes du Ciel, & en particulier la cauſe phyſique de l'inclinaiſon des Orbites des Planètes par raport au plan de l'Equateur du Soleil, 261
Diſcours

Digitized by Google

Diſcours préliminaire, 263
Premiere partie, 272
Seconde partie, 295
Troiſiéme partie, 313
Quatriéme partie, 329
N°. CXLVII. Solutiones novorum quorundam Problematum mechanicorum, 365
N°. CXLVIII. Demonſtratio methodi analyticæ, qua determinata eſt aliqua quadratura exponentialis per Seriem, 376
N°. CXLIX. Lectiones Mathematicæ de Methodo Integralium, aliiſque, conſcriptæ in uſum Ill. Marchionis HOSPITALII, 385
Lect. I. De Natura & Calculo Integralium, 387
Lect. II. De Quadratura ſpatiorum, 394
Lect. III. IV. Variarum Curvarum quadraturæ, 399
Lect. V. VI. Inventio curvarum, quæ unicum habent ſpatium quadrabile, 407
Lect. VII. Quomodo completa reddenda ſit Integralis inventa, 412
Lect. VIII. IX. X. De Methodo Tangentium inverſa, 413
Lect. XI. Continuatio ejuſdem argumenti. Regulæ quædam pro ſeparatione indeterminatarum. Problematis *Beaunianí* ſolutio, 421
Lect. XII. XIII. XIV. Continuatio ejuſdem argumenti, de Methodo tangentium inverſa, 425
Lect. XV. De Circulis Oſculantibus & Evolutione curvarum, ejuſque uſu in rectificandis curvis, 432
Lect. XVI. XVII. Inventio centri Circuli Oſculatoris & Evolutæ, 434
Lect. XVIII. Continuatio ejuſdem argumenti. Ex data evoluta inventio curvæ evolutione deſcriptæ, 440
Lect. XIX. Inventio curvarum ex evolutione Parabolæ cubicalis ſecundæ deſcriptarum, 443
De rectificatione curvarum ope ſuæ evolutionis, 444
Lect. XX. Quadratura ſpatiorum per evolutionem curvarum deſcriptorum, 446
Lect. XXI. Continuatio ejuſdem argumenti, 448
De curvis Cycloidibus, earum rectificatione, ſpatiorum dimenſione, & earundem evolutione, 449
Lect. XXII. Continuatio ejuſdem argumenti. Quænam Cycloides ſint geometricæ, quænam mechanicæ. Cycloidum rectificatio & quadratura, 451

Lect. XXIII.

Digitized by Google

Lect. *XXIII.* Continuatio ejuſdem argumenti, 455
Lect. *XXIV.* Cycloidis evoluta ipſa eſt Cyclois. Idem de Spirali Logarithmica oſtenditur, 458
Lect. *XXV.* Spatii cujuſdam Cycloidalis quadratura abſoluta, 460
Lect. *XXVI.* De curvis Cauſticis per reflexionem, earumque proprietatibus, 464
Lect. *XXVII.* Cauſtica circularis radiorum parallelorum, 467
Lect. *XXVIII.* Cauſtica circularis radiorum parallelorum eſt cycloidalis, 469
Cauſtica parabolica, 471
Lect. *XXIX.* Cauſtica cycloidalis, 472
Cauſtica radiorum e dato puncto promanantium, 473
Lect. *XXX.* Cauſtica circularis radiorum e dato in peripheria puncto promanantium, 475
Lect. *XXXI.* Cauſtica parabolica radiorum e vertice promanantium, 477
Cauſtica cycloidalis radiorum e dato puncto fluentium, 478
Lect. *XXXII.* Cauſtica cycloidalis radiorum axi parallelorum eſt Cyclois, 479
Cauſtica Spiralis Logarithmicæ radiorum ex umbilico promanantium eſt Spiralis Logarithmica, 481
Lect. *XXXIII.* Varia Problemata Phyſico-Mechanica, eorumque ſolutiones. Inventio curvæ deſcenſus æquabilis, 482
Lect. *XXXIV.* Alia ſolutio Problematis de invenienda curva deſcenſus æquabilis, 485
Inventio curvæ Iſochronæ paracentricæ, 486
Lect. *XXXV.* Inventio curvæ Iſochronæ vel Tautochronæ, 488
Lect. *XXXVI.* De Curvis Funicularis, vel Catenariis, 491
Lect. *XXXVII.* Continuatio ejuſdem argumenti. Solutionis *Leibnitianæ* demonſtratio. Catenariæ vulgaris proprietates, 494
Lect. *XXXVIII.* *XXXIX.* *XL.* De curvatura Funis inæqualiter craſſi, 497
Lect. *XLI.* De curvatura Funis extenſibilis, 505
Lect. *XLII.* De curvatura fili ex preſſione fluidi, 507
Lect. *XLIII.* De curvatura Veli a Vento inflati, 510
Lect. *XLIV.* De curvatura Lintei a Fluido incumbente, 512
Lect. *XLV.* Conſtructio curvæ Lintearıæ, 515
Lect. *XLVI.* De curvitate radii ſolaris per atmoſphæram tranſeuntis, 516
Lect. *XLVII.* De Quadratura & Rectificatione univerſali ſpatiorum & curvarum per Series infinitas, 519
Lect. *XLVIII.*

Digitized by Google

Lect. XLVIII. De Serie exprimente binomium ad poteſtatem indeterminatam elevatum, 522
Lect. XLIX. De Quadraturis & rectificationibus, & de radicum extractionibus per Series infinitas, 526
Lect. L. LI. LII. De extractione radicum numerorum irrationalium per Series infinitas, modo diverſo a præcedenti, 529
Lect. LIII. De inveniendis radicibus æquationum per continuam approximationem, 537
Lect. LIV. LV. De Conſtructione geometrica Problematum ſolidorum & hyperſolidorum per rectas lineas & circulos, 539
Lect. LVI. LVII. LVIII. LIX. Additamentum ad Articulum de Curvis Cauſticis. De Cauſticis per Refractionem, 546

FINIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google